

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

*Journal of Applied Mathematics and Physics*  
*Journal de Mathématiques et de Physique appliquées*

## ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baldinger, E. Baumann  
R. Mercier, P. Scherrer, E. Stiefel, F. Stüssi, W. Traupel, H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

VOL. VII – 1956



BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL  
SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

Nachdruck verboten

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der  
Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten

© Birkhäuser Verlag, Basel 1956

Printed in Switzerland

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

*Survey Articles · Comptes rendus*

	Seite Page	Nr. Issue
HERSCH, J., PFLUGER, A., und SCHOPF, A.: Über ein simultanes Differenzenverfahren zur Abschätzung der Torsionssteifigkeit und der Kapazität nach beiden Seiten . . . . .	89	(2)
MAEDER, P. F., and WOOD, A. D.: Transonic Wind Tunnel Test Sections. . .	177	(3)
SÄNGER, R.: On the Structure of Ice-Forming Nuclei . . . . .	213	(3)
SPEISER, A. P.: Koordinatensysteme in Feuerleitgeräten . . . . .	1	(1)

ORIGINALARBEITEN

*Original Papers · Articles originaux*

BATSCHULET, E., und GRÜN, F.: Numerische Behandlung der Diffusionsgleichung mit Konvektionsterm . . . . .	113	(2)
BAUER, F. L.: Das Verfahren der abgekürzten Iteration für algebraische Eigenwertprobleme, insbesondere zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms . . . . .	17	(1)
DALCHER, A.: Einige unstetige stochastische Prozesse . . . . .	273	(4)
GIGER, A.: Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung . . . . .	121	(2)
HANIN, M., and REINER, M.: On Isotropic Tensor-Functions and the Measure of Deformation . . . . .	377	(5)
KESTIN, J., and PERSEN, L. N.: On the Error Function of a Complex Argument . . . . .	33	(1)
KEUNE, F., und OSWATITSCH, K.: Äquivalenzsatz, Ähnlichkeitssätze für schallnahe Geschwindigkeiten und Widerstand nicht angestellter Körper kleiner Spannweite . . . . .	40	(1)
KLINGENBERG, W.: Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in Gebieten mit stückweise rationalen Randkurven . . . . .	304	(4)
MORGAN, A. J. A.: Stress Distributions Within Solids Bounded by One or Two Cones . . . . .	130	(2)
OSTROWSKI, A.: Über Verfahren von Steffensen und Householder zur Konvergenzverbesserung von Iterationen . . . . .	218	(3)
PRAGER, W.: Thermal Stresses in Viscoelastic Structures . . . . .	230	(3)
RUBINOWICZ, A.: Über eine anschauliche Darstellung der Vorgänge bei der Fortpflanzung von unstetigen Signalen in Wellenleitern . . . . .	316	(4)
SCHWARZ, H.-R.: Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen . . . . .	473	(6)
SEIFERT, G.: On Stability Questions for Pendulum-Type Equations . . . . .	238	(3)
STADELMAIER, H. H.: Spannungsfeld einer auf den Rand einer Halbebene wirkenden Einzellast bei elastischer Anisotropie . . . . .	393	(5)
STERN, M.: The Rolling-Up of a Vortex Sheet . . . . .	326	(4)
SUPPGER, E. W., and TALEB, N. J.: Free Lateral Vibration of Beams of Variable Cross Section . . . . .	501	(6)
UCHIDA, SH.: The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe . . . . .	403	(5)
VODIČKA, V.: Geschichteter Kreiszyylinder im Felde periodischer Temperaturschwankungen . . . . .	422	(5)
WIELAND, W.: Die Wasserdampfkondensation an natürlichem Aerosol bei geringen Übersättigungen . . . . .	428	(5)
ZBORNIK, J.: Zur Auflösung linearer homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	64	(1)

## KURZE MITTEILUNGEN

*Brief Reports · Communications brèves*

	Seite Page	Nr. Issue
ANLIKER, M.: Biegeschwingungen verwundener, einseitig eingespannter und am andern Ende gelenkig gelagerter Stäbe . . . . .	248	(3)
ARAFÄ, A. A., SHAFIE, I. S., and SULTAN, F. S. A.: On a Thermistor-Pirani Gauge of High Sensitivity . . . . .	75	(1)
ARAFÄ, A. A., SHAFIE, I. S., and SULTAN, F. S. A.: Measurement of the Thermoelectric Power of Lead Sulphide . . . . .	256	(3)
BEUSCH, W., und MAEDER, D.: Ein kompaktes Dekadenzählgerät mit bedarfsweiser Umschaltung der Zählkanäle, Untersetzestufen und Zählwerke . . . . .	520	(6)
BLANC, CH.: Sur l'intégration approchée d'équations du type parabolique. . . . .	146	(2)
CONWAY, H. D.: The Indentation of a Transversely Isotropic Half-Space by a Rigid Punch . . . . .	80	(1)
CONWAY, H. D.: The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact . . . . .	460	(5)
FINSTON, M.: Free Convection Past a Vertical Plate . . . . .	527	(6)
GERHARZ, R.: Ein Elektronenvervielfacher als Pulslichterzeuger . . . . .	529	(6)
GREINACHER, H.: Über den Druck in Ultrazentrifugen . . . . .	152	(2)
HÄMMERLIN, G.: Zur Theorie der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten . . . . .	156	(2)
IBRAHIM, A. A. K., and KABIEL, A. M. I.: A Graphical Method for Determining the Coefficient of Viscosity of Newtonian Liquids Using an Oscillating Cylinder Viscometer. I. . . . .	343	(4)
PAHOR, S., und STRNAD, J.: Die Nusseltsche Zahl für laminare Strömung im zylindrischen Rohr mit konstanter Wandtemperatur . . . . .	536	(6)
RUTISHAUSER, H.: Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus . . . . .	164	(2)
SÄNGER, R.: Empfindlichkeit eisbildender Impfstoffe auf ihre Wasserlöslichkeit . . . . .	538	(6)
VODIČKA, V.: Longitudinal Vibrations of a Composite Bar . . . . .	345	(4)
WINTNER, A.: Über eine Abschätzung der Amplituden in freien Schwingungsproblemen veränderlicher Kreisfrequenz . . . . .	350	(4)
ZIEGLER, H.: Der symmetrische Kardankreisel unter einem Moment an der Achse des äusseren Rings . . . . .	253	(3)

## VARIA

*Miscellaneous · Divers*

Erratum (J. C. LILLO and G. SEIFERT). . . . .	170	(2)
Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 5. bis 6. Mai 1956 in Zofingen. Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik:		
BALDINGER, E., CZAJA, W., und NICOLET, M.: Über das Impulsverhalten von Flächentransistoren . . . . .	355	(4)
BAS, E. B., BERNHARD, E., und NIEDERHAUSER, M.: Über die Anwendung des elektrisch leitenden «Teledeltos»-Papiers für die Ausmessung von Potentialfeldern . . . . .	369	(4)
BUMILLER, F.: Untersuchung über Vakuumüberschläge an Beschleunigungsrohren . . . . .	366	(4)
DE COULON, G., MEIER, R., WINKLER, W., und ZÜNTI, W.: Gitterberechnungen für ( $D_2O - U_{nat}$ )-Systeme . . . . .	359	(4)
HINTERMANN, K.: Der thermische Ausgleichsvorgang in einem Medium mit internen Wärmequellen . . . . .	362	(4)
KNELLWOLF, T., und OESER, J.: Stabilisierter NF-Verstärker und phasensensitiver Detektor . . . . .	352	(4)
MAAG, H.: Knickung von Schraubenfedern unter Druck und konservativer Torsion . . . . .	369	(4)



	Seite Page	Nr. Issue
PORETTI, G., und WILDBOLZ, E.: Anwendung von kolloidalen radioaktiven Substanzen in der Medizin. Messtechnik . . . . .	370	(4)
SCHMID, P.: Gedanken zum heutigen Stand der Reaktortheorie . . . . .	358	(4)
SPRENGER, H.: Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss der Eintrittsgrenzschicht auf die Druckumsetzung in geraden und gekrümmten Diffusoren . . . . .	372	(4)
Tagungsanzeige: Conference on Nuclear Structure in Pittsburgh, June 6, 7, and 8 of 1957 . . . . .	265	(3)
Tagungsanzeige: Congrès international de cybernétique à Namur, du 26 au 29 juin 1956. . . . .	170	(2)
Tagungsanzeige: Congrès international sur les tubes électroniques pour hyperfréquences du 29 mai au 2 juin 1956 à Paris. . . . .	85	(1)
Tagungsanzeige: Frühjahrstagung der S. P. G. (Schweizerische Physikalische Gesellschaft) am 4./5. Mai 1957 in Brunnen . . . . .	541	(6)
Tagungsanzeige: 9. Internationaler Kongress für Angewandte Mechanik vom 7./13. September 1956 in Brüssel . . . . .	85	(1)
Tagungsanzeige: Jahrestagung der GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik) am 23./27. April 1957 in Hamburg. . . . .	265	(3)
Tagungsanzeige: Meeting of the Association for Computing Machinery, Los Angeles, August 27-29, 1956 . . . . .	170	(2)

## BUCHBESPRECHUNGEN

*Book Reviews · Notices bibliographiques*

ANDREW, E. R.: Nuclear Magnetic Resonance (Cambridge University Press 1955) (Ref. W. G. Proctor) . . . . .	544	(6)
Astronautica Acta. Zeitschrift (Springer-Verlag, Wien, Vol. I, 1955) (Ref. Zb. Plaskowski) . . . . .	468	(5)
BLASCHKE, W.: Analytische Geometrie (Birkhäuser-Verlag, Basel 1954) (Ref. M. Jeger) . . . . .	174	(2)
BLASCHKE, W.: Projektive Geometrie (Birkhäuser-Verlag, Basel 1954) (Ref. M. Jeger) . . . . .	268	(3)
BYRD, P. F., and FRIEDMAN, M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. E. Stiefel). . . . .	268	(3)
CAUER, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Akademie-Verlag, Berlin 1954) (Ref. H. Weber) . . . . .	265	(3)
CHESTNUT, H., and MAYER, R. W.: Servomechanisms and Regulating System Design, Bd. II (John Wiley & Sons, New York 1955) (Ref. H. Weber) . . . . .	542	(6)
DOBBRACK, G.: Höhere Mathematik, Teil V: Formelsammlung (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	172	(2)
FALKENHAGEN, H.: Elektrolyte (S. Hirzel Verlag, Leipzig 1953) (Ref. W. Baumgartner) . . . . .	466	(5)
FLÜGGE-LOTZ, I.: Discontinuous Automatic Control (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953) (Ref. H. Weber) . . . . .	86	(1)
FREUDENTHAL, A. M.: The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures (John Wiley & Sons, New York 1950) (Ref. F. Stüssi). . . . .	469	(5)
GARRETT, C. G. B.: Magnetic Cooling (Harvard University Press, John Wiley & Sons, New York 1954) (Ref. W. Baumgartner). . . . .	469	(5)
GNEDENKO, B. V., and KOLMOGOROV, A. N.: Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, Mass., 1954) (Ref. W. Saxer) . . . . .	376	(4)
GOLDSTEIN, J.: Die Messwandler, ihre Theorie und Praxis (Birkhäuser-Verlag, Basel 1952) (Ref. E. Gerecke) . . . . .	266	(3)
GÜNTHER, N.: Ernst Abbe (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1951) (Ref. R. Stettler) . . . . .	470	(5)
TER HAAR, D.: Elements of Statistical Mechanics (Rinehart & Co., New York 1954) (Ref. W. Pauli) . . . . .	467	(5)

	Seite Page	Nr. Issue
HARTMANN, H.: Theorie der chemischen Bindung auf quantentheoretischer Grundlage (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. H. Labhart) . . . . .	467	(5)
HAUFFE, K.: Reaktionen in und an festen Stoffen (Springer-Verlag, Berlin 1955) (Ref. W. Epprecht) . . . . .	543	(6)
HAUSNER, H. H., und ROBOFF, S. B.: Materials for Nuclear Power Reactors (Reinhold Publishing Corp., New York 1955) (Ref. W. Epprecht) . . . . .	542	(6)
L'HERMITE, R.: Résistance des Matériaux théorique et expérimentale, Tome I (Dunod, Paris 1954) (Ref. H. Favre) . . . . .	375	(4)
HETÉNYI, M. (Herausgeber): Handbook of Experimental Stress Analysis (John Wiley & Sons, New York 1950) (Ref. F. Stüssi) . . . . .	470	(5)
HIRVONEN, R. A.: Nutshell Tables of Mathematical Functions for Interpolation with Calculating Machines (Sonderdruck aus Bull. géodésique 30, 1953) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	269	(3)
HOEL, P. G.: Introduction to Mathematical Statistics (John Wiley & Sons, New York 1954) (Ref. W. Saxer) . . . . .	176	(2)
HUND, F.: Materie als Feld (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. W. Baumgartner) . . . . .	471	(5)
KLEMPERER, O.: Electron Optics (Cambridge University Press 1953) (Ref. A. A. Rusterholz) . . . . .	272	(3)
KOBER, H.: Dictionary of Conformal Representations (Dover Publications 1952) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	267	(3)
LANDSBERG, H. E. (Herausgeber): Advances in Geophysics, Bd. I (Academic Press Inc., New York 1952) (Ref. M. Weber) . . . . .	171	(2)
LEWIS, I. A. D., and WELLS, F. H.: Millimicrosecond Pulse Techniques (Pergamon Press Ltd., London 1954) (Ref. E. Baldinger) . . . . .	170	(2)
LÖSCH, F.: Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	267	(3)
MARTON, L. (Herausgeber): Advances in Electronics, Bd. 5 (Academic Press Inc., New York 1953) (Ref. A. A. Rusterholz) . . . . .	375	(4)
MEIXNER, J., und SCHÄFKE, F. W.: Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	175	(2)
MILNE, W. E.: Numerical Solution of Differential Equations (John Wiley & Sons, New York 1953) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	267	(3)
VON MISES, R., gewidmet von Freunden, Kollegen und Schülern: Studies in Mathematics and Mechanics (Academic Press Inc., New York 1954) (Ref. H. Ziegler) . . . . .	173	(2)
MURRAY, F. J., and MILLER, K. S.: Existence Theorems for Ordinary Differential Equations (New York University Press, New York 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	266	(3)
MUSKHELISHVILI, N. I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (P. Noordhoff Ltd., Groningen 1953) (Ref. H. Ziegler) . . . . .	88	(1)
OLLENDORFF, F.: Berechnung magnetischer Felder (Springer-Verlag, Wien 1952) (Ref. E. Gerecke) . . . . .	172	(2)
OPPELT, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge (Verlag Chemie, Weinheim 1954, 1956) (Ref. E. Gerecke) . . . . .	374	(4)
OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 3 (Birkhäuser-Verlag, Basel 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	176	(2)
OSWATITSCH, K.: Gasdynamik (Springer-Verlag, Wien 1952) (Ref. J. Ackeret) . . . . .	87	(1)
POLYA, G.: Mathematics and Plausible Reasoning (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	269	(3)
PRAGER, W.: Probleme der Plastizitätstheorie (Birkhäuser-Verlag, Basel 1955) (Ref. H. Ziegler) . . . . .	471	(5)
PRAGER, W., and Hodge, P. G., jr.: Theorie ideal plastischer Körper (Springer-Verlag, Wien 1954) (Ref. H. Ziegler) . . . . .	376	(4)
ROTHE, F. S.: An Introduction to Power System Analysis (John Wiley & Sons, New York 1953) (Ref. E. Gerecke) . . . . .	174	(2)



	Seite Page	Nr. Issue
SCHMEIDLER, W.: Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1954) (Ref. M. Plancherel) . . . . .	466	(5)
SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	472	(5)
SKUDRZYK, E.: Die Grundlagen der Akustik (Springer-Verlag, Wien 1954) (Ref. A. Lauber) . . . . .	465	(5)
STÜSSI, F.: Vorlesungen über Baustatik, Bd. 2 (Birkhäuser-Verlag, Basel 1954) (Ref. H. Favre) . . . . .	270	(3)
SZABO, I.: Einführung in die technische Mechanik (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. H. Maag) . . . . .	468	(5)
TERZAGHI, K.: Theoretische Bodenmechanik (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. J. Zeller) . . . . .	271	(3)
TROST, E.: Primzahlen (Birkhäuser-Verlag, Basel 1953) (Ref. M. Plancherel)	86	(1)
TRUESDELL, C.: The Kinematics of Vorticity (Indiana University Press, Bloomington 1954) (Ref. A. Mercier) . . . . .	541	(6)
VAND, V., and PEPINSKY, R.: The Statistical Approach to X-ray Structure Analysis (The Pennsylvania State University 1953) (Ref. W. Hoppe) . . .	270	(3)
VOGEL, TH.: Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique (Editions du Centre national de la recherche scientifique, Paris 1953) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	86	(1)
WASS, C. A. A.: An Introduction to Electronic Analogue Computers (Pergamon Press Ltd., London 1955) (Ref. A. P. Speiser) . . . . .	472	(5)

## AUTORENREGISTER

*Index of Authors - Table des auteurs*

Z = Zusammenfassende Berichte - Survey Articles - Comptes rendus  
 O = Originalarbeiten - Original Papers - Articles originaux  
 M = Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves  
 V = Varia - Miscellaneous - Divers  
 B = Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

**A**

ACKERET, J., B 87  
 ANLIKER, M., M 248  
 ARAFA, A. A., SHAFIE, I. S., and SULTAN,  
 F. S. A., M 75, 256

**B**

BALDINGER, E., B 170  
 BALDINGER, E., CZAJA, W., und NICOLET,  
 M., V 355  
 BAŞ, E. B., BERNHARD, E., und NIEDER-  
 HAUSER, M., V 369  
 BATSCHULET, E., und GRÜN, F., O 113  
 BAUER, F. L., O 17  
 BAUMGARTNER, W., B 466, 469, 471  
 BERNHARD, E., BAŞ, E. B., und NIEDER-  
 HAUSER, M., V 369  
 BEUSCH, W., und MAEDER, D., M 520  
 BLANC, CH., M 146  
 BUMILLER, F., V 366

**C**

CONWAY, H. D., M 80, 460  
 DE COULON, G., MEIER, R., WINKLER, W.,  
 und ZÜNTI, W., V 359  
 CZAJA, W., BALDINGER, E., und NICOLET,  
 M., V 355

**D**

DALCHER, A., O 273

**E**

EPPRECHT, W., B 542, 543

**F**

FAVRE, H., B 270, 375  
 FINSTON, M., M 527

**G**

GERECKE, E., B 172, 174, 266, 374  
 GERHARZ, R., M 529  
 GIGER, A., O 121  
 GREINACHER, H., M 152  
 GRÜN, F., und BATSCHULET, E., O 113

**H**

HÄMMERLIN, G., M 156  
 HANIN, M., and REINER, M., O 377  
 HERSCH, J., PFLUGER, A., und SCHOPF, A.,  
 Z 89  
 HINTERMANN, K., V 362  
 HOPPE, W., B 270

**I**

IBRAHIM, A. A. K., and KABIEL, A. M. I.,  
 M 343

**J**

JEGER, M., B 174, 268

**K**

KESTIN, J., and PERSEN, L. N., O 33  
 KEUNE, F., und OSWATITSCH, K., O 40  
 KLINGENBERG, W., O 304  
 KNELLWOLF, T., und OESER, J., V 352

**L**

LABHART, H., B 467  
 LAUBER, A., B 465  
 LILLO, J. C., and SEIFERT, G., V 170

**M**

MAAG, H., V 369, B 468  
 MAEDER, D., und BEÜSCH, W., M 520  
 MAEDER, P. F., and WOOD, A. D., Z 177  
 MEIER, R., DE COULON, G., WINKLER, W.,  
 und ZÜNTI, W., V 359  
 MERCIER, A., B 541  
 MORGAN, A. J. A., O 130

**N**

NICOLET, M., BALDINGER, E., und CZAJA,  
 W., V 355  
 NIEDERHAUSER, M., BAŞ, E. B., und  
 BERNHARD, E., V 369

**O**

OESER, J., und KNELLWOLF, T., V 352  
 OSTROWSKI, A., O 218  
 OSWATITSCH, K., und KEUNE, F., O 40

**P**

PAHOR, S., und STRNAD, J., M 536  
 PAULI, W., B 467  
 PERSEN, L. N., and KESTIN, J., O 33  
 PFLUGER, A., HERSCH, J., und SCHOPF, A.,  
 Z 89  
 PLANCHEREL, M., B 86, 466  
 PLASKOWSKI, ZB., B 468  
 PORETTI, G., und WILDBOLZ, E., V 370  
 PRAGER, W., O 230  
 PROCTOR, W. G., B 544

**R**

REINER, M., and HANIN, M., O 377  
 ROTH-DESMEULES, E., B 172, 175, 176,  
 266, 269, 472

RUBINOWICZ, A., O 316  
 RUSTERHOLZ, A. A., B 272, 375  
 RUTISHAUSER, H., M 164, B 86, 267, 269

**S**

SÄNGER, R., Z 213, M 538  
 SAXER, W., B 176, 376  
 SCHMID, P., V 358  
 SCHOFF, A., HERSCH, J., und PFLUGER, A.,  
 Z 89  
 SCHWARZ, H.-R., O 473  
 SEIFERT, G., O 238  
 SEIFERT, G., and LILLO, J. C., V 170  
 SHAFIE, I. S., ARAFA, A. A., and SULTAN,  
 F. S. A., M 75, 256  
 SPEISER, A. P., Z 1, B 472  
 SPRENGER, H., V 372  
 STADELMAIER, H. H., O 393  
 STERN, M., O 326  
 STETTLER, R., B 470  
 STIEFEL, E., B 267, 267, 268  
 STRNAD, J., und PAHOR, S., M 536  
 STÜSSI, F., B 169, 470  
 SULTAN, F. S. A., ARAFA, A. A., and  
 SHAFIE, I. S., M 75, 256  
 SUPPIGER, E. W., and TALEB, N. J., O 501

**T**

TALEB, N. J., and SUPPIGER, E. W., O 501

**U**

UCHIDA, SH., O 403

**V**

VODIČKA, V., O 422, M 345

**W**

WEBER, H., B 86, 265, 542  
 WEBER, M., B 171  
 WIELAND, W., O 428  
 WILDBOLZ, E., und PORETTI, G., V 370  
 WINKLER, W., DE COULON, G., MEIER, R.,  
 und ZÜNTI, W., V 359  
 WINTNER, A., M 350  
 WOOD, A. D., and MAEDER, P. F., Z 177

**Z**

ZBORNIK, J., O 64  
 ZELLER, J., B 271  
 ZIEGLER, H., M 253, B 88, 173, 376, 471  
 ZÜNTI, W., DE COULON, G., MEIER, R., und  
 WINKLER, W., V 359

Fasc. 1 (25. 1. 1956)	pag. 1–88
Fasc. 2 (25. 3. 1956)	pag. 89–176
Fasc. 3 (25. 5. 1956)	pag. 177–272
Fasc. 4 (25. 7. 1956)	pag. 273–376
Fasc. 5 (25. 9. 1956)	pag. 377–472
Fasc. 6 (25. 11. 1956)	pag. 473–544



# Koordinatensysteme in Feuerleitgeräten

VON AMBROS P. SPEISER, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt Feuerleitgeräte für die terrestrische Flugzeugabwehr. Das Hauptproblem bei diesen Geräten ist bekanntlich die Extrapolation, das heisst die Aufgabe, den Standort des Ziels auf längere Zeiten (zum Beispiel 20 s) vorauszuberechnen. Im Folgenden wird die Wahl geeigneter Koordinatensysteme für die verschiedenen Teile eines Feuerleitgerätes behandelt. Es sind nur die wichtigeren Schritte des ganzen Rechenprozesses berücksichtigt. Ferner wird nur die lineare, nicht aber die kurvenförmige Extrapolation behandelt.

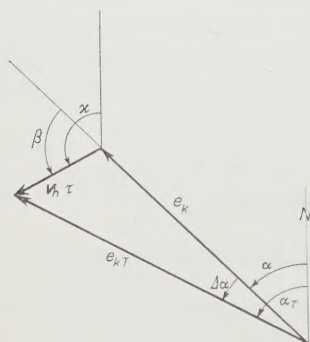
## 2. Verwendete Bezeichnungen

(*Vektoren* sind durch fette Buchstaben gekennzeichnet.)

$M$	Messpunkt	
$x$	Kartesische Messpunktkoordinaten	} des Messpunktes
$y$		
$h$		
$\alpha$	Seite	
$e$	Entfernung	
$e_k$	Karten-(Horizontal-)Entfernung	
$\mathbf{M}$	Ortsvektor	
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor	
$\mathbf{v}_h$	Horizontalgeschwindigkeit	
$\mathbf{v}^*$	Geglättete Geschwindigkeit	
$\kappa$	Kurswinkel	
$\beta$	Flugrichtung	
$T$	Treffpunkt	
$x_T$	Kartesische Treffpunktkoordinaten	
$y_T$		
$h_T$		

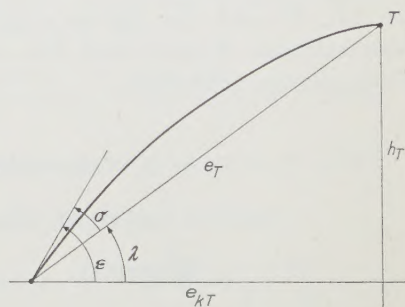
<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

$\alpha_T$	Seite	} des Treffpunktes
$\lambda_T$	Lagewinkel	
$e_T$	Entfernung	
$e_{kT}$	Karten-(Horizontal-) Entfernung	
$\mathbf{T}$	Ortsvektor	
$\varepsilon$	Elevation	
$\sigma$	Schusswinkel	
$\tau$	Flugzeit	
$\vartheta$	Tempierung	
$v_0$	Geschossanfangsgeschwindigkeit	
$\delta$	Luftgewicht	
$k$	Ladeverzug	
$\mathbf{P}$	Parallaxvektor	
$L$	Linearer Differentialoperator	



Figur 1

Erläuterung der Bezeichnungen: Horizontalprojektion des Vorhaltdreieckes.



Figur 2

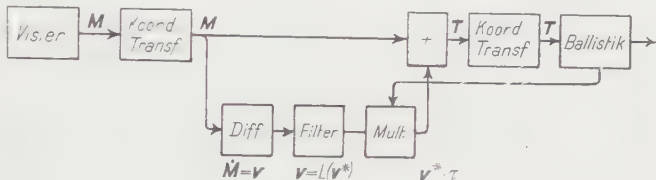
Erläuterung der Bezeichnungen: Visierstrahl und Flugbahn in der Schussebene.

Die Figuren 1 und 2 dienen zur Erläuterung einzelner dieser Bezeichnungen.

### 3. Die Elemente eines Feuerleitgerätes

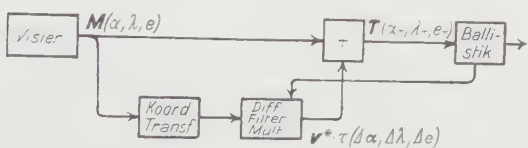
Bei der Wahl von geeigneten Koordinatensystemen kann der Konstrukteur nicht jede mathematische Operation für sich getrennt behandeln, sondern er muss das Feuerleitgerät als ganzes betrachten und muss darnach streben, zwischen Materialaufwand einerseits und erreichter Genauigkeit andererseits ein möglichst günstiges Verhältnis zu erzielen. Es ist von folgenden Randbedingungen auszugehen: Das Visier (gleichgültig, ob es sich um ein optisches Visier oder um Radar handelt) soll in Azimutalkoordinaten  $\alpha, \lambda, e$  arbeiten; dem Geschütz müssen (abgesehen von Ausnahmefällen) die Koordinaten  $\alpha_T, \varepsilon$  sowie die Tempierung  $\vartheta$  zugeführt werden. Der Grund, warum zwischen

diesen beiden Koordinatengruppen überhaupt eine Transformation nötig ist, liegt darin, dass der Messpunktvektor und der Vorhaltevektor addiert werden müssen. Bekanntlich ist die Addition zweier Vektoren nur in kartesischen Koordinaten komponentenweise möglich. Es muss also entweder eine Transformation in kartesische Koordinaten vorgenommen werden, oder es müssen die wesentlich komplizierteren Additionstorneln für Vektoren in krummlinigen Systemen zur Verwendung gelangen [1]<sup>2)</sup>.



Figur 3

Blockschema der Elemente eines Feuerleitgerätes (ohne Korrekturteil).



Figur 4

Variante von Figur 3: Die Koordinatentransformatoren befinden sich nur im Geschwindigkeitszweig

Figur 3 veranschaulicht den prinzipiellen Aufbau eines Feuerleitgerätes. Für jede Funktion ist ein gesonderter Block gezeichnet. Die in der Praxis verwendeten technischen Lösungen gestatten oft die Zusammenfassung von zwei oder mehreren der aufgeführten Funktionen in einem einzigen Apparat. Für die rechnerische Behandlung ist aber festzuhalten, dass jeder Block einen gesonderten mathematischen Prozess darstellt.

Das Visier liefert den Messpunktvektor  $M$ . Dieser wird einer Koordinatentransformation unterzogen und anschliessend differenziert, indem das zeitliche Differential gleich dem Geschwindigkeitsvektor  $v$  ist. Dieser Geschwindigkeitsvektor wird geglättet, damit kleine Störungen sich nicht bemerkbar machen, und im Multiplikator mit der Geschossflugzeit  $\tau$  multipliziert. Als Resultat entsteht der Vorhaltevektor. Nach folgender Addition entsteht alsdann der Treffpunktvektor  $T$ :

$$T = M + v^* \tau.$$

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 16.

Eine neue Koordinatentransformation führt den entstandenen Vektor in eine Form über, die zur Verarbeitung im ballistischen Auswerter geeignet ist. Der ballistische Auswerter liefert die Geschützkoordinaten.

#### 4. Glättung der Geschwindigkeit

Bevor wir die Koordinatensysteme betrachten, in denen der Geschwindigkeitsvektor dargestellt wird, muss das Prinzip der Glättung erläutert werden, da Bildung und Glättung von  $\mathbf{v}$  eng miteinander zusammenhängen. Die Glättung verfolgt den Zweck, so weit als möglich das im Messpunktvektor enthaltene Störsignal vom Nutzsignal zu trennen. Das Störsignal rührt von ungenauer Arbeit des Visiers (eventuell des Richtpersonals) und der nachfolgenden Rechenelemente her. Nun ist das Problem der Trennung von Nutz- und Störsignal ausführlich behandelt worden [2], unter der Voraussetzung, dass man sich auf die Verwendung von linearen Differentialoperatoren, dargestellt zum Beispiel durch lineare elektrische Filter, beschränkt. Nach dieser Theorie müssen sowohl vom Nutz- als auch vom Störsignal diejenigen statistischen Eigenschaften bekannt sein, welche in den *Korrelationsfunktionen* enthalten sind. Daraus wird ersichtlich, dass die Arbeit eines Feuerleitgerätes als statischer Prozess aufzufassen ist, worauf weiter unten eingegangen werden soll. Die statistischen Eigenschaften des Störsignals, insoweit sie durch die Korrelationsfunktion gekennzeichnet sind, können als zeitlich konstant betrachtet werden, da die Entstehung der Störungen immer auf die gleiche Ursache zurückzuführen ist. Dagegen ist die Korrelationsfunktion des Nutzsignales, das heisst des Messpunktvektors, weiten Schwankungen unterworfen. Ihre Beschaffenheit hängt ab von der Art des zu bekämpfenden Zieles, von dessen Geschwindigkeit, von der momentanen taktischen Lage, ferner vom Verhalten des Feuerleitenden, indem es nicht auf dasselbe herauskommt, ob ein Ziel im Verlaufe eines Vorbeifluges während kürzerer oder während längerer Zeit bekämpft wird. Da nun die Eigenschaften des optimalen Filters von den Korrelationsfunktionen abhängen, ist es auf keinen Fall angängig, in einem Feuerleitgerät diese Eigenschaften in Form von unveränderlichen Konstanten einzubauen.

Das heute vorwiegend verwendete Filter bildet die geglättete Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^*$  nach folgender Formel:

$$\mathbf{v} = L(\mathbf{v}^*) . \quad (1)$$

$L$  kennzeichnet hier einen linearen Differentialoperator. Am häufigsten setzt man:

$$L = 1 + T_0 \frac{d}{dt} . \quad (2)$$

Dieser Operator bewirkt, dass  $\mathbf{v}^*$  sich zusammensetzt aus dem momentanen Wert von  $\mathbf{v}$  sowie aus gewogenen Anteilen der Geschwindigkeiten aller ver-



gangenen Zeiten, wobei die Gewichte um so kleiner werden, je weiter der betreffende Wert zurückliegt. Die Zeitkonstante  $T_0$  ist ein Mass dafür, wie weit in die Vergangenheit zurückgegriffen wird. Es bedeutet einen wesentlichen Vorteil für ein Feuerleitgerät, wenn die Grösse von  $T_0$  durch den Feuerleitenden eingestellt werden kann. Die Ansichten über die beste Grösse von  $T_0$  für verschiedene Verhältnisse gehen sehr stark auseinander, und es werden Werte von 0,5 s bis 30 s vertreten. Die Beurteilung dieser Auffassungen erfordert eine eingehende Untersuchung der verschiedenen damit zusammenhängenden Vorgänge, doch kann allgemein gesagt werden, dass bei schnell bewegten Zielen und gut arbeitendem Visier kleine Zeitkonstanten zu wählen sind, während bei langsam bewegten Zielen, die eventuell noch Ausweichmanöver durchführen, bei unregelmässig arbeitendem Visier und schliesslich bei kurzzeitigem Verschwinden des Zieles, etwa hinter Wolken, grössere Zeitkonstanten die besten Resultate ergeben.

Die in 2. dargelegte Theorie gestattet selbstverständlich auch die Behandlung komplizierterer Operatoren als des durch (2) beschriebenen, jedoch ist sie auf lineare Operatoren beschränkt. Es ist aber nicht daran zu zweifeln, dass beste Resultate an Feuerleitgeräten nur mit nichtlinearen Filtern erreicht werden können. Daher ist es unwahrscheinlich, dass mit den heute verfügbaren mathematischen Methoden auf wissenschaftlicher Grundlage ein wirklich optimales Filter gefunden werden kann. Man ist vielmehr auf Lösungen angewiesen, deren Wirksamkeit empirisch überprüft wird. Eine Annäherung an ein Filter von sehr allgemeiner Natur wird schon seit langer Zeit in vielen Feuerleitgeräten für gewisse Komponenten von  $\mathbf{v}$  verwendet, nämlich das *Nachstellen eines Folgezeigers durch einen Bedienungsmann*. Dieser Bedienungsmann kann für seine spezielle Aufgabe geschult werden und kann ausserdem von Fall zu Fall durch den Feuerleitenden über Art des zu bekämpfenden Zieles sowie die taktische Lage und deren mutmassliche Entwicklung orientiert werden und entspricht daher einem nichtlinearen Filter mit zeitlich veränderlichen Eigenschaften, dessen Vollkommenheit durch eine maschinelle Vorrichtung wohl nur schwer zu erreichen ist.

Die Verwirklichung eines manuellen oder automatischen Filters stösst auf gewisse praktische Schwierigkeiten, da die anzuwendenden Operatoren in der Regel nur für skalare Grössen, nicht aber für Vektoren dargestellt werden können. Man muss daher auch für  $\mathbf{v}$  ein Koordinatensystem wählen. Hier ist es nun ein grosser Vorteil, wenn ein System gefunden werden kann, in welchem die Komponenten von  $\mathbf{v}$  bei geradlinigem Flug mit konstanter Geschwindigkeit konstant sind. Dies kann wie folgt begründet werden. Durch Anwendung des Differentialoperators  $L$  soll ein Signal, welches von keinerlei Störungen behaftet ist, nicht verändert werden. Dies rührt von der elementaren Forderung her, die an ein Filter dieser Art gestellt werden kann, dass gute Signale nicht verschlechtert werden dürfen. Nun lassen lineare Differentialoperatoren, insoweit sie

hier überhaupt in Betracht kommen, ein Signal nur dann unverändert, wenn es gleich einer Konstanten ist. Daraus resultiert die Bedingung für  $\mathbf{v}$ , dass die Darstellung in einem raumfesten Koordinatensystem erfolgen muss. Bewegte Systeme ergeben variable Komponenten, und die Anwendung eines Filters auf solche Komponenten würde einer Verschlechterung von guten Signalen gleichkommen. Dementsprechend besitzen Geräte, welche  $\mathbf{v}$  in ortsfesten Koordinaten darstellen, einen wesentlichen Vorsprung.

Die statistische Theorie in [2] beschränkt sich übrigens in ihrer Anwendung nicht auf die Glättung von  $\mathbf{v}$ . Vielmehr ist es möglich, als Aufgabe für das Filter die direkte Bildung von  $\mathbf{T}$  aus  $\mathbf{M}$  zu formulieren, so dass ein einziger Apparat gleichzeitig eine Extrapolation und eine Glättung ausführt. Wegen der erwähnten Beschränkung auf lineare und zeitlich unabhängige Vorrichtungen ist es aber unwahrscheinlich, dass das Problem in dieser allgemeinen Form eine brauchbare Lösung findet.

## 5. Bildung der Geschwindigkeit

### a) Transformation des Messpunktvektors in kartesische Koordinaten

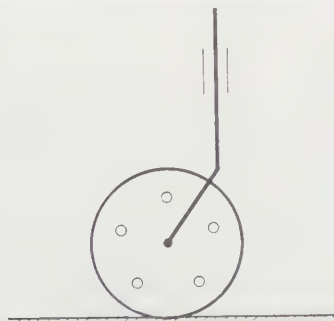
Die mathematisch einfachste Lösung für die Bildung von  $\mathbf{v}$  ist eine Transformation des Messpunktvektors  $\mathbf{M}$  in kartesische Koordinaten  $x, y, h$ . Durch Differentiation jeder einzelnen Komponente entsteht sofort  $\mathbf{v}$ .

Diese Differentiation wird häufig mit Reibradgetrieben durchgeführt. Reibradgetriebe sind an sich integrierende Rechengeräte, werden aber durch eine Art Gegenkopplungsschaltung als Differentiatoren verwendet. Sie bilden dann nicht das exakte Differential, sondern eine Funktion, die sich vom Differential gerade durch den Operator (2) unterscheidet. Sie stellen also Differentiatoren und Filter zugleich dar. Im allgemeinen lässt sich aber  $T_0$  hier nicht verändern, so dass der Wert dieser Filterung stark herabgemindert ist. Andere Geräte bilden den Differentialquotienten in der Weise, dass sie die mittlere Geschwindigkeit über ein Zeitintervall von zum Beispiel 2 s verwenden. Dies geschieht mit mechanischen Anordnungen, welche als Stop-Tachometer bezeichnet werden. Die entstehende Funktion entspricht der Anwendung eines zeitabhängigen Differentialoperators, der eine gewisse Ähnlichkeit mit (2) besitzt, wobei  $T_0$  ungefähr dem Messintervall entspricht. Die so entstehenden Geschwindigkeiten haben aber den Nachteil, dass sie sich sprungweise ändern.

### b) Geometrische Abbildung des Geschwindigkeitsvektors

Nachfolgend wird die Darstellung von  $\mathbf{v}$  in raumfesten Zylinderkoordinaten mit den Komponenten  $v_h, \alpha, v_r = \dot{h}$  beschrieben (für die Erklärung des Kurswinkels  $\alpha$  siehe Figur 1). Die drei Komponenten werden auf ganz verschiedene

Art gebildet. Zur Ermittlung der Horizontalgeschwindigkeit  $v_h$  dient eine Schlepprolle gemäss Figur 5. Diese wird nach Massgabe der Horizontalprojektion des Flugweges über eine raumfeste Platte geführt. Durch die Eigenschaften der Schlepprolle stellt sich an ihrer vertikalen Achse der Kurswinkel  $\alpha$  ein, und zwar wiederum nicht exakt, sondern unter Berücksichtigung eines Operators ähnlich demjenigen in (2), wobei jedoch  $T_0$  vom Betrag der Horizontalgeschwindigkeit abhängt. Dieser Betrag ist durch die Umdrehungsgeschwindigkeit der Rolle dargestellt und wird dadurch gemessen, dass das Gerät die Zeit zwischen der Schliessung zweier aufeinanderfolgender Kontakte, die entlang dem Umfang



Figur 5

Schlepprolle, drehbar um eine horizontale und eine vertikale Achse. Die fünf angedeuteten Kontakte dienen zur Messung der Geschwindigkeit.

der Rolle angebracht sind, ausgewertet. Das Verfahren ist ähnlich einem Stop-Tachometer, jedoch mit konstanter Wegstrecke, nicht mit konstanten Zeitintervallen. Das ermittelte  $v_h$  wird sich also sprunghaft ändern, und hier kann nun das Nachstellen eines Folgezeigers durch einen Bedienungsmann eingeschaltet werden, was den im letzten Abschnitt geschilderten grossen Vorteil bringt.

Es sei noch erwähnt, dass man gelegentlich als Unterlage für die Schlepprolle an Stelle einer Platte eine Kugel wählt. Die vertikale Achse der Schlepprolle ist dann ortsfest, und die Kugel wird mit Hilfe angepresster Reibräder nach Massgabe des Flugweges rotiert. Diese Anordnung beansprucht bedeutend weniger Platz.

Die noch fehlende Komponente  $v_h \cdot \hat{h}$  kann auf irgendeine der im Abschnitt 5a beschriebenen Arten ermittelt werden.

### c) Bildung von $\mathbf{v}$ in rechtwinkligen bewegten Koordinaten

Als Koordinatensystem für  $\mathbf{v}$  kann ein rechtwinkliges bewegtes System gewählt werden, dessen eine Achse mit der Visierlinie oder mit deren Horizon-

talprojektion zusammenfällt, während die zweite Achse horizontal liegt. Dem entsprechend steht die dritte Achse senkrecht zur Visierlinie bzw. vertikal. Die Bildung der Komponenten von  $\mathbf{v}$  erfolgt aus den Koordinaten  $\alpha, \lambda, e$  des Messpunktes sowie aus deren zeitlichen Ableitungen. Dieser Vorgang ist einfach durchzuführen, besonders deshalb, da die zeitlichen Differentiale der Visierwerte ohnehin verfügbar sind, falls mit einer Weg-Geschwindigkeits-Steuerung gearbeitet wird. Eine solche Steuerung liefert die zeitlichen Ableitungen mit guter Genauigkeit und mit einem Minimum an Störungen. Diesem bedeutenden Vorteil steht der Nachteil gegenüber, dass die Komponenten der Geschwindigkeit auch bei geradlinigem Flug nicht konstant sind. Dies verschlechtert die Wirkung der Glättung, wie im Abschnitt 4 dargelegt wurde.

d) *Transformation des Geschwindigkeitsvektors in ortsfeste kartesische Koordinaten*

Ein weiteres Verfahren der Darstellung von  $\mathbf{v}$  besteht darin, diesen Vektor zunächst in einem bewegten rechtwinkligen Koordinatensystem durch Bildung der Komponenten  $\dot{e}, e \dot{\alpha} \cos \lambda, e \dot{\lambda}$  zu erzeugen. Alsdann wird der entstandene Vektor in raumfeste rechtwinklige Koordinaten  $x, y, z$  transformiert und erst jetzt geglättet. Dieses Verfahren erfordert etwas mehr Rechenmittel als die bisher genannten, aber es vereinigt im übrigen die Vorteile von 4a und 4c, ohne deren Nachteile aufzuweisen: Die Differentiation kann unmittelbar an den Visierwerten vorgenommen werden, und die Glättung von  $\mathbf{v}$  erfolgt in einem raumfesten System. Bezüglich der erreichbaren Genauigkeit ist dieses Verfahren als das beste zu bezeichnen.

e) *Andere Darstellungen von  $\mathbf{v}$*

Viele Geräte verzichten darauf, die Geschwindigkeit in einem eigentlichen Koordinatensystem darzustellen, und bilden lediglich aus den Visierwerten die Ableitungen  $\dot{\alpha}, \dot{\lambda}, \dot{e}$ . Die Addition zum Messpunktvektor erfolgt dann mit Hilfe verschiedener zum Teil approximativer Verfahren, die im nächsten Abschnitt geschildert werden. Solche Lösungen ermöglichen in den meisten Fällen eine bedeutsame Materialersparnis, sind aber im Sinne der Glättung ungünstig.

## 6. Addition $\mathbf{M} + \mathbf{v} \tau$

Die Multiplikation des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  mit der Flugzeit  $\tau$  ergibt den Vorhaltevektor. Dieser Prozess wird mit normalen Rechelementen verwirklicht. Er bildet für das Studium der Koordinatensysteme nichts Interessantes und wird daher hier nicht beschrieben. Der entstehende Treffpunktvektor muss in ein Koordinatensystem transformiert werden, welches für die Bildung der ballistischen Funktionen geeignet ist (vgl. Figur 3). Meistens sind



dies Zylinderkoordinaten  $(x_T, e_{kT}, h_T)$  oder Kugelkoordinaten  $(x_T, \lambda_T, e_T)$ . Nun überstreichen die Komponenten von  $\mathbf{M}$  und von  $\mathbf{T}$  einen sehr grossen Bereich. Im Beispiel einer 7,5-cm-Batterie liegen die kartesischen Messpunktkoordinaten  $x$  und  $y$  etwa im Bereich von  $-15$  km und  $h$  zwischen 0 und 8 km. Dies stellt an die Präzision der Koordinatentransformatoren grosse Anforderungen, und bei gegebenen relativen Fehlern der Rechenelemente verursacht eine solche Transformation einen Genauigkeitsverlust für das ganze Gerät. Es ist wesentlich besser, wenn gemäss Figur 4 der Messpunktvektor zwischen Visier und Ballistik ohne Transformation übertragen wird. Die Überführung von  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{T}$  erfolgt durch Addition der Differenzen  $\Delta x, \Delta \lambda, \Delta e$ ; diese Addition wird mit Hilfe von Differentialgetrieben ausgeführt und verursacht im Gegensatz zu allen andern Rechenoperationen keinen Genauigkeitsverlust, da in solchen Getrieben der ganze Bereich durch beliebig viele Umdrehungen dargestellt werden kann. Die durch die übrigen Rechenelemente verursachten relativen Fehler sind nur noch in  $\Delta x, \Delta \lambda, \Delta e$  enthalten und daher wesentlich kleiner als in Figur 3.

Nicht in allen Geräten verwendet man die vorteilhafte Anordnung von Figur 4; es gibt auch Zwischenlösungen, welche von den drei Visierkoordinaten nur  $x$  direkt zur Ballistik weiterleiten, die übrigen jedoch transformieren.

#### a) Addition in kartesischen Koordinaten

Wenn sowohl Messpunktvektor als auch Geschwindigkeitsvektor in ortsfesten kartesischen Koordinaten gegeben sind, so erfolgt die Bildung von  $\mathbf{T}$  in einfachster Weise nach folgenden Gleichungen:

$$x_T = x + v_x \tau, \quad y_T = y + v_y \tau, \quad h_T = h + v_h \tau.$$

Dieses Verfahren ist übersichtlich und erfordert wenig Rechenelemente, bringt aber den oben dargelegten bedeutenden Genauigkeitsverlust mit sich und wird daher heute kaum mehr verwendet.

#### b) Gemischte Addition

Häufig werden die aus dem Visier kommenden Messpunktkoordinaten  $x, \lambda, e$  in Zylinderkoordinaten  $(x, e_k, h)$  transformiert. Diese Transformation betrifft nur  $\lambda$  und  $e$ , während  $x$  unverändert bleibt. Zu diesen Koordinaten werden die aus der Geschwindigkeit gewonnenen Differenzen  $\Delta x, \Delta e_k, \Delta h$  addiert. Dies stellt eine Zwischenlösung zwischen Figur 3 und 4 dar. Genauigkeitsmässig ist das gewonnene Resultat besser als in Figur 3, da  $e_k$  und  $h$  einen kleineren Bereich überstreichen als  $x, y, h$ . Der verbleibende Fehler ist aber immer noch erheblich grösser als im Verfahren nach Figur 4. – Für die Bildung der drei Differenzen werden drei verschiedene Verfahren verwendet, wobei der Ge-

schwindigkeitsvektor gemäss Abschnitt 5b gewonnen wird. Für  $\Delta x$  und  $\Delta e_k$  wird im Gerät eine geometrische Abbildung gemäss Figur 1 ausgeführt. Aus dem dargestellten Dreieck wird  $\Delta x$  direkt abgenommen und durch ein Differentialgetriebe zu  $\alpha$  addiert.  $\Delta e_k$  erscheint als  $e_{kT} - e_k$  und wird meist mit Hilfe eines Stahlbandes gebildet.  $\Delta h$  entsteht in der Form  $v_r \tau$  und wird in geeigneter Weise zu  $h$  addiert. Es ist ersichtlich, dass dieses Verfahren nur in bezug auf  $\alpha$  den Vorteil der erhöhten Genauigkeit aufweist.

#### c) Addition gemäss Figur 4

Falls  $\mathbf{v}$  entsprechend Abschnitt 5c in einem bewegten kartesischen System vorliegt, so können daraus mit Hilfe einfacher Operationen die Werte  $\Delta x$ ,  $\Delta \lambda$ ,  $\Delta e$  gebildet und zu den Messpunktkoordinaten addiert werden. Dadurch sind alle Möglichkeiten zur Reduktion des Einflusses, den der relative Fehler der Rechenelemente verursacht, ausgenützt. Wird im Interesse einer einwandfreien Glättung der Geschwindigkeitsvektor nach Abschnitt 5d in einem raumfesten kartesischen System gebildet, so können aus den Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_h$  ebenfalls die Differenzen  $\Delta x$ ,  $\Delta \lambda$ ,  $\Delta e$  dargestellt werden, immerhin mit einem erheblich vergrösserten Rechenaufwand. Dieses System vereinigt als einziges die Vorzüge, die durch die Anordnung von Figur 4 gegeben sind, mit denjenigen der konstanten Geschwindigkeitskomponenten.

#### d) Direkte Bildung von $\Delta x$ , $\Delta \lambda$ , $\Delta e$

Durch geeignete trigonometrische Formeln lassen sich die Differenzen  $\Delta x$ ,  $\Delta \lambda$ ,  $\Delta e$  direkt aus den Visierkoordinaten  $x$ ,  $\lambda$ ,  $e$  und ihren zeitlichen Ableitungen bilden. Dieses Verfahren ist allgemein recht günstig. Immerhin ist zu beachten, dass  $\mathbf{v}$  als Vektor überhaupt nicht in Erscheinung tritt. Die Tatsache, dass diese Grösse durch den Feuerleitenden nicht abgelesen werden kann, ist als bedeutender Nachteil zu betrachten. Damit sind natürlich auch die weiter oben geschilderten Einschränkungen bezüglich der Glättung verbunden.

#### e) Taylor-Entwicklungen

Oftmals besteht der Wunsch nach einem Feuerleitgerät, das mit einem minimalen Aufwand an Rechenelementen brauchbare Resultate liefert. Hier greift man oft zur Taylor-Entwicklung und stellt die Differenzen wie folgt dar:

$$\Delta x = \dot{x} \tau + R_1, \quad \Delta \lambda = \dot{\lambda} \tau + R_2, \quad \Delta e = \dot{e} \tau + R_3.$$

$R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  sind die Restglieder. Ihr Anteil an der gesamten Summe wird dann besonders gross, wenn die Visierwerte eine hohe zweite Ableitung besitzen, was in der Umgebung des Wechsellpunktes der Fall ist. Die approximative

Darstellung dieser Restglieder durch möglichst einfache trigonometrische Formeln, welche nur die Visierwerte und ihre ersten Ableitungen enthalten, bildet für den Mathematiker eine dankbare Aufgabe, und es sind zahlreiche verschiedene Systeme aufgestellt worden, deren Genialität zum Teil bewundert werden muss. Alle diese Systeme geben nur angenäherte Werte, deren Fehler aber, mit Ausnahme extremer Fälle, gegenüber der ballistischen Streuung in den Hintergrund treten.

Es ist auch versucht worden, die Restglieder durch Zufügen einer zweiten und dritten Ableitung darzustellen, also zum Beispiel

$$\Delta\alpha = \dot{\alpha}\tau + \ddot{\alpha}\frac{\tau^2}{2!} + \dddot{\alpha}\frac{\tau^3}{3!}.$$

Diese Methode scheitert aber daran, dass bei mehr als einmaliger Differentiation der Visierwerte die immer vorhandenen Störungen unzulässig verstärkt werden. Dies fällt bei grossen Flugzeiten um so mehr ins Gewicht, als die höheren Ableitungen noch mit höheren Potenzen der Flugzeit zu multiplizieren sind. Eine für Kleinkaliberwaffen allenfalls noch gangbare Darstellung ist die folgende:

$$\Delta\alpha = \dot{\alpha}\tau + \ddot{\alpha}\tau c$$

(Das Restglied enthält die erste Potenz der Flugzeit und nicht die zweite, wie es für die Taylor-Entwicklung richtig wäre). Durch geeignete Wahl der Konstanten  $c$  können die Fehler, welche ohne Restglied im Wechsellpunkt auftreten würden, erheblich vermindert werden.

#### f) Richtgerätesteuerung

Allgemein ist zu sagen, dass die vollständige Taylor-Entwicklung nicht die erstrebenswerte Arbeitsweise für ein Feuerleitgerät darstellt, selbst wenn man von Störungen absieht. Der Satz, dass eine Funktion vollständig bestimmt ist, wenn an einem einzigen Punkt Funktionswert und alle Ableitungen gegeben sind, gilt nur für analytische Funktionen, zu denen jedenfalls der Weg eines Flugzeuges nicht gehört. Um über den zukünftigen Flugweg möglichst genaue Angaben zu erhalten, ist es vielmehr nötig, möglichst weit in die Vergangenheit zurückgreifend die Vorgeschichte zu erfassen. Diese führt zu einer Integraldarstellung des Flugweges und damit zu Geräten, die vom geschilderten Aufbau erheblich abweichen.

### 7. Darstellung der Ballistik

Dem Geschütz müssen die drei Werte  $\alpha_I$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau$  zugeführt werden. Der Treffpunkt  $T$  muss daher zunächst in Zylinderkoordinaten  $(\alpha_I, e_{kI}, h_I)$  oder Kugelkoordinaten  $(\alpha_T, \lambda_T, e_T)$  transformiert werden. Die Treffpunktseite  $\alpha_T$  kann dann direkt, ohne ballistische Umrechnung, dem Geschütz zugeführt werden

(von der Derivation, welche in jedem Fall nur eine kleine Korrektur verursacht, wird hier abgesehen). Die verbleibenden zwei Komponenten liegen in der Schussebene; im Fall  $e_{kT}$ ,  $h_T$  handelt es sich um kartesische Koordinaten in dieser Ebene, im Fall  $\lambda_T$ ,  $e_T$  um Polarkoordinaten. Diese Komponenten müssen durch den ballistischen Auswerter in die Grössen  $\varepsilon$ ,  $\tau$  umgerechnet werden. Je nach der Konstruktion des ballistischen Auswerterers eignet sich das eine oder das andere System besser. Daraus ist ersichtlich, dass die Natur des ballistischen Rechners auf die Wahl aller vorangehenden Koordinatensysteme einen Einfluss haben kann.

### a) Einfache ballistische Körper

Jede der ballistischen Grössen ist eine Funktion zweier Variablen, also etwa im Fall der Koordinaten  $e_{kT}$ ,  $h_T$ :

$$\varepsilon = \varepsilon(e_{kT}, h_T), \quad \tau = \tau(e_{kT}, h_T).$$

Es ist naheliegend, diese Funktion mit Hilfe von zwei Kurvenkörpern zu erzeugen. Dies sind graphische Darstellungen der Funktion von zwei Veränderlichen in Form einer Höhenkarte, wobei ein Fühler in zwei Richtungen bewegt werden kann und den gesuchten Funktionswert als Höhe abtastet. Mittels solcher Kurvenkörper kann – mit gewissen Einschränkungen – jede Funktion erzeugt werden, und die Fabrikation benötigt keine mathematische Vorarbeit. Die Körper sind aber überaus empfindlich und teuer und ermöglichen nur eine beschränkte Genauigkeit; dabei sind in der erwähnten Darstellung die Genauigkeitsanforderungen sehr hoch, geht doch der Bereich zum Beispiel für  $\varepsilon$  von 0–1600 A°/00, wobei ein Fehler von nur wenigen A°/00 zugelassen werden kann.

### b) Abspaltung linearer Summanden

Für das Verfahren, das im folgenden beschrieben werden soll, eignet sich die Darstellung des Treffpunktvektors durch Polarkoordinaten ( $\lambda_T$ ,  $e_T$ ) in der Schussebene besonders gut. Es sind dann folgende Funktionen zu bilden:

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda_T, e_T), \quad \tau = \tau(\lambda_T, e_T).$$

Es ist sofort ersichtlich, dass  $\varepsilon$  vorwiegend von  $\lambda_T$  abhängt, während  $\tau$  in erster Linie durch die Entfernung  $e_T$  bestimmt ist. Die Funktionen werden daher in der folgenden Art aufgespalten:

$$\varepsilon = \lambda + \sigma(\lambda_T, e_T), \quad \tau = \frac{e_T}{v_m} + f(\lambda_T, e_T).$$

Die Schusswinkelfunktion  $\sigma(\lambda_T, e_T)$  durchläuft nun einen wesentlich kleineren Bereich und muss daher mit kleinerer relativer Genauigkeit erzeugt werden,



was besonders bei Verwendung von ballistischen Körpern ein Vorteil ist.  $v_m$  ist eine Konstante, welche der mittleren Geschwindigkeit entspricht. Sie ist so gewählt, dass die Funktion  $f(\lambda_T, e_T)$  möglichst klein wird und daher ebenfalls mit geringer relativer Genauigkeit erzeugt werden kann. (Die Multiplikation der Entfernung  $e_T$  mit der Konstanten  $1/v_m$  geschieht durch ein Getriebe und verursacht keinen Genauigkeitsverlust.)

Das beschriebene Verfahren der Zusammensetzung der ballistischen Werte aus einem grossen, exakt darstellbaren Anteil und einer kleineren, nur mit beschränkter Genauigkeit zu bildenden Korrektur bietet bezüglich Aufwand und Kosten eines Gerätes bedeutende Vorteile.

### c) Zurückführung auf Funktionen einer Variablen

Die Erzeugung von Funktionen zweier Variablen, wie  $\sigma(\lambda_T, e_T)$  oder  $f(\lambda_T, e_T)$  im vorigen Abschnitt, erfordert Kurvenkörper. Solche Körper sind mit Nachteilen behaftet: Sie sind teuer in der Fabrikation, beanspruchen viel Raum und sind empfindlich gegen Erschütterungen. Demgegenüber gibt es mehrere Vorrichtungen zur Erzeugung von Funktionen mit einer Variablen, die in Herstellung und Verwendung überaus vorteilhaft sind; es sind hier zu nennen: Kurvenscheiben, Zugmittelgetriebe, Gelenkwerke. Besonders die letzteren, die nur Kurbeln und Gelenke enthalten, sind sehr genau und robust [3]. In elektromechanischen Geräten können dazu noch Funktionspotentiometer und Funktionsdrehkondensatoren verwendet werden.

Daher besteht der Wunsch, die gesamte Ballistik nur mit Funktionen einer Variablen darzustellen, welche mittels Additionen und Multiplikationen zusammengesetzt werden. Beispielsweise ist folgender Ansatz möglich:

$$\sigma(\lambda_T, e_T) = A_1(\lambda_T) E_1(e_T) + A_2(\lambda_T) + E_2(e_T).$$

Der Entscheid, ob dieser Ansatz genügt oder eventuell sogar vereinfacht werden kann, und das Auffinden der vier neuen Funktionen bilden eine umfangreiche mathematische Arbeit, wobei zweckmässig mit den Methoden der Statistik vorgegangen wird [4]. Der Erfolg einer solchen Darstellung hängt in entscheidendem Masse davon ab, ob die Treffpunktwerte in einem zweckmässigen Koordinatensystem gegeben sind. Die Wahl der Koordinatensysteme in einem Feuerleitgerät ist daher eng mit der Art der Darstellung der Ballistik verknüpft.

Es ist darauf hinzuweisen, dass eine solche Darstellung die vorgegebene Funktion nur approximativ erzeugen kann. Der Fehler lässt sich aber durch geeignete Wahl des Ansatzes und durch Hinzunehmen genügend vieler Glieder beliebig klein machen, so dass er schliesslich gegenüber den Ungenauigkeiten der Rechenelemente in den Hintergrund tritt.

Falls die gewählten Rechenelemente für die Erzeugung von beliebigen, vorgegebenen Funktionen ungeeignet sind und nur Additionen, Multiplikationen

und Divisionen ausführen können – dies ist zum Beispiel bei der Wahl eines digitalen Rechenwerks der Fall –, so können die Funktionen etwa durch Polynome oder durch gebrochene rationale Funktionen approximiert werden. Die Erfahrung zeigt, dass sich ganz besonders die letzteren für die Darstellung ballistischer Beziehungen gut eignen.

## 8. Korrekturen

### a) Tagesunstimmigkeiten

Durch Abweichung des Luftgewichtes  $\delta$  und der Geschossanfangsgeschwindigkeit  $v_0$  von den Werten, die bei der Errechnung der Ballistik zugrunde gelegt wurden, entstehen Änderungen in der Flugbahn. Der Wind wird in dieser Betrachtung ausser acht gelassen. Die Natur der nötig werdenden Korrekturen, mit denen  $\varepsilon$  und  $\tau$  versehen werden muss, ist so kompliziert, dass in jedem Fall nur approximative Lösungen möglich sind. Eine häufig verwendete und übersichtliche Darstellung ist die folgende:

$$\Delta\varepsilon = f_1(\mathbf{T}) \Delta\delta + f_2(\mathbf{T}) \Delta v_0, \quad \Delta\tau = f_3(\mathbf{T}) \Delta\delta + f_4(\mathbf{T}) \Delta v_0.$$

Die Funktionen  $f_1, \dots, f_4$  sind skalare Funktionen des Vektors  $\mathbf{T}$ , wobei  $\mathbf{T}$  in Zylinder- oder Kugelkoordinaten dargestellt ist; die Funktionen sind natürlich unabhängig von  $\alpha_T$  und haben daher nur zwei unabhängige Veränderliche. In diesen Formeln treten die Tagesunstimmigkeiten  $\Delta\delta$  und  $\Delta v_0$  nur linear auf. Dadurch ist insbesondere der gegenseitigen Beeinflussung nicht Rechnung getragen, und es treten bei grossen Tagesunstimmigkeiten erhebliche Fehler auf. Trotz dieser Unzulänglichkeiten bedingt das beschriebene Rechenschema einen bedeutenden Materialaufwand, indem 4 Kurvenkörper (oder analoge Vorrichtungen) und 4 Multiplikatoren nötig sind.

Ein wesentlich eleganteres Verfahren erhält man durch Anbringen der Korrekturen *vor* dem ballistischen Rechner, also nicht an den ballistischen Grössen, sondern an  $\mathbf{T}$ . Dies entspricht der Bildung einer fiktiven Treffpunktverlagerung  $\Delta\mathbf{T}$  nach folgender Beziehung:

$$\Delta\mathbf{T} = \mathbf{S}_1(\mathbf{T}) \Delta\delta + \mathbf{S}_2(\mathbf{T}) \Delta v_0. \quad (3)$$

$\mathbf{T}$  und  $\Delta\mathbf{T}$  haben auch hier nur zwei wesentliche Komponenten, da das Azimut  $\alpha_T$  keine Rolle spielt.  $\mathbf{S}_1$  und  $\mathbf{S}_2$  sind vektorielle Funktionen des Vektors  $\mathbf{T}$ . Dem ballistischen Auswerter wird der Vektor  $\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}$  zugeführt. Dieses Verfahren ist, ebenso wie das vorher geschilderte, nur approximativ. Es hat aber den Vorteil, dass die Tagesunstimmigkeiten in  $\varepsilon$  und  $\tau$  nicht linear zur Auswirkung kommen, was eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit bedeutet. Besondere Vereinfachungen im Gerät bringt die folgende Modifikation: Der

Vektor  $\Delta \mathbf{T}$  hat nur eine  $\epsilon$ -Komponente und hängt nur von  $\epsilon$  ab, so dass  $\mathbf{S}_1$  und  $\mathbf{S}_2$  skalare Funktionen einer Variablen werden. Um den dadurch entstehenden Fehler auszugleichen, rechnet die Ballistik wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für die Bildung von } \epsilon: \quad \mathbf{T}'_1 = \mathbf{T} + \mu_1 \Delta \mathbf{T} . \\ \text{Für die Bildung von } \tau: \quad \mathbf{T}'_2 = \mathbf{T} + \mu_2 \Delta \mathbf{T} . \end{array} \right\} \quad (4)$$

$\mu_1$  und  $\mu_2$  sind dimensionslose Zahlen. Eine davon kann willkürlich gleich Eins gesetzt werden, und die andere ist durch Versuch zu bestimmen. Das System (4) braucht nur noch zwei Funktionen einer Variablen, gegenüber vier Funktionen zweier Variablen im Falle (3).

#### b) *Ladeverzug*

Der Ladeverzug  $k$  entsteht dadurch, dass zwischen dem Tempieren und dem Abfeuern des Geschosses eine gewisse Zeit - etwa 2-3 s - verstreicht. Die Tempierung eines Geschosses, das zu einer bestimmten Zeit tempiert wird, ist daher nicht gleich wie die Flugzeit eines Geschosses, das zur gleichen Zeit abgefeuert wird. Die getrennte Berechnung von  $\tau$  und  $\vartheta$  erfordert, wenn sie exakt erfolgen soll, im Gerät einen erheblichen Mehraufwand, indem die Addition des Vorhaltevektors zweimal erfolgen muss. Auf Kosten gewisser Ungenauigkeiten können aber bedeutende Einsparungen erzielt werden. Wohl die einfachste Berechnung der Tempierung  $\vartheta$  aus der Flugzeit erfolgt nach folgender Beziehung:

$$\vartheta = \tau + \dot{\tau} k .$$

Diese Formel ist hauptsächlich dann ungenau, wenn  $\tau$  eine hohe zweite Ableitung besitzt.

#### c) *Parallaxe*

Die Parallaxe kommt dadurch zustande, dass Feuerleitgerät und Geschütz nicht am gleichen Ort stehen; dies bedeutet, dass der errechnete Treffpunkt im Sinn einer Translation in ein neues Koordinatensystem umgerechnet werden muss. Die Addition des Parallaxvektors  $\mathbf{P}$  zum Treffpunktvektor  $\mathbf{T}$  ist völlig analog der Addition  $\mathbf{M} - \mathbf{v} \tau$ , und in der Regel wird in einem Gerät auch für beide Aufgaben das gleiche Verfahren angewendet. Es kann daher für die verschiedenen Möglichkeiten auf die Abschnitte 6a, 6b und 6c verwiesen werden. Da der Parallaxvektor in der Regel kleinere Werte annimmt als der Vorhaltevektor, ist es hier möglich, in vermehrtem Masse von Näherungslösungen Gebrauch zu machen. Besonders im Verfahren nach 6b gelingt es, für  $\Delta z$ ,  $\Delta \lambda$ ,  $\Delta e$  sehr einfache, wenn auch nur approximative Ausdrücke zu finden. Ein genaues und trotzdem sparsames Verfahren lässt sich anwenden, wenn gemäss

Abschnitt 6 c der Vorhaltevektor  $\mathbf{v} \tau$  in kartesischen Koordinaten dargestellt ist. Dann wird der Parallaxvektor direkt komponentenweise dazu addiert, und die Umrechnung auf  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta e$  erfolgt für beide gemeinsam.

## 9. Statistischer Aspekt

An verschiedenen Stellen dieser Arbeit wurde erwähnt, dass für gewisse komplizierte Umformungen Näherungslösungen gefunden werden können. Die Verwendung solcher Lösungen führt dazu, dass ein Gerät nicht nur zufällige Fehler aufweist, die durch ungenaue Herstellung und Justierung verursacht werden, sondern dass auch noch systematische Fehler entstehen, also solche, die für den gleichen Gefechtsablauf immer und bei jedem Exemplar des Gerätes gleich sind. Es ist denkbar, dass es Gefechtsabläufe gibt, in denen sich zeitweise die Ungenauigkeiten verschiedener Rechenelemente summieren, so dass in diesen Augenblicken ein Schussfehler entsteht, der so gross ist, dass die Trefferwahrscheinlichkeit fast auf Null reduziert wird. Es wäre aber falsch, daraus die Unbrauchbarkeit des betreffenden Gerätes ableiten zu wollen. Um ein Mass für die Genauigkeit eines Feuerleitgerätes zu erhalten, muss vielmehr eine *mittlere Treffererwartung über alle möglichen Flugwege* gebildet werden, wobei die verschiedenen Flugwege je nach ihrer Häufigkeit mit verschiedenen Gewichten zu versehen sind. Es ist zu betonen, dass oft gerade die mit gewissen systematischen Fehlern behafteten Rechenverfahren auf Lösungen führen, die infolge der Einfachheit und Zuverlässigkeit der Rechenelemente in der Mehrzahl der Gefechtsabläufe besonders genaue Resultate liefern.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KUHLENKAMP, A., *Die Flak-Kommandogeräte*, VDI.-Z. 86, Nr. 27/28, 417-429 (1942).
- [2] WIENER, N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series* (Wiley & Sons, New York 1949).
- [3] SVOBODA, A., *Computing Mechanisms and Linkages* (Mc. Graw-Hill, New York 1948 [Radiation Laboratory Series, vol. 27]).
- [4] PIKE, W., and SILVERBERG, T. R., *Designing Mechanical Computers*, Machine Design 1952, July, 131-137; August, 159-163.

### Summary

The best choice of co-ordinate systems in fire control computers depends not only upon the type of computing elements used, but also upon the formulae by which the geometric and ballistic computations are to be done. By carefully selecting co-ordinate systems at every point of the computing process, numerous simplifications may be made which will increase both accuracy and reliability of the instrument.

(Eingegangen: 12. Dezember 1954.)



# Das Verfahren der abgekürzten Iteration für algebraische Eigenwertprobleme, insbesondere zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms

Von FRIEDRICH L. BAUER, München<sup>1)</sup>

Das klassische Iterationsverfahren von DANIEL BERNOULLI [5]<sup>2)</sup> zur Bestimmung der absolut grössten Nullstelle eines Polynoms kann bekanntlich als Vektoriteration [1], durchgeführt mit der Frobeniusschen begleitenden Matrix des Polynoms, aufgefasst werden (AITKEN [1], FRY [7]). Es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass die Berechnung der (linear konvergenten) Folge der Iterationsvektoren so abgekürzt werden kann, dass eine quadratische Konvergenz erreicht wird. Dabei bleibt dieses im folgenden « abgekürzte Iteration » genannte Verfahren gegen Rundungsfehler selbstkorrigierend.

Die Tragweite der abgekürzten Iteration zeigt sich jedoch besonders bei der Bestimmung weiterer Nullstellen. Die gewöhnliche Vektoriteration an einem passend orthogonalisierten Ausgangsvektor ist in diesem Fall bekanntlich numerisch instabil. Die abgekürzte Iteration jedoch hat gleichzeitig stabilisierenden Charakter, es ist also keinerlei laufende Orthogonalisierung nötig. Sie erfordert keine Abänderung des Ausgangspolynoms, die Verschleppung von Rundungsfehlern ist also verhindert und eine selbstkorrigierende Berechnung *aller* Nullstellen ermöglicht. Gegen Rechenirrtümer schützt eine einfache Verprobungsmöglichkeit.

Die algebraischen Grundlagen des Verfahrens wurden in einer gesonderten Abhandlung vorweggenommen [4]. Der Schwerpunkt liegt in der vorliegenden Arbeit auf den Gesichtspunkten, die für die praktische Durchführung gelten; jedoch ist alles für das Verständnis Wesentliche aus einem vorangestellten Abriss der Theorie zu entnehmen. Wir behandeln in dieser Arbeit auch die der besseren Einsicht in das Verfahren dienende Verallgemeinerung auf Matrizen-Eigenwertprobleme. Für praktische Zwecke wird allerdings oft, insbesondere wenn Eigenvektoren nicht gesucht sind, ein direktes Verfahren, das unmittelbar auf das Säkularpolynom zielt, weniger Aufwand erfordern.

Das hier geschilderte Verfahren wurde in umfangreichen Rechnungen numerisch erprobt. Ich darf Herrn Prof. A. WALTHER, Darmstadt, und der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die dies ermöglichten, herzlich danken.

<sup>1)</sup> Mathematisches Institut und Arbeitsgruppe für elektronische Rechenanlagen der Technischen Hochschule München.

<sup>2)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 32.

## § 1. Bezeichnungen

Wir bezeichnen mit

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_1^n a_v x^{n-v} \quad (1)$$

das Polynom, dessen Nullstellen bestimmt werden sollen. Die Koeffizienten  $a_m$  mögen beliebig, reell oder komplex sein. Es kann jedoch für numerische Aufgaben stets angenommen werden, dass  $a_0 = 1$  und  $a_n \neq 0$  ist. Die Nullstellen seien nach ihren Beträgen numeriert,

$$|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq \dots \geq |\xi_n| > 0. \quad (2)$$

Der Einfachheit halber sei zunächst angenommen, dass alle Nullstellen einfach sind.

Für ein beliebiges Polynom  $Q(x)$  gibt es dann die Partialbruchzerlegung

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum \frac{Q(\xi_v)}{P'(\xi_v)} \cdot \frac{1}{x - \xi_v} + H(x), \quad (3)$$

wo  $H(x)$  eine ganze Funktion ist.

Summen sollen, wo nichts anderes gesagt ist, stets von 1 bis  $n$  laufen. Mit

$$P_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(x)}{x - \xi_m}, \quad m = 1, \dots, n \quad (4)$$

bezeichnen wir die Lagrangeschen Interpolationspolynome, mit

$$\bar{P}_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_m(x)}{P_m(\xi_m)} \quad (5)$$

die normierten. Es ist wegen  $P'(x) = \sum P_v(x)$

$$P'(\xi_m) = P_m(\xi_m) \quad (6)$$

und also

$$Q(x) \equiv \sum Q(\xi_v) \bar{P}_v(x) \bmod P(x). \quad (7)$$

Kongruenzen sollen in dieser Arbeit stets im Restklassenring  $\bmod P(x)$  verstanden werden.

Nach der Definition von  $\bar{P}_m(x)$  ist

$$x \bar{P}_m(x) \equiv \xi_m \bar{P}_m(x) \quad (8)$$

und also

$$x^i Q(x) \equiv \sum \xi_v^i Q(\xi_v) \bar{P}_v(x). \quad (9)$$

Das Polynom vom Grade  $n - 1$  auf der rechten Seite sei als  $Q^{(i)}(x)$  bezeichnet,

$$Q^{(i)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \xi_v^i Q(\xi_v) \bar{P}_v(x). \quad (10)$$

Der Koeffizient von  $x^{n-1}$  in  $Q^{(i)}(x)$  ist

$$\alpha_i = \sum_{r=1}^{i+1} \xi_r \frac{Q^{(i)}(\xi_r)}{P'(\xi_r)} \quad (11)$$

eine gewichtete Potenzsumme. Mit  $\bar{Q}^{(i)}(x)$  sei das normierte Polynom

$$\bar{Q}^{(i)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q^{(i)}(x)}{\alpha_i} \quad (12)$$

worin der Koeffizient von  $x^{n-1}$  gleich 1 ist, bezeichnet.

## § 2. Theoretische Grundlagen des Verfahrens der abgekürzten Iteration

### 1. Die Iteration mit $x \bmod P(x)$

Die Polynome  $Q^{(i)}(x)$  oder  $\bar{Q}^{(i)}(x)$  können rekursiv berechnet werden,

$$Q^{(i+1)}(x) = x Q^{(i)}(x) - \alpha_i P(x), \quad (13)$$

$$Q^{(i+1)}(x) = \frac{(x \bar{Q}^{(i)}(x) - P(x))}{\alpha_{i+1}} \quad (14)$$

Wir werden diesen Prozess kurz „(gewöhnliche) Iteration mit  $x \bmod P(x)$ “ nennen.

Falls

$$Q(\xi_1) = Q(\xi_2) = \dots Q(\xi_{r-1}) = 0, \quad Q(\xi_r) \neq 0 \quad (15)$$

und

$$|\xi_r| > |\xi_{r-1}|,$$

überwiegt der Einfluss von  $\xi_r^i$  in  $Q^{(i)}$  den aller übrigen Nullstellen, wenn  $i$  unbeschränkt wächst; man hat

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q^{(i)}(x) = P_r(x). \quad (16)$$

Die Iteration mit  $x \bmod P(x)$  führt also dann direkt zum Polynom  $P_r(x)$ , von dem die Nullstelle  $\xi_r$  abgetrennt ist, und gleichzeitig auch zu  $\xi_r$  selbst:  $\xi_r$  ist der Faktor, mit dem sich  $Q^{(i)}(x)$  in der Grenze multipliziert,

$$Q^{(i+1)}(x) - \xi_r Q^{(i)}(x) \Rightarrow 0. \quad (17)$$

Die Konvergenz ist linear, der Fehler wird im Limes bei jedem Schritt mit  $|\xi_r|/|\xi_{r+1}|$  multipliziert.

Diesem Prozess liegt implizit die von LAGRANGE [10] herrührende Variante der Bernoullischen Methode<sup>3)</sup> zugrunde.

<sup>3)</sup> Siehe [4], § 1.2.

Die Iterationspolynome  $Q^{(i)}(x)$  spielen bei LAGRANGE nur eine Nebenrolle. Gerade sie sind es jedoch, die eine beträchtliche Abkürzung der Iterationsfolge gestatten.

## 2. Abkürzung der Iteration

Auf die Frage, ob man  $Q^{(2i)}(x)$  unmittelbar aus  $Q^{(i)}(x)$  erhalten könne, lautet nämlich die Antwort:

Es ist:

$$Q^{(2i)}(x) = \sum \xi_r^{2i} Q(\xi_r) P_r(x), \quad [Q^{(i)}(x)]^2 = \sum (\xi_r^i Q(\xi_r))^2 P_r(x),$$

da

$$P_\mu(x) P_\nu(x) \equiv P_\mu(\xi_\nu) P_\nu(x) = \delta_{\mu\nu} P_\nu(x);$$

also

$$Q^{(2i)}(x) \equiv [Q^{(i)}(x)]^2$$

falls

$$Q(\xi_\nu) = 0 \text{ oder } 1 \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (18)$$

Zur expliziten Berechnung von  $Q^{(2i)}(x)$  bieten sich verschiedene Möglichkeiten, um  $[Q^{(i)}(x)]^2$ , ein Polynom vom Grad  $2n - 2$ , modulo  $P(x)$  zu reduzieren.

Am übersichtlichsten ist die folgende<sup>4)</sup>. Sei

$$Q^{(i)}(x) = \sum \gamma_\nu^{(i)} x^{n-\nu}, \quad (19)$$

dann ist

$$[Q^{(i)}(x)]^2 = \sum \gamma_\nu^{(i)} x^{n-\nu} Q^{(i)}(x) \equiv \sum \gamma_\nu^{(i)} Q^{i+n-\nu}(x). \quad (20)$$

Es sind also durch gewöhnliche Iteration die Polynome  $Q^{(i-1)}, \dots, Q^{(i-n+1)}$  herzustellen, dann erfolgt eine gewichtete Summierung. Die Gewichtungsfaktoren liefert das Polynom  $Q^{(i)}(x)$ .

Da bei jedem dieser Schritte der Iterationsindex verdoppelt wird, ist der Fehler nach jedem Schritt von der Ordnung des Quadrates des vorherigen Fehlers, die Konvergenz ist nunmehr quadratisch.

## 3. Wahl des Ausgangspolynoms

Zur Bestimmung von  $\xi_r$ , falls  $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ , hat man also die Bedingungen (15) und (18) zu erfüllen. Dazu genügt es,

$$Q(x) = {}^r Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_1^{r-1} P_\nu(x) = \sum_r^n P_\nu(x) \quad (21)$$

zu wählen.

Der erste Lauf der Iteration ist insbesondere stets mit  ${}^1 Q(x) = 1$  zu beginnen.

<sup>4)</sup> Weitere siehe [4], § 2.1 und § 2.3.



Wird sodann beim  $r$ -ten Lauf der abgekürzten Iteration, startend mit  ${}^rQ(x)$ ,  $P_r(x)$  bestimmt, so kann der neue,  $(r + 1)$ -te Lauf mit

$${}^{r+1}Q(x) = {}^rQ(x) - \bar{P}_r(x) \tag{22}$$

unmittelbar angeschlossen werden. Dies geht so lange gut, als keine Nullstellen gleichen Betrags an die Reihe kommen.

§ 3. Nullstellen gleichen Betrags

1. Die Bildung der abgeleiteten Iterationsfolge

Wir beginnen mit dem Fall, dass zwei Nullstellen von gleichem Betrag sind. Dies trifft bei reellen Polynomen zu, wenn es sich um ein einfaches konjugiert-komplexes Paar handelt.

Ausgangspolynom sei  ${}^rQ(x)$ , es sei  $|\xi_r| = |\xi_{r+1}| > |\xi_{r+2}|$ . Die Folge der Iterationspolynome  ${}^iQ(x)$  konvergiert nicht. Ist  $\xi_r = \xi_{r+1} = q e^{i\varphi}$ , so oszilliert sie in allen Gliedern. Jedoch konvergiert nun die Folge der «abgeleiteten» Polynome  ${}^i_2Q(x)$  vom Grad  $n - 2$ , die man durch einen Prozess erhält, der formal übereinstimmt mit dem der «cross-multiplication» von ROUTH [12].

Es sei

$${}^i_2Q(x) = \frac{\alpha_i \cdot {}^rQ^{(i)}(x)}{\alpha_{i+1} \cdot {}^rQ^{(i-1)}(x)} = \alpha_i \alpha_{i+1} \left( \frac{{}^rQ^{(i+1)}}{\alpha_{i+1}} - \frac{{}^rQ^{(i)}}{\alpha_i} \right). \tag{23}$$

${}^i_2Q^{(i)}(x)$  sei wieder so normiert, dass der Koeffizient von  $x^{n-2}$  Eins ist, man hat also

$${}^i_2Q^{(i)}(x) = \frac{{}^r\bar{Q}^{(i+1)}(x) - {}^r\bar{Q}^{(i)}(x)}{\text{Koeffizient von } x^{n-2}}. \tag{24}$$

Es gilt sodann<sup>5)</sup>

$$\lim_{i \rightarrow \infty} {}^i_2Q^{(i)}(x) = P_{r,r+1}(x), \tag{25}$$

wo  $P_{r,r+1}$  das Polynom vom Grad  $n - 2$  ist, von dem der zu  $\xi_r$  und  $\xi_{r+1}$  gehörige quadratische Faktor

$$S_{r,r+1}(x) = (x - \xi_r) (x - \xi_{r+1}) = x^2 - p x + q$$

abgetrennt ist:

$$P_{r,r+1}(x) = \frac{P(x)}{S_{r,r+1}(x)}. \tag{26}$$

Damit ist auch  $S_{r,r+1}(x)$  bestimmt. Im übrigen gilt im Limes

$${}^rQ^{(i+2)}(x) - p {}^rQ^{(i+1)} + q {}^rQ^{(i)} \Rightarrow 0. \tag{27}$$

<sup>5)</sup> Spezialfall aus [4], § 3.2. Der dortige Beweis überträgt sich sofort, wenn man bedenkt, dass  ${}^rQ(x)$  mit  $P(x)$  die Linearfaktoren  $x - \xi_1, x - \xi_2, \dots, x - \xi_{r-1}$  gemeinsam hat.

In dem bisher ausgeschlossenen Fall mehrfacher Nullstellen, hier  $\xi_r = \xi_{r+1}$ , konvergieren die  ${}^r Q^{(i)}(x)$  ebenfalls<sup>6)</sup> linear, und zwar (vgl. Abschn. 3) erheblich rascher als die logarithmisch konvergenten  ${}^r Q^{(i)}(x)$ .

## 2. Gewinnung des neuen Ausgangspolynoms

Der Start eines neuen Laufes nach der Bestimmung von  $\xi_r$  und  $\xi_{r+1}$  erfordert die Bildung von  ${}^{r+2}Q(x) = {}^r Q(x) - [P_r(x) + P_{r+1}(x)]$ . Das zu subtrahierende  $P_r(x) + P_{r+1}(x)$  kann für reelle Ausgangspolynome unter Vermeidung einer Rechnung im Komplexen so bestimmt werden: Es ist

$$\bar{P}_r(x) + \bar{P}_{r+1}(x) = \left[ \frac{x - \xi_{r+1}}{P_r(\xi_r)} + \frac{x - \xi_r}{P_{r+1}(\xi_{r+1})} \right] P_{r,r+1}(x). \quad (28)$$

Der zweite Faktor hat sich durch die Iteration direkt ergeben. Ausserdem ist  $\xi_r + \xi_{r+1} = p$  und  $\xi_r \xi_{r+1} = q$  bekannt. Mit ihrer Hilfe lässt sich die eckige Klammer umformen, es ergibt sich

$$P_r(x) + \bar{P}_{r+1}(x) = \frac{[x - (p/2)] G + H}{[q - (p^2/4)] G^2 + H^2} P_{r,r+1}(x), \quad (29)$$

wo

$$G = \frac{P_{r,r+1}(\xi_r) - P_{r,r+1}(\xi_{r+1})}{-(\xi_r - \xi_{r+1})}, \quad H = \frac{P_{r,r+1}(\xi_r) + P_{r,r+1}(\xi_{r+1})}{2} \quad (30)$$

ist. Führen wir die Koeffizienten  $\pi_k$  von  $P_{r,r+1}$  ein,

$$P_{r,r+1}(x) = \pi_0 x^{n-2} + \pi_1 x^{n-3} + \dots + \pi_{n-2}, \quad (31)$$

so wird

$$G = - \sum_0^{n-2} \eta_{v-1} \pi_{n-2-v}, \quad H = \frac{1}{2} \sum_0^{n-2} (\eta_v - q \eta_{v-2}) \pi_{n-2-v}. \quad (32)$$

Dabei ist

$$\eta_v = \frac{\xi_r^{v+1} - \xi_{r+1}^{v+1}}{\xi_r - \xi_{r+1}}$$

eine totalsymmetrische Funktion  $v$ -ten Grades, rekursiv definiert durch

$$\eta_v = p \eta_{v-1} - q \eta_{v-2}, \quad (33)$$

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_{-1} = 0, \quad \eta_{-2} = -\frac{1}{q}. \quad (34)$$

Die angegebene Form hat den Vorzug, dass sie im Grenzfall  $\xi_r = \xi_{r+1}$  endlich bleibt, es geht

$$G \rightarrow -P'_{r,r+1}(\xi_r), \quad H \rightarrow P_{r,r+1}(\xi_r). \quad (35)$$

<sup>6)</sup> Vgl. [4], § 4. Die dortige Bedingung  $e_1^{(0)} \neq 0$  ist sinngemäss erfüllt.

Im übrigen sind mannigfache Umformungen möglich. Mit Hilfe von (33) erhält man zum Beispiel

$$\left. \begin{aligned} P_r(\lambda) - P_{r-1}(\lambda) \\ \frac{\left(\sum_0^{n-2} \eta_{\nu-1} \tau_{n-2-\nu}\right) x - \left(\sum_0^{n-2} \eta_{\nu} \tau_{n-2-\nu-r}\right)}{q \left\{ \left(\sum_0^{n-2} \eta_{\nu} \tau_{n-2-\nu}\right) \left(\sum_0^{n-2} \eta_{\nu-2} \tau_{n-2-\nu}\right) - \left(\sum_0^{n-2} \eta_{\nu-1} \tau_{n-2-\nu}\right)^2 \right\}} P_{r-1}(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

3. Bildung weiterer abgeleiteter Iterationsfolgen

Im Falle, dass  $m > 2$  Nullstellen vom gleichen Betrag, jedoch sämtliche verschieden sind,

$$\varrho = |\xi_r| = |\xi_{r+1}| = \cdots = |\xi_{r+m-1}| > |\xi_{r+m}|.$$

konvergiert erst die  $m$ -te der abgeleiteten Folgen  ${}^r Q^{(i)}(x)$  von Polynomen vom Grade  $n - \kappa$ , die rekursiv durch fortgesetzte Durchführung der «cross-multiplication» gebildet sind<sup>7)</sup>

$${}^r Q^{(i)}(x) = \frac{{}^{r-1} \overline{Q}^{(i+1)} - {}^{r-1} Q^{(i)}}{\text{Koeffizient von } x^{n-\kappa}} \quad (\kappa = 3, \dots, m). \tag{37}$$

Es gilt<sup>7)</sup>

$$\lim_{i \rightarrow \infty} {}^r Q^{(i)}(x) = P_{r,r+1, \dots, r+m-1} = \frac{P(x)}{S_{r,r+1, \dots, r+m-1}(x)}; \tag{38}$$

es entsteht auch hier direkt das Polynom, von dem der Faktor

$$S(x) = S_{r,r+1, \dots, r+m-1}(x) = (x - \xi_r) (x - \xi_{r+1}) \cdots (x - \xi_{r+m-1}) \tag{39}$$

– dessen Nullstellen die gesuchten sind – abgetrennt ist. Deren Bestimmung bietet nun bekanntlich keine Schwierigkeiten mehr, mit Hilfe der gebrochen linearen Substitution

$$x = \varrho \frac{z + i}{z - i},$$

die den Kreis vom Radius  $\varrho$  auf die reelle Achse abbildet, entsteht aus  $S(x)$  ein Polynom

$$\hat{S}(z) = (z - i)^m S\left(\varrho \frac{z + i}{z - i}\right)$$

mit reellen Nullstellen, das für reelles  $S(x)$  entweder gerade oder ungerade ist.

<sup>7)</sup> Vgl. [4], § 3.2.

## Zur Bildung des neuen Ausgangspolynoms

$${}^{r+m}Q(x) = {}^rQ(x) - [P_r(x) + P_{r+1}(x) + \cdots + P_{r+m-1}(x)]$$

in reeller Rechnung könnten Verallgemeinerungen der Formeln vom Abschnitt 2 herangezogen werden. Da jedoch bei reellen Polynomen die Nullstellen von  $S_{r+r+1}, \dots, S_{r+m-1}(x)$  nach der Kreisabbildung ohnehin paarweise anfallen, dürfte zweckmässiger die wiederholte Abtrennung der zu je zwei festgestellten Nullstellen gehörigen Terme nach Abschnitt 2 sein.

${}_mQ^{(i)}(x)$  konvergiert auch, wenn unter den  $m$  Nullstellen mehrfache sind<sup>8)</sup>.  $\dot{S}(z)$  enthält dann ebenfalls die entsprechenden Mehrfachheiten. Auf die Bildung von  ${}^{r+m}Q(x)$  gehen wir nicht weiter ein, da dieser Fall in der numerischen Rechnung ohnehin besondere Massnahmen erfordert (vgl. § 5. 4).

## § 4. Die abgekürzte Iteration einer Matrix an einem Vektor

## 1. Abkürzung der gewöhnlichen Vektoriteration

$\mathfrak{A}$  sei eine beliebige  $(n, n)$ -reihige Matrix mit den Eigenwerten  $\xi_i (i = 1, \dots, n)$ , die so numeriert sein mögen, dass sie der Bedingung (2) genügen. Die wiederholte Anwendung der Matrix  $\mathfrak{A}$  auf einen Ausgangszeilenvektor  $t$  liefert

$$t_0 = t, \quad t_1 = t \mathfrak{A}, \quad t_2 = t \mathfrak{A}^2, \dots, t_i = t_{i-1} \mathfrak{A} = t \mathfrak{A}^i, \dots \quad (40)$$

Falls  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  ist, geht der normierte Vektor  $t_i / |t_i|$  gegen den normierten Linkseigenvektor  $u_1$ , vorausgesetzt, dass  $t \mathfrak{A}_1$  enthält, also nicht unglücklich gewählt ist. Dies bildet die Grundlage der Methode der Iteration an einem Vektor, die von v. MISES und POLLACZEK-GEIRINGER [11] zur numerischen Bestimmung des grössten Eigenwertes eingeführt worden ist.

Die Iteration an einem Vektor kann nun ebenso abgekürzt werden wie die Iteration mod  $P(x)$ . Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{Z}$  die Matrix

$$\mathfrak{Z} = \begin{vmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{so gilt } \mathfrak{Z} \mathfrak{A}^i = \begin{vmatrix} t_0 \mathfrak{A}^i \\ t_1 \mathfrak{A}^i \\ \vdots \\ t_{n-1} \mathfrak{A}^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_{i+n-1} \end{vmatrix}. \quad (41, 42)$$

Es ist dann

$$t_{2i} = t \mathfrak{A}^{2i} = t \mathfrak{A}^i \mathfrak{Z}^{-1} \mathfrak{Z} \mathfrak{A}^i = t_i \mathfrak{Z}^{-1} \mathfrak{Z} \mathfrak{A}^i,$$

<sup>8)</sup> Vgl. [4], § 4.



also

$$\begin{pmatrix} t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_{2i} = t_i \mathfrak{T}^{-1} \\ \vdots \\ t_{i+n-1} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Kennt man also eine Folge von  $n$  Iterationsvektoren  $t_i, \dots, t_{i+n-1}$  und  $\mathfrak{T}^{-1}$ , so erhält man  $t_{2i}$  durch gewichtete Summierung dieser Vektoren; die Gewichtungsfaktoren liefert  $t_i \mathfrak{T}^{-1}$ .  $t_i \mathfrak{T}^{-1}$  kann natürlich auch jeweils direkt als Lösung von  $\mathfrak{Z} t_i = t_i$  erhalten werden.

Notwendig und hinreichend für die Existenz von  $\mathfrak{T}^{-1}$  ist im Falle linearer Elementarteiler, dass  $t$   $n$  Eigenvektoren aufspannt. In jedem Fall ist notwendig, dass  $\mathfrak{A}$  nicht-derogatorisch ist.

## 2. Abkürzung der Iteration an einem « abgeänderten » Ausgangsvektor

Insbesondere existiert also für einen neuen Ausgangsvektor  ${}^r t$ , der aus  $t$  durch Annullierung der Anteile aller Eigen- und Hauptvektoren zu  $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$  entsteht, das zugehörige  ${}^r \mathfrak{T}^{-1}$  nicht. Die abgekürzte Iteration kann trotzdem durchgeführt werden, und zwar unter Verwendung der ursprünglichen Matrix  $\mathfrak{T}^{-1}$ . Wir nehmen, obwohl die Beschränkung nicht notwendig ist, an, dass  $\mathfrak{A}$  nur lineare Elementarteiler hat. Zu  $\xi_1, \dots, \xi_r$  gehören die Rechtseigenvektoren  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$  und die Linkseigenvektoren  $u_1, \dots, u_r$ ; es sei  $(u_\nu, \mathfrak{x}_\nu) = 1$  normiert. Dann ist

$${}^r t = t - \sum_1^{r-1} (t, \mathfrak{x}_\nu) u_\nu = t \left( 1 - \sum_1^{r-1} K_\nu \right), \quad (44)$$

wo  $K_\nu = \mathfrak{x}_\nu u_\nu$  die Frobeniusschen Kovarianten sind, für die gilt

$$K_\nu^2 = K_\nu, \quad K_\mu K_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu \quad (45)$$

und

$$K_\nu \mathfrak{A} = \mathfrak{A} K_\nu. \quad (46)$$

Es sei entsprechend  ${}^r t_i = {}^r t \mathfrak{A}^i$ . Dann ist

$$\begin{pmatrix} {}^r t_i \\ {}^r t_{i+1} \\ \vdots \\ {}^r t_{2i} = {}^r t_i \mathfrak{T}^{-1} \\ \vdots \\ {}^r t_{i+n-1} \end{pmatrix}$$

Denn es ist  ${}^r t_{i+\infty} = t (1 - \sum K_\nu) \mathfrak{A}^{i+\infty} = t \mathfrak{A}^i (1 - \sum K_\nu) \mathfrak{A}^i$  wegen (46). Damit

entsteht auf der rechten Seite

$${}^r t_i \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{T} (1 - \Sigma K_v) \mathfrak{U}^i = \mathfrak{t} (1 - \Sigma K_v) \mathfrak{U}^i (1 - \Sigma K_v) \mathfrak{U}^i = \mathfrak{t} (1 - \Sigma K_v)^2 \mathfrak{U}^{2i}. \quad (47)$$

Wegen  $(1 - \Sigma K_v)^2 = 1 - \Sigma K_v$  nach (45) ist dies aber gleich  ${}^r t_{2i}$ . Falls  $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$  ist, geht wiederum der normierte Vektor  ${}^r t_i / |{}^r t_i|$  gegen den normierten Eigenvektor  $u_r$ .

Es wird kaum nötig sein, zu bemerken, dass die hier beschriebene Iteration, mit der Transponierten  $\mathfrak{U}^T$  durchgeführt, auf dasselbe hinausläuft wie die Iteration mit  $\mathfrak{U}$  an einem Spaltenvektor. Der Start eines neuen Laufes hat für  $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$  zu geschehen mit

$${}^{r+1} \mathfrak{t} = {}^r \mathfrak{t} - (\mathfrak{t} \mathfrak{x}_r) u_r, \quad (48)$$

erfordert also die Kenntnis des Rechts- und des Linkseigenvektors zu  $\xi_r$  und damit im allgemeinen die vorherige Durchführung sowohl einer Iteration an einem Zeilenvektor als einer solchen an einem Spaltenvektor. Für symmetrische oder antisymmetrische Matrizen  $\mathfrak{U}$  entfällt diese Notwendigkeit.

### 3. Der Fall von Eigenwerten gleichen Betrags

Für den Fall  $|\xi_r| = |\xi_{r+1}| = \dots = |\xi_{r+m-1}| > |\xi_{r+m}|$  hat AITKEN [3] eine erschöpfende Diskussion der Möglichkeiten zur Bestimmung des Eigenwertes und der zugehörigen Eigenvektoren gegeben, und zwar auch für den Fall zusammenfallender Nullstellen und höherer Elementarteiler. Wir können uns daher mit diesem Hinweis begnügen. Für den Regelfall einfacher konjugiert-komplexer Paare von Eigenwerten und Eigenvektoren ist nach sinngemässer Übertragung der Gedankengänge von § 3.2 eine rein reelle Durchführung der Rechnung möglich.

### 4. Spezialfall: Die Nullstellenbestimmung von Polynomen

Die klassische Bernoullische Methode kann bekanntlich ([1], [7]) als Vektoriteration mit der Frobeniusschen begleitenden Matrix  $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix} \quad (49)$$

an einem Spaltenvektor (oder als Iteration mit  $\mathfrak{X}^T$  an einem Zeilenvektor) aufgefasst werden. Weniger geläufig scheint der Gedanke zu sein<sup>9)</sup>, die Iteration mit  $\mathfrak{X}$  an einem Zeilenvektor durchzuführen. Man erkennt unmittelbar, dass

<sup>9)</sup> Vgl. [4], § 3.1, Fussnote.

dies der in § 2 beschriebenen Iteration  $x \bmod P(x)$  äquivalent ist, wenn man den Koeffizienten des Iterationspolynoms den Iterationszeilenvektor, von rückwärts gelesen, zuordnet.

Da man die transponierende Matrix von  $\mathfrak{X}$ ,  $T\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^T T$  von vornherein kennt,

$$T = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

sind beide Methoden mathematisch gleichwertig, die Zeileniteration kann in die Spalteniteration übergeführt werden und umgekehrt. Bei der abgekürzten Iteration jedoch hat die letztere, auf die Lagrangesche Varianta hinauslaufende Methode den Vorzug, dass  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}^{-1} = 1$  wird, wenn als Anfangsvektor (dem Polynom  $Q(x) = 1$  entsprechend) der Vektor  $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0)$  gewählt wird. Die aus  $n$  sukzessiven Iterationsvektoren

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathfrak{t}_{i+n-1} \end{pmatrix}$$

gebildete Matrix stimmt dabei nach (42) gerade mit der  $i$ -ten Potenz von  $\mathfrak{X}$  überein. Es ist aber bedeutsam, dass man die zweite bis  $n$ -te Zeile von  $\mathfrak{X}^i$  durch Iteration aus der ersten Zeile gewinnt, sowohl vom Standpunkt des Aufwands, verglichen mit der expliziten Potenzierung von  $\mathfrak{X}$  nach AITKEN [2], als auch im Hinblick auf Rundungsfehler (vgl. § 5. 2).

Es ist im übrigen leicht nachzuweisen, dass im ersteren Fall, wenn mit  $\mathfrak{X}^i$  an  $\mathfrak{t} = (0 \ 0 \dots 0 \ 1)^{10}$  iteriert wird,  $\mathfrak{Z}^{-1} = T$  [Gleichung (50)] wird.

### § 5. Gesichtspunkte zur praktischen Durchführung des Verfahrens

#### 1. Gang des Rechenverfahrens

Die abgekürzte Iteration zur Gewinnung von  ${}^rQ^{(i)}(x) = \sum {}^r\gamma_\nu^{(i)} x^{n-\nu}$  stützt sich nach (13) und (23) auf die folgenden beiden Algorithmen ( $m = 1, \dots, n$ )

$${}^r\gamma_m^{(i+1)} = {}^r\gamma_{m+1}^{(i)} - a_m {}^r\gamma_1^{(i)}, \quad {}^r\gamma_{n+1}^{(i)} = 0, \quad (51)$$

$${}^r\gamma_m^{(\beta_{j+1})} = \sum_\nu {}^r\gamma_\nu^{(\beta_j+i)} {}^r\gamma_m^{(\beta_j+n-\nu)}. \quad (52)$$

<sup>10)</sup> Diesen Fall hat schon FÜRSTENAU [8] betrachtet.

Ein Gesamtschritt der abgekürzten Iteration besteht aus  $n$  Schritten (51) und einem darauf aufbauenden Schritt (52), der die Ausgangsdaten für die Wiederholung des Prozesses liefert. Da es auf Skalenfaktoren nicht ankommt, darf *vor* Beginn der nächsten  $n$  Schritte (51) der *ganze* Vektor  ${}^r\gamma_m^{(\beta_{j+1})}$  durch eine beliebige Konstante dividiert werden, zum Beispiel durch  $2^r$ - oder  $10^r$ -Potenzen zwecks Einhaltung einer festen Grössenordnung oder auch durch  ${}^r\gamma_1^{(\beta_{j+1})}$ , der Normierung von  ${}^rQ^{(i)}(x)$  entsprechend.

Falls  $\iota = 0$  gewählt wird, wie es der Diskussion von § 2 entspricht, besteht die Möglichkeit laufender Aufsummierung aller Glieder. Die Wahl irgendeines  $\iota = 1, \dots, n-1$  führt, wie man leicht sieht, zur Beziehung  $\beta_{j+1} = 2\beta_j + \iota$ , erhöht also die Konvergenz geringfügig.

Der erste Iterationslauf kann, der Wahl  $Q(x) = 1$  entsprechend, mit

$$\gamma_v^{(\beta_0)} = \gamma_v^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{für } v = 1, \dots, n-1, \\ 1 & \text{für } v = n, \end{cases} \quad (53)$$

begonnen werden. Man kann Iterationsschritte einsparen, wenn man sogleich mit  $Q^{(n)}(x) = x^n - P(x)$  beginnt, also

$$\gamma_v^{(\beta_0)} = \gamma_v^{(n)} = -a_v \quad (54)$$

setzt. Bei einheitlicher Führung aller Iterationsläufe, wie man sie bei programmgesteuerten Rechenanlagen anstrebt, ist dann jeder neue Lauf zu beginnen mit

$${}^{r+1}Q^{(\beta_0)}(x) = {}^rQ^{(\beta_0)}(x) - \xi_r^{\beta_0} P_r(x). \quad (54a)$$

Die Bestimmung von  $S_{r,r+1}, \dots, r+m-1(x)$  aus  $P_{r,r+1}, \dots, r+m-1(x)$  nach (38) [Spezialfälle (26) und (4)] durch Koeffizientenvergleich bedarf keiner Erläuterung.

Mathematisch äquivalent, numerisch jedoch gelegentlich vorteilhafter ist es, die Koeffizienten  $\sigma_\mu$  von  $S_{r,r+1}, \dots, r+m-1(x) = x^m + \sigma_1 x^{m-1} + \dots + \sigma_m$ , aus der Relation<sup>11)</sup>

$${}^rQ^{(i+m)}(x) + \sigma_1 {}^rQ^{(i+m-1)} + \dots + \sigma_m {}^rQ^{(i)} \Rightarrow 0 \quad (55)$$

zu gewinnen. Dies kann durch Auflösung, nach Streichung überflüssiger Elemente, geschehen. Die genauesten Ergebnisse, wenn auch mit höherem Aufwand, erhält man durch Ausgleichung, also durch Lösung des zugehörigen Systems von Normalgleichungen.

Bei Polynomen mit numerisch gegebenen Koeffizienten wird das Auftreten von Nullstellen gleichen Betrags (ausgenommen einfach konjugiert-komplexe

<sup>11)</sup> Spezialfälle (17), (27). Für die allgemeine Vektoriteration (vgl. § 4) ist dieser Sachverhalt geläufig [6], er lässt sich jedoch auch direkt aus [4], § 3, insbesondere Gleichung (66a) und (55) folgern.



Paare bei reellen Polynomen) meist zufällig sein. Es wird in solchen Fällen also genügen, zunächst das Augenmerk nur auf die Konvergenz von  $'Q''(x)$  oder allenfalls  ${}_2Q''(x)$  zu richten und erst dann weitere, abgeleitete Folgen heranzuziehen, wenn jene nach einer im allgemeinen ausreichenden Zahl von Schritten nicht konvergieren. Dabei kann die Feststellung der Konvergenz, wenngleich weniger zuverlässig, auch am Vergleich sukzessiver Näherungswerte für  $\xi$ , oder  $p = \xi_r + \xi_{r+1}$ ,  $q = \xi_r \xi_{r+1}$  erfolgen. Am genauesten ist natürlich wiederum die Betrachtung des mittleren quadratischen Fehlers im zugehörigen Ausgleichsproblem.

Dass auch die abgekürzte Iteration bis auf Skalenänderungen divisionsfrei geführt werden kann, macht sie besonders auch zur Bestimmung der Nullstellen von Polynomen mit komplexen Koeffizienten geeignet. Selbstverständlich wird man bei hohen Polynomen auch daran denken, die reziproken der kleineren Nullstellen aus dem Polynom  $P^{-1}(x) = x^n P(1/x)$  zu bestimmen.

## 2. Selbstkorrektur und stabilisierende Eigenschaft der abgekürzten Iteration

Die gewöhnliche Iteration mit  $x \bmod P(x)$  hat als Spezialfall einer Vektoriteration die Eigenschaft, selbstkorrigierend zu sein. Ist  $|\xi_1| > |\xi_2|$ , so führt die Iteration für jedes Ausgangspolynom, das nicht  $\xi_1$  als Nullstelle enthält, zu  $P_1(x)$  und  $\xi_1$ . Obwohl unter dem Einfluss von unvermeidlichen Rundungsfehlern die theoretische Iterationsfolge fortwährend abgeändert wird, würde jedes neuentstehende Iterationspolynom theoretisch zur Konvergenz führen. Mit  $Q(x) = 1$  [oder auch  $Q(x) = P'(x)$ ], steht ein Ausgangspolynom zur Verfügung, das im allgemeinen durch Rundungsfehler nicht mehr so weit beeinflusst werden kann, dass die obige Bedingung für die Konvergenz nach  $\xi_1$  verletzt wird. Im übrigen besteht hier sogar absolute Selbstkorrektur insofern, als es wegen des Zufallscharakters der Rundungsfehler unmöglich ist, dass die obige Bedingung, wenn sie einmal verletzt ist, dauernd verletzt bleibt.

Es ist verständlich, dass die Selbstkorrektur nur möglich ist, wenn die «ursprüngliche Information», wie es hier mit den Koeffizienten des vorgegebenen Polynoms der Fall ist, immer wieder in den Prozess eingreift.

Aus der Tatsache der absoluten Selbstkorrektur geht deutlich hervor, dass die Iteration mit  $x \bmod P(x)$ , begonnen an einem abgeänderten  $'Q(x)$ , die theoretisch für  $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$  zu  $P_r(x)$  und  $\xi_r$  führen sollte, unter dem Einfluss der Rundungsfehler in die Iterationsfolge nach  $P_1(x)$  und  $\xi_1$  einmündet, also «labil» ist. Als stabilisierend bezeichnen wir eine zusätzliche Massnahme, durch die ein Verfahren auf einen Weg, den es unter dem Einfluss von Rundungsfehlern verlassen möchte, gezwungen wird. Solche Massnahmen, wie sie für Vektoriteration etwa das Verfahren von КОЧН benützt, sind meist lästig. Es ist nun ein besonders hübscher Zug der Abkürzung, die die quadratische Konvergenz liefert, dass sie gleichzeitig stabilisierend wirkt. Selbstverständlich kann

das nur dadurch geschehen, dass die Verschärfung zur absoluten Selbstkorrektur preisgegeben wird. In der Praxis ist das bedeutungslos, da mit oder ohne diese Eigenschaft grosse Verfälschungen, wie sie durch Rechenirrtümer entstehen, so spürbare Rückschläge bedeuten, dass sie durch Verwendung von Rechenproben verhindert werden müssen. Wir werden aber zeigen, dass die abgekürzte Iteration *selbstkorrigierend bleibt*, so dass der Prozess für ein Ausgangspolynom  ${}^rQ(x)$  auf  $P_r(x)$  und  $\xi_r$  zielt. Wir untersuchen dazu die Fortpflanzung einer Verfälschung bei der abgekürzten Iteration. Das Iterationspolynom

$${}^rQ^{(i)}(x) = \sum_1^n \xi_v^i P_v(x)$$

sei durch Rundungsfehler entsteht, statt dessen liegt das Polynom

$${}^r\tilde{Q}^{(i)}(x) = \sum_1^{r-1} \varepsilon_v \xi_v^i \bar{P}_v(x) + \sum_r^n (1 + \varepsilon_v) \xi_v^i \bar{P}_v(x) \quad (56)$$

vor, wo  $|\varepsilon_v \xi_v^i| \ll 1$  ist. Wird nun durch Iteration mit  $x \bmod P(x)$  die theoretische Folge  ${}^r\tilde{Q}^{(i+1)}(x), \dots, {}^r\tilde{Q}^{(i+n-1)}(x)$  hergestellt, so ergibt sich durch gewichtete Summierung

$${}^r\tilde{Q}^{(2i)}(x) = \sum_1^{r-1} (\varepsilon_v \xi_v^i)^2 \bar{P}_v(x) + \sum_r^n (1 + \varepsilon_v)^2 \xi_v^{2i} \bar{P}_v(x). \quad (57)$$

Man erkennt die stabilisierende Eigenschaft darin, dass die Anzahl von Stellen, die von Störkomponenten in den ersten  $r$  Teilräumen nicht beeinflusst werden, nach jedem Gesamtschritt etwa doppelt so gross ist als vorher und praktisch der Störeinfluss (bis auf neu entstehende Rundungsfehler) jeweils eliminiert wird.

Nur bei sehr nahe benachbarten Nullstellen und dann am Anfang der Iteration kann das Verfahren in eine andere Lösung ausbrechen [wenn etwa  $(1 + \varepsilon_r) \xi_r^i < (1 + \varepsilon_{r+1}) \xi_{r+1}^i$  wird]. Aber selbst dies bedeutet nur einen Wechsel in der Reihenfolge, in der die Nullstellen bestimmt werden. Ein labiler Zustand etwa das Gleichheitszeichen in der vorstehenden Ungleichung, kann unter dem Einfluss von Rundungsfehlern wiederum auf die Dauer nicht bestehen.

### 3. Rechenproben

Für die Iteration mit  $x \bmod P(x)$  existiert eine Rechenprobe, die mit einer Summenprobe der entsprechenden Matrixiteration zusammenfällt, nämlich

$${}^rQ^{(i+1)}(1) = {}^rQ^{(i)}(1) - {}^r\gamma_1^{(i)} P(1); \quad (58)$$

ebenso hat man für die gewichtete Summierung die Summenprobe

$${}^rQ^{(2i)}(1) = \sum_1^n {}^r\gamma_v^{(i)} {}^rQ^{(i+n-v)}(1). \quad (59)$$

#### 4. Stellenverlust durch Auslöschung

Ein Verlust an genauen Stellen durch Auslöschung tritt beim abkürzenden Schritt (52) nur ein, wenn der zu bestimmenden Nullstelle  $\xi_r$  eine oder mehrere Nullstellen relativ zu ihrem Betrag nahe benachbart sind. Man erkennt dies aus der Betrachtung des (für numerisch gegebene Polynome meist idealisierten) Grenzfalls mehrfacher Nullstellen<sup>12)</sup>. Es treten dann höhere Elementarteiler der begleitenden Matrix  $\mathfrak{A}$  auf; konvergenzbeschleunigende Prozesse, wie die Abkürzung oder die Bildung der ersten normal konvergenten Folge unter den abgeleiteten Iterationsfolgen, führen zwangsläufig zum Auftreten von Differenzen annähernd gleicher Zahlen, also zu einem Genauigkeitsverlust durch Auslöschung führender Ziffern.

Bei der Wahl von  $P'(x)$  als Ausgangspolynom wird das Auftreten von Elementarteilern theoretisch zwar verhindert, praktisch jedoch im Hinblick auf Rundungsfehler nur ein labiler Zustand hergestellt. Die Abkürzung der Iteration als Spezialfall von § 4 ist in diesem Fall – wenigstens unmittelbar – nicht möglich, da die zu verwendende Matrix  $\mathfrak{T}^{-1}$  gerade im Falle mehrfacher Nullstellen nicht existiert. Es besteht jedoch eine Möglichkeit, die über den bisher diskutierten Rahmen hinausgeht. Wird nämlich der unveränderte Prozess der abgekürzten Iteration von § 2, beginnend mit dem Ausgangspolynom  $Q^{(\beta_0)}(x) = P'(x)$  oder allgemeiner  $x^z P'(x) \bmod P(x)$ , durchgeführt, so entscheidet über die Konvergenz, welcher der Ausdrücke  $\xi_m^z P'(\xi_m)$  ( $m = 1, \dots, n$ ) betragsmässig am grössten ist. Da  $P'(\xi_m)$  für relativ nah benachbarte Nullstellen sehr klein ist und für mehrfache ganz verschwindet, greift das Verfahren nun zunächst die am besten isolierten Nullstellen an und zeigt dabei überhaupt keine Elementarteilerschwierigkeiten.

#### 5. Eigenwertproblem

Grundsätzlich überträgt sich die Diskussion der Abschnitte 1 bis 4 sinngemäss auf die praktische Lösung von Eigenwertproblemen nach § 4, insbesondere hat man nach (47) wiederum eine Stabilisierung durch den Abkürzungsschritt. Wenn neben den Eigenwerten auch die zugehörigen Rechts- und Linkseigenvektoren gesucht sind, hat das Verfahren den Vorteil, dass wegen der Selbstkorrektur eine Nachiteration entfallen kann. Aufwandsmässig ist jedoch fast immer der Weg über die Bestimmung des Säkularpolynoms günstiger, da man dieses schon nach dem Verfahren von FRAZER, DUNCAN und COLLAR [9] als Lösung von  $\sum_{v=0}^{n-1} a_v t_v = -t_u$  mit demselben Aufwand erhält, den eine einzige Berechnung von  $t_{\beta_j} \mathfrak{T}^{-1}$  erfordert. Zur Bestimmung der Eigenvektoren ist die unmittelbare Kenntnis der Interpolationspolynome  $P_r(x)$  von

<sup>12)</sup> Vgl. [4], § 4.

besonderem Vorteil; im Falle einfacher Eigenwerte hat man bekanntlich

$$P_r(\mathfrak{U}) = K_r = \mathfrak{x}_r \mathfrak{u}_r. \quad (60)$$

Man kann diese Beziehung auf einen Zeilen- oder Spaltenvektor anwenden um  $\mathfrak{u}_r$  bzw.  $\mathfrak{x}_r$  zu erhalten. Wiederholt man den Prozess, so erhält man damit auch eine wirksame Nachiteration.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. C. AITKEN, Proc. roy. Soc. Edinb. 46, 289 (1926).
- [2] A. C. AITKEN, Proc. roy. Soc. Edinb. 51, 80 (1931).
- [3] A. C. AITKEN, Proc. roy. Soc. Edinb. 57, 172 (1937).
- [4] F. L. BAUER, S.B. bayer. Akad. Wiss. 1954, 275.
- [5] D. BERNOULLI, Comm. Acad. Sci. Petropol. III (1732).
- [6] W. J. DUNCAN und A. R. COLLAR, Phil. Mag. [19] 7, 197 (1935).
- [7] TH. C. FRY, Quart. appl. Math. 3, 189 (1945).
- [8] E. FÜRSTENAU, *Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Koeffizienten* (Marburg 1860).
- [9] R. A. FRAZER, W. J. DUNCAN und A. R. COLLAR, *Elementary Matrices* (Cambridge 1938).
- [10] J. L. LAGRANGE, *Résolution des équations numériques*, Werke, Note 6.
- [11] R. MISES und H. POLLACZEK-GEIRINGER, Z. angew. Math. Mech. 9, 58 und 152 (1929).
- [12] E. J. ROUTH, *Die Dynamik der Systeme starrer Körper*, Bd. 2 (Leipzig 1898).

### Summary

One complete step of the abbreviated iteration consists of  $n$  single steps ( $n$  being the degree of the polynomial) of the common Bernoullian iteration in a variant based on LAGRANGE's method. This kind of iteration, the advantages of which seem to be little known, particularly makes possible the aforementioned abbreviation in the form of a weighted summation, the weight factors being determined immediately during the process.

But for trivial changes of scale factors the entire iteration may be set up without divisions. Therefore it is well adapted to the determination of zeros of polynomials with complex coefficients.

Our iteration process gives not only the zero to be determined but also directly the residual polynomial without the respective linear factor. In the case of two or more dominating roots of equal modulus the iteration process does not converge but by successive processes analogous to the 'cross-multiplication' of ROUTH a derived sequence may be formed which again converges to the polynomial of the remaining zeros.

The original polynomial may be used without any change for the determination of each zero and there is no carrying of rounding error. Each iteration run is self-correcting and may be checked easily.

(Eingegangen: 6. Dezember 1954.)



# On the Error Function of a Complex Argument

By JOSEPH KESTIN, Providence, R. I., USA<sup>1)</sup>, and  
LEIF N. PERSEN, Trondheim, Norway<sup>2)</sup>

## Introduction

The error function of a complex argument and allied functions occur in many problems of physics or engineering. They occur, for example, in the theory of heat conduction, particularly when non-steady heat conduction through stratified media is concerned as well as in problems of electro-chemical diffusion. Among the additional fields of application, electrical transients, electromagnetic theory, and rocket ballistics may be mentioned. The application of the error function to problems in statistics and of the allied Fresnel integrals to classical diffraction problems is also very well known.

In spite of their great usefulness, the tabulation of the error and related functions of a complex argument has not progressed very far because of their complexity as well as because of the large amount of numerical work involved. ROSSER [1<sup>3)</sup>] made a comprehensive study of the methods of integrating the functions

$$\int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi \quad \text{and} \quad \exp(z^2) \int_z^\infty \exp(-\xi^2) d\xi$$

and prepared suitable auxiliary tables. CLEMMOW and Miss MUNFORD [2<sup>]</sup> gave a short table of values of the function

$$\begin{aligned} G(z) &= \exp\left(\frac{1}{2} i \pi z^2\right) \int_{z \sqrt{\pi/2}}^\infty \exp(-i \xi^2) d\xi \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \exp\left(\frac{1}{2} i \pi z^2\right) \int_z^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} i \pi \zeta^2\right) d\zeta. \end{aligned}$$

SKWIRZYNSKI [3] prepared a short table of the complementary error function

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{i\infty}^{i\infty} \exp \zeta^2 d\zeta.$$

<sup>1)</sup> Brown University.

<sup>2)</sup> Norges tekniske høyskole.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 39.

In all these papers the integration has been performed by more or less direct methods, principally by a series expansion. Recently CAHILL of the National Bureau of Standards [4] has undertaken a programme of computation with the aid of SEAC by the general code for evaluating confluent hypergeometric functions, making use of the identity

$$\operatorname{erf} z = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2\right).$$

Finally it should be mentioned that LAIBLE [5] prepared a relief chart of the error function

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi,$$

calculated the first five zeros, gave an asymptotic expression for the zeros, and indicated a graphical method for the tracing of lines of constant modulus and phase angle.

The preceding methods, apart from being tedious and time-consuming, do not lead to simple expressions for the real and imaginary parts of the function.

In the present note we wish to give a transformation which seems to us to lead to a simple expression for the related function

$$K(z) = z \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z). \quad (1)$$

Explicit formulae for the real and imaginary parts of this function

$$K(z) = K_r(x, y) + i K_i(x, y) \quad (2)$$

$$z = x + i y \quad (2a)$$

are obtained in terms of elementary functions and two definite integrals. The resulting formulae facilitate integration along lines passing through the origin, i.e. for  $z$  varying at a constant phase angle.

### The Transformation

Recently the authors encountered a problem involving the calculation of slow torsional oscillations of a disk [6] and of bodies of revolution [7] where the transformation now to be explained rendered good service.

Let  $\alpha$  and  $\bar{\alpha}$  denote two complex conjugate numbers and consider the two identities:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{s+\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{s+\bar{\alpha}}} &\equiv \frac{\bar{\alpha} - \alpha}{(\sqrt{s+\alpha})(\sqrt{s+\bar{\alpha}})}, \\ \frac{1}{\sqrt{s+\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{s+\bar{\alpha}}} &\equiv \frac{2\sqrt{s+(\alpha+\bar{\alpha})}}{(\sqrt{s+\alpha})(\sqrt{s+\bar{\alpha}})}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Putting

$$\alpha = a + i b \, , \quad \bar{\alpha} = a - i b \, , \tag{4}$$

we can rewrite the identities (3) to yield

$$\left. \begin{aligned} D(s) &= \frac{1}{\sqrt{s+\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{s+\bar{\alpha}}} \equiv -\frac{2ib}{(\sqrt{s+\alpha})(\sqrt{s+\bar{\alpha}})} \, , \\ S(s) &= \frac{1}{\sqrt{s-\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{s+\bar{\alpha}}} = \frac{2\sqrt{s+2a}}{(\sqrt{s+\alpha})(\sqrt{s+\bar{\alpha}})} \, . \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

We now take the inverse Laplace transforms of the left- and right-hand sides of equations (5). The left-hand sides, denoted by the subscript *l* can be integrated by reference to tables [8], [9], and we have

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s-\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{s+\bar{\alpha}}} \right\} = \frac{1}{\pi t} F(\alpha | t) \, , \tag{6}$$

where

$$F(z) = \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z) \, . \tag{7}$$

Employing the notation

$$\mathfrak{L}^{-1} \{ D(s) \} = D(t) \, , \text{ etc. } ,$$

we have

$$D_l(t) = \bar{\alpha} F(\bar{\alpha} \sqrt{t}) - \alpha F(\alpha \sqrt{t}) \, , \quad S_l(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} - \alpha F(\alpha \sqrt{t}) + \bar{\alpha} F(\bar{\alpha} \sqrt{t}) \, . \tag{8}$$

The right-hand sides of the identities in equations (5) can now be integrated directly noting that the integrands have simple poles at  $s_1 = \alpha^2$  and  $s_2 = \bar{\alpha}^2$  and branch points at the origin. The residues will be expressed by exponentials, and hence will lead to damped harmonic oscillations. The contributions from the branch points will be given in the form of definite integrals, as shown in the Appendix.

Performing the somewhat lengthy but standard computations, we find

$$\left. \begin{aligned} K_r(\alpha | \bar{t}) &= \frac{1}{\pi} + 2 \sqrt{\bar{t}} \exp[(a^2 - b^2) \bar{t}] \{ a \cos(2 a b \bar{t}) - b \sin(2 a b \bar{t}) \} \\ &\quad + (b^2 - a^2) \sqrt{\bar{t}} P_1(a, b, \bar{t}) - \sqrt{\bar{t}} P_2(a b \bar{t}) \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

and

$$\left. \begin{aligned} K_i(\alpha \sqrt{t}) &= + 2 \sqrt{t} \exp[(a^2 - b^2) t] \{ a \sin(2 a b t) + b \cos(2 a b t) \} \\ &\quad + 2 a b \sqrt{t} P_1(a, b, t) \, , \end{aligned} \right\} \tag{9a}$$

where

$$P_1(a, b, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} \exp(-\xi t) d\xi}{\xi^2 + 2(a^2 - b^2)\xi + (a^2 + b^2)^2}, \quad (10)$$

$$P_2(a, b, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{3/2} \exp(-\xi t) d\xi}{\xi^2 + 2(a^2 - b^2)\xi + (a^2 + b^2)^2} \quad (10a)$$

all the quantities now being real. It should be noted that the integrands in equations (10) and (10a) are always positive. The calculation leads, of course, also to an expression for  $K(\alpha\sqrt{t})$  which, however, need not be considered as it follows from  $K(\alpha\sqrt{t})$  by substituting  $\bar{\alpha}$  for  $\alpha$ .

### Alternative Forms

In order to obtain formulae for  $K(z)$ , with  $z = x + iy$ , we put

$$b = 1, \quad \sqrt{t} = y, \quad a = \frac{x}{y}, \quad (11)$$

so that  $x + iy = \alpha\sqrt{t}$ . Hence

$$\left. \begin{aligned} K_r(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 \exp(x^2 - y^2) \{ x \cos(2xy) - y \sin(2xy) \} \\ &\quad + \frac{y^2 - x^2}{y} P_1(x, y) - y P_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} K_i(x, y) &= + 2 \exp(x^2 - y^2) \{ x \sin(2xy) + y \cos(2xy) \} \\ &\quad + 2x P_1(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

$$P_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} \exp(-\xi y^2) d\xi}{\xi^2 + 2[(x/y)^2 - 1]\xi + [(x/y)^2 + 1]^2}, \quad (12b)$$

$$P_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{3/2} \exp(-\xi y^2) d\xi}{\xi^2 + 2[(x/y)^2 - 1]\xi + [(x/y)^2 + 1]^2}. \quad (12c)$$

It is, of course, sufficient to perform calculations in the first quadrant, as the representations in the remaining quadrants are mirror images with respect to the axes of co-ordinates. The zeros of  $K(z)$ , which are identical with those of  $\operatorname{erfc} z$  are given by solving the two simultaneous equations

$$K_r(x, y) = 0, \quad K_i(x, y) = 0. \quad (13)$$

For large values of  $t$ , i.e. for large values of  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  the terms with the functions  $P_1$  and  $P_2$  may be neglected. Hence the asymptotic zeros are found



from the system

$$x \cos(2xy) - y \sin(2xy) = -\frac{\exp(y^2 - x^2)}{2\sqrt{\pi}}, \quad \tan(2xy) = -\frac{y}{x}. \quad (13a)$$

The forms (12) to (12c) give a better insight into the behaviour of the function  $K(z)$  and hence into that of  $F(z)$  and  $\operatorname{erfc}(z)$  than the standard formulae because the oscillation appears explicitly and not under the integral sign. Corresponding expressions for the real and imaginary parts of  $F(z)$ ,  $\operatorname{erfc}(z)$ , and  $\operatorname{erf}(z)$  can be easily deduced.

Expressions in polar co-ordinates are obtained by putting

$$z = r e^{i\varphi}, \quad \text{i.e.} \quad a = \cos \varphi; \quad b = \sin \varphi; \quad \sqrt{t} = r. \quad (14)$$

Hence

$$K_r(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2r \exp(r^2 \cos 2\varphi) \cos(\varphi + \psi) - r P_2(r, \varphi) - r(\cos 2\varphi) P_1(r, \varphi), \quad (14a)$$

$$K_i(r, \varphi) = +2r \exp(r^2 \cos 2\varphi) \sin(\varphi + \psi) + r(\sin 2\varphi) P_1(r, \varphi), \quad (14b)$$

where

$$\psi = r^2 \sin 2\varphi, \quad (14c)$$

$$P_1(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{1/2} \exp(-r^2 \xi)}{\xi^2 + 2\xi \cos 2\varphi + 1} d\xi, \quad (14d)$$

$$P_2(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{3/2} \exp(-r^2 \xi)}{\xi^2 + 2\xi \cos 2\varphi + 1} d\xi. \quad (14e)$$

The Fresnel integral is related to the value of  $K(z)$  for  $\varphi = \pi/4$ . In this particular case

$$K_r\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2r \cos\left(\frac{\pi}{4} + r^2\right) - r \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{3/2} \exp(-r^2 \xi)}{\xi^2 + 1} d\xi,$$

$$K_i\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = +2r \sin\left(\frac{\pi}{4} + r^2\right) + r \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{1/2} \exp(-r^2 \xi)}{\xi^2 + 1} d\xi.$$

## APPENDIX

### Derivation of the Result Used in Equations (9) and (9a)

We now proceed to sketch the method of finding the inverse Laplace transforms of the right-hand sides of equations (3), i.e. to calculate  $D_r$  and  $S_r$ .

From the first of equations (5), we have

$$D_r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \frac{2 i b e^{st} ds}{(\sqrt{s} + \alpha)(\sqrt{s} + \bar{\alpha})}. \quad (\text{A-1})$$

The integrand has simple poles at  $s_1 = -\alpha^2$  and  $s_2 = -\bar{\alpha}^2$  and a branch point at the origin. The residues are:

at  $s_1 = -\alpha^2$

$$R(s_1) = -2\alpha \exp(\alpha^2 t), \quad (\text{A-2})$$

at  $s_2 = -\bar{\alpha}^2$

$$R(s_2) = +2\bar{\alpha} \exp(\bar{\alpha}^2 t). \quad (\text{A-3})$$

Taking a cut along the real negative axis in the  $s$ -plane, and putting  $s = \xi e^{i\Theta}$ , we find that

$$(\sqrt{s} + \alpha)(\sqrt{s} + \bar{\alpha}) = \xi \exp(i\Theta) + (\alpha + \bar{\alpha}) \xi^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} i \Theta\right) + \alpha \bar{\alpha}$$

for  $\Theta = -\pi$ :

$$(\sqrt{s} + \alpha)(\sqrt{s} + \bar{\alpha}) = -\xi - (\alpha + \bar{\alpha}) \xi^{1/2} i + \alpha \bar{\alpha},$$

for  $\Theta = +\pi$ :

$$(\sqrt{s} + \alpha)(\sqrt{s} + \bar{\alpha}) = -\xi + (\alpha + \bar{\alpha}) \xi^{1/2} i + \alpha \bar{\alpha},$$

and the contribution from the branch point becomes

$$\begin{aligned} B_1 = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 - \frac{2 i b \exp(-\xi t) d\xi}{(-\xi + \alpha \bar{\alpha}) - i(\alpha + \bar{\alpha}) \xi^{1/2}} \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} - \frac{2 i b \exp(-\xi t) d\xi}{(-\xi + \alpha \bar{\alpha}) + i(\alpha + \bar{\alpha}) \xi^{1/2}}. \end{aligned}$$

Evaluating and substituting  $\alpha = a + ib$  and  $\bar{\alpha} = a - ib$ , we obtain

$$B_1 = -\frac{4ab}{\pi} i \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} \exp(-\xi t) d\xi}{\xi^2 + 2(a^2 - b^2)\xi + (a^2 + b^2)^2}. \quad (\text{A-4})$$

Thus

$$D_r(t) = 2\bar{\alpha} \exp(\bar{\alpha}^2 t) - 2\alpha \exp(\alpha^2 t) - \frac{4ab}{\pi} i \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} \exp(-\xi t) d\xi}{\xi^2 + 2(a^2 - b^2)\xi + (a^2 + b^2)^2}. \quad (\text{A-5})$$

Substituting for  $\alpha$  and  $\bar{\alpha}$  we can transform this to

$$D_r(t) = -4i \{ \exp[(a^2 - b^2)t] [a \sin(2abt) + b \cos(2abt)] + abP_1 \}, \tag{A-6}$$

where  $P_1$  was given in equation (10).

Proceeding in a similar manner, we find

$$S_r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(2\sqrt{s} + 2a) \exp(st) ds}{(\sqrt{s} + \alpha)(\sqrt{s} + \bar{\alpha})}. \tag{A-7}$$

Making use of the preceding results, it can be shown that

$$\left. \begin{aligned} S_r(t) = & -4 \exp[(a^2 - b^2)t] [a \cos(2abt) - b \sin(2abt)] \\ & -2(b^2 - a^2)P_1 + 2P_2, \end{aligned} \right\} \tag{A-8}$$

where  $P_2(a, b, t)$  was given in equation (10a). Equating  $D_l = D_r$  and  $S_l = S_r$  we are led to the result in equations (9) and (9a).

REFERENCES

[1] J. B. ROSSER, *Theory and Application of  $\int_0^z e^{-x^2} dx$  and  $\int_0^z e^{-t^2 y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx$* , Rep. OSRD 5861 prepared by Allegany Ballistics Laboratory, Contr. OEMsr-273, 1945.

[2] P. C. CLEMMOW and C. M. MUNFORD, *A Table of  $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \pi\right)} e^{\frac{1}{2} i \pi y^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} i \pi x^2} dx$  for Complex Values of  $x$* , Phil. Trans. [A] 245, 189 (1952).

[3] W. SKWIRZYNSKI, *Evaluation of  $\operatorname{erfc}(z)$* , Marconi's Wireless Telegraph Co., Res. Division, Rep. RD. 992, Great Baddow, Essex, 1952 (Unpublished).

[4] W. F. CAHILL, *A Short Table of the Error Function of Complex Arguments*, NBS Project 1102-10-1104, Report 3034, Washington, 1953.

[5] T. LAIBLE, *Höhenkarte des Fehlerintegrals*, ZAMP 2, 484 (1951).

[6] J. KESTIN and L. N. PERSEN, *Slow Oscillations of an Infinite Plate and an Infinite Disk in a Viscous Fluid*, Brown University Report AF-891/1, Providence, R. I., 1954 [Air Res. & Dev. Command Contract AF18(600)-891].

[7] J. KESTIN and L. N. PERSEN, *Small Oscillations of Bodies of Revolution in a Viscous Fluid*, Brown University Report AF-891/2, Providence, R. I., 1954 [Air Res. & Dev. Command Contract AF18(600)-891].

[8] G. DOETSCH, *Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch* (Berlin 1947).

[9] H. BATEMAN, Manuscript project, *Tables of Integral Transforms* (McGraw-Hill, New York 1954).

Zusammenfassung

In der Einleitung werden die wichtigsten bisherigen Arbeiten über die Fehlerfunktion mit komplexem Argument kurz besprochen. Die der vorliegenden Unter-

suchung unterworfenen Funktion  $K(z)$  ist in Gleichung (1) definiert. Mit Hilfe der Laplace-Transformation und ihrer Umkehrformel wird gezeigt, wie sich die zwei Identitäten in Gleichung (3) behandeln lassen, so dass sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Funktion  $K(z)$  sich in zwei Teile aufspalten lässt, was aus den Gleichungen (9) und (9a) hervorgeht. Der erste Teil kann durch elementare Funktionen ausgedrückt werden, während der zweite Teil sich durch zwei Integrale darstellen lässt. Für die praktische Anwendung der angegebenen Ausdrücke sind in den Gleichungen (12), (12a) und (14a), (14b) die Ausdrücke in kartesischen bzw. polaren Koordinaten umgeschrieben worden. Der Vorteil der angegebenen Aufspaltung liegt darin, dass die in den Ausdrücken auftretenden Integrale monoton abnehmende Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $(x, y)$  darstellen und sich deswegen leicht numerisch ausrechnen lassen. Der Schwingungsanteil der Funktion  $K(z)$  ist ausschliesslich durch elementare Funktionen ausgedrückt. Im Appendix ist der Rechnungsvorgang, der zu den angegebenen Ausdrücken führt, näher umschrieben.

(Received: February 10, 1955.)

## Äquivalenzsatz, Ähnlichkeitssätze für schallnahe Geschwindigkeiten und Widerstand nicht angestellter Körper kleiner Spannweite

Von FRIEDRICH KEUNE und KLAUS OSWATITSCH, Stockholm<sup>1)</sup>

Die erste Arbeit über die Übertragbarkeit von theoretischen oder experimentellen Resultaten an nicht angestellten Rotationskörpern auf Körper kleiner Spannweite stammt von WARD [1]<sup>2)</sup>. Er bewies mit Hilfe der Laplace-Transformationen und des Impulssatzes, dass der Widerstand eines Körpers kleiner Spannweite in Überschallströmung innerhalb des Linearisierungsbereiches der Differentialgleichungen gleich ist dem Widerstand eines Rotationskörpers gleicher Querschnittverteilung  $Q(x)$ . Solche Körper gleicher Verteilung der Querschnittflächen-Inhalte (Fig. 1) sind der Angelpunkt aller folgenden Überlegungen. Sie seien als «äquivalente Körper» kleiner Spannweite<sup>3)</sup> bezeichnet. Eine wesentliche Voraussetzung des Satzes von WARD liegt in der Forderung, dass die Querschnittänderung am Körperende  $x = x_0$  verschwinden muss  $[Q_x(x_0) = 0]$ , das heisst der äquivalente Rotationskörper muss entweder zylindrisch oder kegelig enden (Figur 2a und 2c).

Unabhängig von WARD und auf anderem Wege wurden Körper kleiner Spannweite im Linearisierungsbereich der Unter- und Überschallströmung von

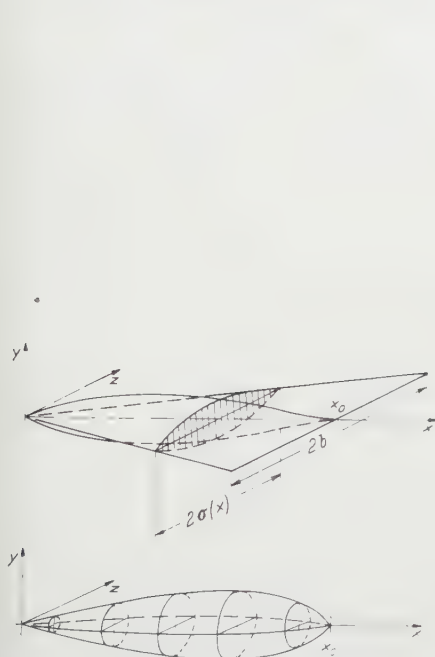
<sup>1)</sup> Kungl. Tekniska Högskolan, Institution Gasdynamik.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern [] verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 63.

<sup>3)</sup> Vergleiche auch Figur 3.

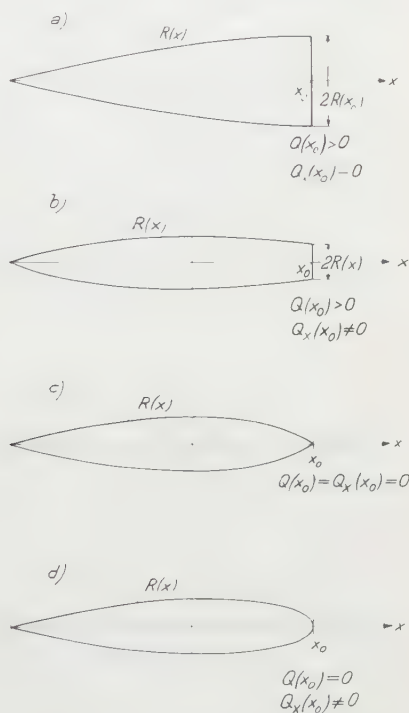


KEUNE und OSWATITSCH 2, 3 untersucht und die Rechnungen auf die Geschwindigkeitsverteilung solcher Körper ausgedehnt. Ausgehend von den Quellbelegungsintegralen für dünne Flügel kleiner Spannweite<sup>4)</sup> wurde gezeigt, dass sich die Störung der  $u$ -Komponente auf zwei Effekte zurückführen lässt. Der



Figur 1

Flügel kleiner Spannweite und äquivalenter Rotationskörper.



Figur 2

Die vier Typen von Rotationskörpern.

eine Anteil, die «zweidimensionale Querschnittströmung», gehorcht der Laplace-Gleichung für das Störungspotential ( $\infty$  Index für das Anströmgebiet)

$$\frac{u}{u_\infty} - 1 = \varphi_x, \quad \frac{v}{u_\infty} = \varphi_y, \quad \frac{w}{u_\infty} = \varphi_z, \quad (1)$$

in einzelnen Querschnitten

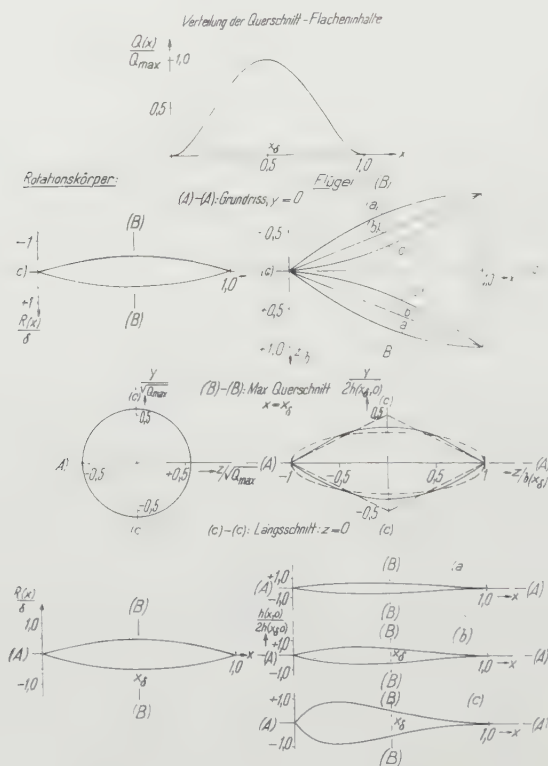
$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (2)$$

Dieser Teil erfüllt die Randbedingung am Körper in den einzelnen Querschnittebenen. Er ist für Überschall- und Unterschallströmung der gleiche.

<sup>4)</sup> Siehe etwa [4], S. 373 ff. und S. 383 ff.

Beim Problem angestellter unendlich dünner Platten, also in der hier nicht behandelten einfachen Theorie von JONES [5] tritt überhaupt nur diese Querschnittströmung auf. Sie führt auch in unmittelbarer Schallnähe zum Resultat, denn in Körperrnähe lässt sich die linearisierte wie die nichtlinearisierte gasdynamische Gleichung in diesem Fall auf die einfache Form (2) reduzieren.

Zu dieser die Körperform berücksichtigenden «Querschnittströmung» tritt bei nichtangestellten Körpern noch ein zweiter Effekt, der «Raumeinfluss». Er ergibt sich aus den Änderungen des Körperquerschnittes in Strömungsrichtung. Da seine Beiträge von den entlegeneren Körperteilen herkommen, hat er achsensymmetrischen Charakter. Es zeigt sich, dass dieser Raumeinfluss für alle äquivalenten Körper gleich ist.



Figur 3

Beispiel für äquivalente Körper. Der Spindel als äquivalentem Rotationskörper [ $Q(x) = 16 Q_{max} \times x^2(1-x^2)$  mit der Körpertiefe als Einheit] sind drei Flügel unterschiedlicher Grundrissform gegenübergestellt. Die Querschnittform ist zunächst beliebig. Die Längsschnitte des Flügels in  $z=0$  sind für Querschnitte von der Form eines Parabelbogen-Zweieckes gezeichnet.  $Q_{max}$  und  $l$  sind frei wählbar. Für  $b=0,40$  und  $Q_{max}=0,02$  sind die Längsschnitte unverzerrt massgerecht.

Am 8. Internationalen Kongress für theoretische und angewandte Mechanik hat OSWATITSCH gezeigt [6], dass innerhalb einer angebbaren Genauigkeitsgrenze der Satz von der Gleichheit der Raumeinflüsse äquivalenter Körper auch in Schallnähe gilt. Dieser Äquivalenzsatz soll zunächst in anschaulicher Weise hergeleitet werden. Sein exakter, an mehreren Beispielen erläuteter Beweis erschien an anderer Stelle [7]. Figur 3 gibt einen Einblick in die Mannigfaltigkeit geometrischer Formen «äquivalenter Körper».

Mit Hilfe des Äquivalenzsatzes ist die Geschwindigkeitsverteilung an Deltaflügeln<sup>5)</sup>, Pfeilflügeln und ähnlichem mit den in Schallnähe üblichen Spannweiten auf die Geschwindigkeitsverteilung an Rotationskörpern zurückgeführt. Die Bestimmung der letzteren bleibt einem allerdings nicht erspart. Mit Hilfe von Ähnlichkeitssätzen für Rotationskörper [8] und des Äquivalenzsatzes ist es jedoch möglich, theoretische oder experimentelle Ergebnisse auf Flügel oder Körper umzurechnen, welche durch affine Verzerrung in Spannweiten- oder Dickenrichtung auseinander hervorgehen.

### 1. Der Äquivalenzsatz

Der Körper (Figur 1) sei im folgenden durch Quellbelegung in seiner Grundrissfläche  $[(x, z)\text{-Ebene, } z \text{ in Spannweitenrichtung}]$  gegeben:

$$q(x, z) = 2 \frac{v(x, 0, z)}{u_\infty}; \quad (3)$$

dabei sind die Komponenten  $u, v, w$  der Störgeschwindigkeit parallel zu den Achsen  $x, y, z$  angenommen. Mit der halben lokalen Flügeldicke

$$y = h(x, z) \quad (4)$$

ist die örtliche Quellstärke bei dünnen Flügeln direkt durch die Dickenänderung in Anströmrichtung ( $x$ ) bestimmt:

$$q(x, z) = 2 h_x(x, z). \quad (5)$$

Für die Änderung der Querschnittsfläche  $Q_x(x)$  gilt für dünne und dicke Flügel

$$Q_x(x) = \int_{-\sigma(x)}^{+\sigma(x)} q(x, t) dt. \quad (6)$$

Die halbe Breite  $\sigma(x)$  der Quellbelegung in Spannweitenrichtung stimmt bei dünnen Flügeln mit der lokalen Halbspannweite überein. Für dicke Flügel mag

<sup>5)</sup> Unter «Deltaflügel» werden hier nicht nur Dreieckflügel, sondern alle die Flügel verstanden, die in der Vorderkante keine endliche Spannweite haben («pointed bodies»).

sie grösser sein als  $\sigma(x)$ , ausserdem ist dann Gleichung (5) nicht mehr genau genug<sup>6)</sup>. Wie Körperform und  $q(x, t)$  in diesen Fällen zusammenhängen, braucht hier jedoch nicht untersucht zu werden. Für jeden Körper kleiner Spannweite ist der äquivalente Rotationskörper durch die Quellbelegung mit Gleichung (6) gegeben.

Aus der Quellbelegung folgt analog zur Profiltheorie für das zweidimensionale Potential der Querschnittströmung an jeder Stelle  $x$  des Körpers:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma(x)}^{\sigma(y)} q(x, t) \ln \sqrt{y^2 + (t - z)^2} dt. \quad (7)$$

Es erfüllt die Laplace-Gleichung (2) und liefert die nach Gleichung (3) geforderten  $v$ -Komponenten auf der Projektionsebene. Die  $u$ -Komponente der Querschnittströmung ist dann

$$\varphi_x = + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\sigma(x)}^{\sigma(x)} q(x, t) \ln \sqrt{y^2 + (t - z)^2} dt. \quad (8)$$

Die Differentiation ist wegen der von  $x$  abhängigen Grenzen nicht unter das Integral gezogen.

Beim äquivalenten Rotationskörper konzentriert sich die Quellbelegung auf einen schmalen Streifen  $2\varepsilon$  an der Achse, und man erhält mit Gleichung (6):

$$\varphi_{x \text{ äq.R.K.}} = + \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{y^2 + z^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} q(x, t) dt = \frac{1}{2\pi} Q_{xx}(x) \ln \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (9)$$

Der Raumeinfluss der  $u$ -Komponente ist definitionsgemäss die Differenz zwischen gesamter  $u$ -Störung und ebener Querschnittströmung. Da der Raumeinfluss in Körperrnähe unabhängig vom Achsenabstand ist, kann sein Wert auf der Flügeloberfläche  $y = h$  mit dem Wert auf der Oberfläche des äquivalenten Rotationskörpers

$$\sqrt{y^2 + z^2} = R(x), \quad Q(x) = \pi R^2 \quad (10)$$

verglichen werden. Im folgenden sollen die Werte auf der Projektionsfläche des Flügels ( $y = 0$ ) betrachtet werden, die bei dünnen Flügeln mit jenen auf der Oberfläche nahezu übereinstimmen. Bei dicken Flügeln sind die Unterschiede zwischen den Werten auf der Grundrissfläche und auf der Oberfläche des Flügels nach KEUNE [9], [10] durch einfache Beziehungen bestimmt.

<sup>6)</sup> Vergleiche [10], Gleichung 14.



Die Definition des Raumeinflusses führt damit unter Verwendung von Gleichung (8) und Gleichung (9) zur analytischen Formulierung des Äquivalenzsatzes<sup>7)</sup>:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u(x, 0, z)}{u_\infty} - 1 \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma(x)}^{\sigma(x)} h_x(x, t) \ln |t - z| dt \\ & = \left( \frac{u(x, R)}{u_\infty} - 1 \right)_{aq, R.K.} - \frac{1}{2\pi} Q_{xx}(x) \ln R(x). \quad (11) \end{aligned}$$

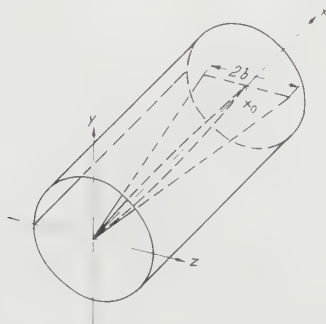
Zu einer Fehlerabschätzung für Gleichung (11) führt die folgende Überlegung.

Die  $q_x$ -Verteilung des Flügels, Gleichung (8), geht bereits in wenigen  $\sigma(x)$ -Abständen von der  $x$ -Achse sehr rasch in die achsensymmetrische Verteilung, Gleichung (9), über, wie eine Entwicklung des Logarithmus für

$$\sqrt{y^2 + z^2} > \sigma(x) \geq t$$

zeigt.

Daraus folgt aber die einleuchtende Tatsache, dass sich die Geschwindigkeitsverteilung des Flügels kleiner Spannweite von jener des Rotationskörpers nur innerhalb eines koaxialen Zylinders wesentlich unterscheidet, der einen Durchmesser von der Grössenordnung der Spannweite  $2b$  hat (Figur 4).



Figur 4  
Bereich der Kompressibilitätsquellen.

Wird die vereinfachte gasdynamische Gleichung

$$(1 - M^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{u_\infty} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v}{u_\infty} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w}{u_\infty} \right) = 0 \quad (12)$$

für den Raumeinfluss geschrieben, so erhält sie mit Rücksicht auf Gleichung (2)

<sup>7)</sup> Vergleiche [7], Gleichung 75.

die Form:

$$(1 - M^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{u}{u_\infty} - 1 \right) - \varphi_x \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{v}{u_\infty} - \varphi_y \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{w}{u_\infty} - \varphi_z \right] = (1 - M^2) \varphi_{xx} \quad (13)$$

mit einem «Quellglied» auf der rechten Seite.

Gleichung (13) gilt sowohl für den Körper kleiner Spannweite als auch für den äquivalenten Rotationskörper, indem auf der rechten Seite von Gleichung (13)  $\varphi_{xx}$  nach Gleichung (8) und Gleichung (9) zu setzen ist.

Im Fall der linearen Gleichung mit  $1 - M^2 = \text{const}$  führt die Differenz beider Gleichungen zur gasdynamischen Gleichung für die Differenz der Raumeinflüsse mit einem Quellglied auf der rechten Seite, welches nur in dem in Figur 4 abgegrenzten Raume wesentlich in Erscheinung tritt. Dabei sind die Beiträge in Achsennähe wegen ihrer geringen räumlichen Ausdehnung besonders gering. Bei einer Berechnung sind die  $y$ - und die  $z$ -Achse am besten wie bei der Prandtl-Glauert-Analogie affin zu verzerren. Daraus folgt dann als Quellbeitrag die Grössenordnung von  $q_x$  des Flügels kleiner Spannweite

$$\frac{Q_{xx}(0)}{2\pi} \ln |b \sqrt{1 - M^2}|^8,$$

multipliziert mit dem um den Faktor  $1 - M^2$  vergrösserten Volumen (vgl. Figur 4 mit  $\alpha_0 = 1$ ). So kommt man im linearen Fall zum Fehler

$$b^2 (1 - M^2) \frac{Q_{xx}(0)}{2\pi} \ln |b \sqrt{1 - M^2}| \quad (14)$$

von Gleichung (11).

Im nichtlinearen, schallnahen Gebiet bleibt die Tatsache bestehen, dass die wesentlichsten Unterschiede in den beiden zu vergleichenden Strömungsformen in der Nähe der Oberfläche des äquivalenten Rotationskörpers auftreten. Wird die Strömung am Flügel kleiner Spannweite als Störung der Strömung am Rotationskörper aufgefasst, so leuchtet es ein, dass bei der Entwicklung der Unterschiede beider Strömungen die mittlere Machzahl in Körpennähe des äquivalenten Rotationskörpers ausschlaggebend sein muss. Das heisst jedoch, dass mit einer solchen Machzahl die Abschätzung Gleichung (14) auch für die gesamte Schallnähe gilt.

## 2. Schallnahe Ähnlichkeit

Der Ableitung der Ähnlichkeitsgesetze für Flügel kleiner Spannweite sei eine kurze Ableitung der schallnahen Ähnlichkeit für Rotationskörper [8] voran-

<sup>8)</sup> Mit  $Q_{xx}(0)/2\pi$  als Quadrat des Tangens des halben Öffnungswinkels des äquivalenten Rotationskörpers, Gleichung (19).

gestellt. Wie in zahlreichen früheren Arbeiten<sup>9)</sup> sei der Faktor  $1 - M^2$  durch eine lineare Funktion von  $u$  genähert:

$$1 - M^2 = (1 - M_\infty^2) \left[ 1 - \frac{u - u_\infty}{c^* - u_\infty} \right]. \quad (15)$$

$c^*$  ist die kritische Geschwindigkeit,  $M_\infty$  und  $u_\infty$  der Anströmzustand. Man beachte, dass Gleichung (15) auch für  $M_\infty \rightarrow 1$  sinnvoll bleibt, weil gleichzeitig  $u_\infty \rightarrow c^*$  gilt.

Die gasdynamische Gleichung (12) und die Gleichung für Wirbelfreiheit ( $r^2 = y^2 + z^2$ ) lauten dann mit Gleichung (15):

$$\left. \begin{aligned} r \left[ (1 - M_\infty^2) - \lambda^2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v r}{u_\infty} \right) &= 0; \\ r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{u - u_\infty}{u_\infty} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{v r}{u_\infty} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wenn

$$\lambda^2 = \frac{1 - M_\infty^2}{(1/M_\infty^*) - 1} \approx \kappa + 1 \quad (17)$$

ist. Im Unterschall müssen in grossem Abstand vom Körper alle Störungen abgeklungen sein, eine hier stets erfüllte Randbedingung. Die Randbedingung auf der Achse ist:

$$r = 0: \frac{v r}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi} Q_x(x). \quad (18)$$

Zur Einführung neuer dimensionsloser Grössen wird die geometrische Grösse  $Q_{xx}(0)/2\pi$  herangezogen, welche mit dem halben Öffnungswinkel  $\vartheta_0$  der Körperspitze des äquivalenten Rotationskörpers wie folgt zusammenhängt:

$$\frac{Q_{xx}(0)}{2\pi} = \tan^2 \vartheta_0. \quad (19)$$

Dann seien:

$$\tilde{r}^2 = r^2 \frac{Q_{xx}(0)}{2\pi}; \quad \tilde{u} = \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \cdot \frac{2\pi}{Q_{xx}(0)}; \quad \tilde{v} r = \frac{v r}{u_\infty} \cdot \frac{2\pi}{Q_{xx}(0)}. \quad (20)$$

Die neuen Ausdrücke für die Geschwindigkeiten liegen im Wertebereich der Einheit. In den Variablen (20) lauten die Gleichungen (16) und (18):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} \left[ \frac{2\pi}{Q_{xx}(0)} (1 - M_\infty^2) - \lambda^2 \tilde{u} \right] \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v} r}{\partial \tilde{r}} &= 0; \\ \tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\partial \tilde{v} r}{\partial x} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{r} = 0: \quad \tilde{v} r = \frac{Q_x(x)}{Q_{xx}(0)}. \quad (22)$$

<sup>9)</sup> Vergleiche [4], Gleichung (IX, 9).

Affin verdickte Körper haben alle die gleiche Randbedingung (22). Ähnliche Lösungen erhält man aus der zusätzlichen Forderung der Gleichheit der Differentialgleichungen (21).

Eine Verschiedenheit der spezifischen Wärmen  $\alpha$  und der Werte  $\lambda^2$  in den Vergleichsbeispielen könnte durch Übergang zu den Grössen  $\tilde{u} \lambda^2$  und  $\tilde{v} \lambda^2$  in die Ähnlichkeitsgesetze einbezogen werden. Da diese weniger wichtige Verallgemeinerung die Ableitung belastet, wird auf sie verzichtet, und sowohl  $\alpha$  als auch  $\lambda^2$  werden als gleichbleibend vorausgesetzt.

Die Übereinstimmung der Differentialgleichungen (21) ist gewährleistet durch die Invarianz des Parameters

$$\frac{2\pi}{Q_{xx}(0)} (1 - M_\infty^2) = \text{const.} \quad (23)$$

In den Vergleichsfällen müssen demnach die Querschnitte proportional zu  $(1 - M_\infty^2)$  sein. Unter dieser Voraussetzung sind

$$\tilde{u}(x, \tilde{r}) \quad \text{und} \quad \tilde{v}(\tilde{r}(x, \tilde{r}))$$

in den Vergleichsfällen dieselben Funktionen. Für Rotationskörper wächst  $u$  in Punkten der Achse über alle Grenzen, im Gegensatz zur Profiltheorie, wo  $\tilde{u}(x; 0)$  endlich bleibt und dem Wert auf der Körperkontur gleichgesetzt werden kann. Daher ist es sinnlos, die logarithmisch-unendlichen  $u$ -Komponenten auf der Körperachse zu vergleichen. Deshalb wird hier auf den endlichen Raumeinfluss zurückgegriffen, der in Körperrnähe konstant gleich seinem Wert auf der Achse ist. Damit gilt an Rotationskörpern:

$$\tilde{u} = \frac{Q_{xx}(x)}{Q_{xx}(0)} \cdot \ln \tilde{r} - f(x) - \frac{2\pi}{Q_{xx}(0)} \cdot \frac{u(x, y, z)}{u_\infty} \cdot \frac{u_\infty}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{xx}(x)}{Q_{xx}(0)} \ln \left( r^2 \frac{Q_{xx}(0)}{2\pi} \right) \quad (24)$$

In den Vergleichsfällen sind die auf der rechten Gleichungsseite stehenden Ausdrücke Funktion von  $x$  allein. Zu den Ähnlichkeitsgesetzen für Schallnähe an Rotationskörpern kommt man mit Gleichung (24), indem man für  $r$  den Körperradius einsetzt.

Hier sei darauf hingewiesen, dass im Buch *Gasdynamik* von K. OSWATITSCH (Springer Verlag, Berlin 1952), in den schallnahen Ähnlichkeitsgesetzen auf Seite 355 vier gleichartige Druckfehler stehen. Die zweiten Ableitungen des Querschnittes – dort  $F_1''(x)$  und  $F_2''(x)$  – müssen umgekehrte Vorzeichen erhalten.

Die Ähnlichkeitsgesetze für Schallnähe und Schallanblasung an Flügeln kleiner Spannweite folgen nunmehr aus der Anwendung des Äquivalenzsatzes (11) auf das Gesetz (24) für Rotationskörper. Nach Division durch  $Q_{xx}(0)/2\pi$

erhält man die analytische Form:

$$\begin{aligned} \frac{2 \pi}{Q_{xx}(0)} \left[ \frac{u(x, y, z) - u_{\infty}}{u_{\infty}} - \frac{1}{2 \pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\sigma(x)}^{+\sigma(x)} q(x, t) \ln |y^2 + (t - z)^2| dt \right] \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{xx}(x)}{Q_{xx}(0)} \ln \frac{Q_{xx}(0)}{2 \pi} = \text{Funktion von } x, \end{aligned} \tag{25}$$

oder in Worten: Bei der Umrechnung auf einen Körper affin veränderten Querschnittverlaufes ändert sich die Mach-Zahl der Anströmung entsprechend Gleichung (23) und die  $u$ -Komponente entsprechend Gleichung (25) so, dass die linke Gleichungsseite die gleiche Funktion von  $x$  bleibt. Dabei kann die Querschnittform des Flügels beliebig geändert werden, wenn nur der Affinverzerrung der Fläche  $Q(x)$  genügt wird.

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall einer Affinverzerrung von Grundriss und Längsschnitt oder einer der beiden Schnitte. In diesem Falle ist  $Q_{xx}(0) \cdot 2 \pi$  proportional dem Produkt aus Halbspannweite  $b$  und Dickenverhältnis  $\delta$ , was allein schon aus den geometrischen Bedeutungen der Grössen folgt. Aus Gleichung (23) geht dann hervor, dass für solche affinverzerrte Flügel folgender Ähnlichkeitsparameter derselbe sein muss:

$$-\frac{1 - M_{\infty}^2}{\delta b} = \text{const.} \tag{26}$$

Bei allen Problemen kleiner Spannweite kommt es im wesentlichen nur darauf an, die  $u$ -Komponente an einer einzigen Stelle des Querschnittes zu kennen, da dann die  $u$ -Verteilung im ganzen Körperquerschnitt durch ein einfaches Integral (die Querschnittströmung) gegeben ist. Bei Flügeln wählt man am geeignetsten die  $u$ -Komponente auf der  $x$ -Achse  $u(x, 0, 0)$ , die praktisch der  $u$ -Komponente im Mittelschnitt auf dem Flügel gleichkommt. Auf der Achse tritt dann in Gleichung (25) der Ausdruck auf, der mit Gleichung (6) umgeschrieben wird:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{Q_{xx}(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\sigma(x)}^{\sigma(x)} q(x, t) \ln |t| dt \\ = - \frac{1}{Q_{xx}(0)} \cdot \frac{d}{dx} \left[ Q_{xx}(x) \ln \sigma(x) - 2 q(x, 0) \sigma(x) \int_0^1 \frac{q(x, t \sigma)}{q(x, 0)} \ln \frac{t}{\sigma(x)} d \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right) \right] \\ = \frac{Q_{xx}(x)}{Q_{xx}(0)} \ln b - \frac{d}{dx} \left[ \frac{Q_{xx}(x)}{Q_{xx}(0)} \ln \frac{\sigma(x)}{b} \right. \\ \left. + 2 \frac{q(x, 0) \sigma(x)}{Q_{xx}(0)} \int_0^1 \frac{q[x, t/\sigma(x)]}{q(x, 0)} \ln \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right) d \left( \frac{t}{\sigma(x)} \right) \right]. \end{aligned}$$



Der Ausdruck in den eckigen Klammern muss nun bei affinverzerren Flügeln derselbe sein, denn nach Voraussetzung sind sowohl

$$\frac{\sigma(x)}{b} ; \quad \frac{q(x, 0)}{Q_{xx}(0)} \frac{\sigma(x)}{b}$$

als auch das Integral die gleichen Funktionen von  $x$ . Dieser Teil bleibt bei der Affinverzerrung ungeändert und kann in Gleichung (25) in die Funktion  $f(x)$  hineingezogen werden. Ferner ist:

$$\ln \frac{Q_{xx}(0)}{2\pi} = \ln(b\delta) + \text{const.}$$

Nach einfacher Reduktion lautet das Ähnlichkeitsgesetz für *affinverzerre Flügeln* zusammen mit Gleichung (26):

$$\frac{1}{b\delta} \left[ \frac{u(x, 0, 0) - u_\infty}{u_\infty} - \frac{Q_{xx}(x)}{2\pi} \ln(b^{3/2} \delta^{1/2}) \right] = \text{Funktion von } x. \quad (27)$$

Das Ähnlichkeitsgesetz für Rotationskörper kann in genau derselben Weise geschrieben werden, wenn die Spannweite  $2b$  durch die maximale Dicke  $\tau$  ersetzt wird und die  $u$ -Komponente an der Körperoberfläche  $y = R(x)$  genommen wird:

$$u(x, 0, 0) \rightarrow u(x, R, 0); \quad 2b \rightarrow \tau, \quad (28)$$

also (entsprechend OSWATITSCH-BERNDT [8], Gleichungen (16) und (17)):

$$\frac{1}{\tau^2} \left[ \frac{u(x, R, 0) - u_\infty}{u_\infty} - \frac{Q_{xx}(x)}{2\pi} \ln \tau^2 \right] = \text{Funktion von } x. \quad (29)$$

Diese Ähnlichkeit der Formeln kann zunächst überraschen, weil beim Flügel  $u$  in der Projektionsfläche genommen werden kann, während man beim Rotationskörper an der Oberfläche bleiben muss.

Beim Flügel gibt es nach Gleichung (27) eine bestimmte Verzerrung von Dickenverhältnis  $\delta$  und Halbspannweite  $b$ , nämlich

$$b^{3/2} \delta^{1/2} = \text{const.},$$

bei welcher das logarithmische Glied für Vergleichsflügel unverändert bleibt und folglich in Gleichung (27) weggelassen werden kann. Zusammen mit Gleichung (26) lässt sich diese spezielle Verzerrung auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} b \delta^{1/3} &= \text{const.}; & \frac{1}{\delta^{2/3}} \cdot \frac{u(x, 0, 0) - u_\infty}{u_\infty} &= f(x); \\ b \sqrt{1 - M_\infty^2} &= \text{const.}; & \delta^{-1/3} \sqrt{1 - M_\infty^2} &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Die untere Zeile ist dabei für  $M_\infty = 1$  von selbst erfüllt. Die Verzerrung (30) ist bekannt. Sie ist jene Form der Ähnlichkeitsgesetze für Schallanströmung oder Schallnähe, wie sie für Flügel beliebiger Spannweite gilt<sup>10)</sup>.

Wie schon früher ausgeführt<sup>11)</sup>, werden Stöße in der Theorie kleiner Spannweite im allgemeinen nicht richtig umgerechnet. Dies gilt notwendigerweise auch für die Ähnlichkeitsgesetze und ist auch hier im allgemeinen von untergeordneter Bedeutung. Die Umrechnung des Stosses im Mittelschnitt ist jedoch im Falle von Gleichung (30) richtig, sowie die Umrechnung der Stöße in der allgemeinen Ähnlichkeitstheorie für Schallnähe stets richtig erfolgt.

3. Widerstand, Äquivalenzsatz und Ähnlichkeitsgesetze

Die Betrachtungen dieses Abschnittes seien auf Rotationskörper und dünne Flügel kleiner Spannweite beschränkt. Während die Geschwindigkeit auf dem Rotationskörper nicht der  $u$ -Komponente gleichgesetzt werden darf und die Querschnittströmung stets an der Körperoberfläche genommen werden muss, ist es erlaubt, die Geschwindigkeit auf der Oberfläche des *dünnen* Flügels durch die  $u$ -Komponente auf der Grundrissfläche anzunähern.

Mit dem Symbol  $\Omega_x(x)$  für die  $u$ -Komponente des Raumeinflusses gelangt man für die Geschwindigkeitsstörung eines *Rotationskörpers* zu folgendem Ausdruck auf  $y = R(x)$  mit Gleichung (10):

$$\begin{aligned} \frac{W(x, R)}{u_\infty} - 1 &= \frac{u(x, R)}{u_\infty} - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{u_\infty} \right)^2 = \Omega_x(x) + \frac{Q_{xx}(x)}{2\pi} \ln R + \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dx} \right)^2 \\ &- \Omega_x(x) + \frac{Q_{xx}(x)}{+\pi} \ln \frac{Q(x)}{-\pi} + \frac{1}{-\pi} \cdot \frac{Q_x^2(x)}{Q(x)}. \end{aligned} \tag{31}$$

Für den *Flügel* hingegen gilt mit Gleichung (7) und Gleichung (5) in der hier angewendeten Näherung:

$$\frac{W(x, h, z)}{u_\infty} - 1 = \frac{u(x, 0, z)}{u_\infty} - 1 = \Omega_x(x) + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\sigma(x)}^{+\sigma(x)} h_x(x, t) \ln |t - z| dt. \tag{32}$$

Nach dem Äquivalenzsatz sind  $\Omega_x(x)$  in Gleichung (31) und Gleichung (32) gleich, wenn nur dasselbe  $Q(x)$  genommen wird.

Für das *lineare* Problem lautet der Raumeinfluss nach F. KEUNE [2]<sup>12)</sup> mit  $x_0$  als Koordinate des Körperendes (Figur 1)

$M_\infty < 1$ :

$$\Omega_x(x) = \frac{Q_{xx}(x)}{+\pi} \ln \frac{+x(x_0 - x)}{1 - M_\infty^2} + \frac{1}{+\pi} \int_0^{x_0} \frac{Q_{xx}(x)}{|x|} \cdot \frac{Q_{xx}(\xi)}{\xi} d\xi; \tag{33}$$

<sup>10)</sup> Vergleiche [4], Seite 348 ff., Gleichung (33), und Seite 351 ff.

<sup>11)</sup> Vergleiche [7], die letzten 3 Abschnitte des 8. Kapitels.

<sup>12)</sup> Gleichungen (4.12) und (4.13).

$$M_\infty > 1:$$

$$\Omega_x(x) = -\frac{Q_{xx}(x)}{2\pi} \ln \frac{2x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{Q_{xx}(x) - Q_{xx}(\xi)}{x - \xi} d\xi. \quad (34)$$

Beide Formeln sind für alle Werte innerhalb des Körpers ( $0 < x < x_0$ ) gültig, wenn die Ableitung der Querschnittfläche  $Q_x(0)$  in der Körperspitze verschwindet.

Darüber hinaus ist in Unterschall auch noch  $Q_x(x_0) = 0$  gesetzt im Heck des Körpers (Figur 2c). Es würde für  $Q_x(x_0) \neq 0$  mit  $Q(x_0) = 0$  rund (Figur 2d) oder wie ein Halbkörper [ $Q(x_0) > 0$ ] (Figuren 2a, 2b) endigen. Beides führt zu derart starken Änderungen in  $u$ , dass die Vernachlässigungen und folglich auch die Resultate in der Umgebung von  $x = x_0$  falsch werden.

Bei Überschall hingegen, Gleichung (34), macht sich die Form des Körperendes stromaufwärts nicht bemerkbar. Der Körper oder Flügel kann an irgendeiner Stelle abgebrochen und in seinem vorderen Teil als neuer Körper angesehen werden, wenn er nur überall genügend schlank ist.

Endet ein Rotationskörper rund (Figur 2d),  $Q_x(x_0) \neq 0$  und  $Q(x_0) = 0$ , so gilt Gleichung (34) soweit der Körper genügend schlank ist. Endet er bei ausreichender Schlankheit mit einem Knick,  $Q_x(x_0) \neq 0$  und  $Q(x_0) \neq 0$  (Figur 2b), so gilt Gleichung (34) für alle  $x$  vor dem Körperende  $x_0$  ( $x < x_0$ ).

Unter *Widerstand*  $D$  ist im folgenden stets die Resultierende der Drucke auf die Oberfläche des nicht angestellten Körpers verstanden. Bei abgebrochenen Körpern ist nur der «Mantelwiderstand» gemeint und der Widerstandsanteil des Bodens  $Q(x_0)$  nicht berücksichtigt.

Der Widerstand  $D$  ist gegeben<sup>13)</sup> für den Rotationskörper

$$\frac{D}{\rho_\infty u_\infty^2/2} = -2 \int_0^{x_0} \left( \frac{W}{u_\infty} - 1 \right) Q_x(x) dx \quad (35)$$

und für den Flügel

$$\frac{D}{\rho_\infty u_\infty^2/2} = -4 \int_F \left( \frac{W}{u_\infty} - 1 \right) \frac{dh}{dx} dx dz. \quad (36)$$

In (36) ist über die Flügelfläche  $F$  zu integrieren. Beide Formeln gelten in Schallnähe bis einschliesslich zu Gliedern zweiter Ordnung, sind dort also besonders genau.

<sup>13)</sup> Siehe [4], VI. Kapitel, Gleichung (141).

Für Rotationskörper folgt dann mit Gleichung (31) und Gleichung (10)

$$\begin{aligned} \frac{D}{\varrho_{\infty} u_{\infty}^2/2} &= -2 \int_0^{x_0} \Omega_x(x) Q_x(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_0^{x_0} \left[ 2 Q_x(x) Q_{xx}(x) \ln \frac{Q(x)}{\pi} + \frac{Q_x^3(x)}{Q(x)} \right] dx \\ &= -2 \int_0^{x_0} \Omega_x(x) Q_x(x) dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^{x_0} \frac{d}{dx} \left[ Q_x^2(x) \ln \frac{Q(x)}{\pi} \right] dx \\ &= -2 \int_0^{x_0} \Omega_x(x) Q_x(x) dx - \frac{1}{2\pi} Q_x^2(x_0) \ln R(x_0) . \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{D}{\varrho_{\infty} u_{\infty}^2/2}} \right\} \quad (37)$$

Für den Widerstand eines Flügels tritt nach Gleichung (36) mit Gleichung (32) ein Integral auf, welches die Querschnittströmung enthält und das nach einiger im Anhang (4. Abschnitt, I) durchgeführten Integration über  $x$  mit Gleichung (5) die einfache Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} J_I &= \int_F \int h_x(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{-\sigma(x)}^{+\sigma(x)} h_x(x, t) \ln |t - z| dt \right] dx dz \\ &= \frac{1}{4} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln |t^2 - z^2| dt dz \\ &= \frac{1}{4} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=-\sigma(x_0)}^{\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln |t - z| dt dz . \end{aligned} \quad \left. \vphantom{J_I} \right\} \quad (38)$$

In diesem Integral tritt nur die ebene Querschnittströmung in der Hinterkante der Breite  $2\sigma(x_0)$ , (Figur 6a) auf. Mit einer Umformung von Gleichung (38) mit den Gleichungen (5) und (6) folgt unmittelbar aus den Gleichungen (36) und (32) die Formel für den Widerstand eines *Flügels*:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\varrho_{\infty} u_{\infty}^2/2} &= -2 \int_0^{x_0} \Omega_x(x) Q_x(x) dx - \frac{1}{2\pi} Q_x^2(x_0) \ln \sigma(x_0) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=-\sigma(x_0)}^{+\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln \frac{|t - z|}{\sigma(x_0)} dt dz , \end{aligned} \quad (39)$$

die in ihrem Aufbau derjenigen für Rotationskörper (37) sehr ähnelt.

In *unterkritischer* Unterschallströmung und insbesondere im Fall der linearisierten Unterschallströmung müssen stumpf endende Flügel und Rotationskörper (Figuren 2a und 2b) ausgeschlossen bleiben, da für sie die Strömung in der Umgebung der Hinterkante falsch wiedergegeben wird. Jedoch muss das D'Alembertsche Prinzip unter den Voraussetzungen für die Querschnittflächen  $Q_x(0) = Q_x(x_0) = 0$  der Körper erfüllt sein. Für Flügel sind diese Bedingungen nur erfüllbar nach Gleichung (6), wenn  $q(x_0, z)$  entlang der Hinterkante verschwindet. Damit ist aber für Flügel das Integral  $J_I = 0$  und in Gleichung (39) bleibt das Integral über den Raumeinfluss  $\mathcal{Q}_r(x)$  allein zu untersuchen. Dieses Integral verschwindet nach den Untersuchungen im Anhang (4. Abschnitt, II) für beliebige Querschnittflächen-Verteilung  $Q(x)$  zwischen  $0 < x < x_0$  und  $Q_x(0) = Q_x(x_0) = 0$ , so dass der Unterschallwiderstand unter den gegebenen geometrischen Voraussetzungen (Figur 2c) für alle äquivalenten Körper Null wird, wie erforderlich.

Dabei sei folgendes hervorgehoben. In älteren Arbeiten<sup>14)</sup> wurde das quadratische Glied  $1/2 (v/u_\infty)^2$  der Geschwindigkeit in der Widerstandsberechnung für besonders schlanke Rotationskörper vernachlässigt. Dieses Glied ist jedoch für Rotationskörper und insbesondere für Halbkörper von gleicher Grössenordnung wie die Querschnittströmung. Es gibt zusammen mit diesem Strömungsanteil in Gleichung (37) ein vollständiges Differential, und nur dadurch bleibt das d'Alembertsche Prinzip im Unterschall erfüllt. Nur in Ausnahmefällen, wie bei zur Körpermitte symmetrischen Körpern, verschwinden sowohl der Anteil von  $1/2 (v/u_\infty)^2$  als auch derjenige der Querschnittströmung für sich allein.

Für den *Überschallwiderstand eines Flügels* im Linearisierungsbereich folgt mit den Gleichungen (39) und (34):

$$\begin{aligned} \frac{D}{\varrho_\infty u_\infty^2/2} = & + \frac{Q_x^2(x_0)}{2\pi} \ln \frac{2x_0}{\sigma_0 M_\infty^2 - 1} - \frac{1}{\pi} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=-\sigma(x_0)}^{+\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln \frac{|t-z|}{\sigma(x_0)} dt dz \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_0} \frac{Q_x^2(x)}{x} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} Q_x(x) g(x) dx, \end{aligned} \quad (40)$$

mit der Funktion

$$g(x) = + \int_0^x \frac{Q_{xx}(x) - Q_{xx}(\xi)}{x - \xi} d\xi. \quad (41)$$

Die in [2], Gleichung (6.15), angegebene Formel muss richtig lauten:

$$\frac{D}{\varrho_\infty u_\infty^2/2} = (c_d)_{\sqrt{2}} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_0} Q_x(x) G(x) dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^{x_0} Q_x^2(x) \frac{x_0 dx}{x(x_0 - x)},$$

<sup>14)</sup> Beispielsweise [11], Gleichung (36).



mit einer Funktion  $G(x)$ , die bis auf die obere Integrationsgrenze, dort  $x_0$ , mit Gleichung (41) übereinstimmt. Gleichung (40) geht für  $Q_x(x_0) = 0$  in diese Formel über und ist im wesentlichen mit der von WARD [1], Gleichung (37), angegebenen Formel identisch, wie später ausgeführt wird.

Ebenso folgt aus den Gleichungen (37) und (34), wieder mit Gleichung (41), der *Überschallwiderstand eines Rotationskörpers im Linearisierungsbereich*:

$$\frac{D}{\varrho_\infty u_\infty^2/2} = \frac{Q_x^2(x_0)}{2\pi} \ln \frac{2x_0}{R(x_0)} \frac{1}{M_\infty^2} - 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{Q_x^2(x)}{x} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^x Q_x(x) g(x) dx. \quad (42)$$

Da der Bug des Körpers nach Voraussetzung (Figur 2) wie eine Kegelspitze  $Q_x(x) \sim x$  ausgebildet sein soll, ist der Überschallwiderstand von Flügel und Rotationskörper stets endlich, solange im Heck des Körpers bei von Null verschiedenem  $Q_x(x_0)$  auch  $R(x_0)$  und  $\sigma(x_0)$  nicht Null werden<sup>15)</sup>.

Da nach dem Äquivalenzsatz der Raumeinfluss äquivalenter Körper bei gleicher Mach-Zahl derselbe ist, folgt *ohne Einschränkung* auf die Linearisierung aus den Gleichungen (37) und (39) für Überschall:

$$\frac{D_{\text{Flügel}}}{\varrho_\infty u_\infty^2/2} = \frac{D_{\text{äq.R.K.}}}{\varrho_\infty u_\infty^2/2} + \frac{1}{2\pi} Q_x^2(x_0) \ln \frac{R(x_0)}{\sigma(x_0)}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=-\sigma(x_0)}^{+\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln \left| \frac{t-z}{\sigma(x_0)} \right| dt dz, \quad (43)$$

oder

$$D_{\text{Flügel}} = D_{\text{äq.R.K.}} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{\pi} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=-\sigma(x_0)}^{\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln \left| \frac{R(x_0)}{t-z} \right| dt dz. \quad (44)$$

Im allgemeinen ist der Flügelwiderstand *nicht* gleich demjenigen seines äquivalenten Rotationskörpers. Für den Sonderfall  $q(x_0, z) = 0$  sind beide Widerstände gleich.

Die Widerstandsformeln (43) und (44) können auch aus der bei WARD [1], Gleichung (37), stehenden Formel abgeleitet werden, wenn das Potential an der Hinterkante und seine Ableitung in Normalenrichtung bei WARD durch die Quellbelegung ausgedrückt wird. Für den Flügel geschieht dies etwa durch unsere Gleichungen (3) und (7). Jedoch ergibt sich bei WARD das Integral an der Hinterkante  $x = x_0$  unter Beschränkung auf lineare Überschallgleichungen aus dem Impulssatz nach einer Integration über die Ebene  $x = x_0$ . Hier ist die

<sup>15)</sup> Ausserdem bestätigt diese Gleichung die früheren Ausführungen, wonach man zu einem fehlerhaften (weil unendlichen) Widerstand kommt, wenn  $R(x_0) = 0$  wird bei  $Q_x(x_0) \neq 0$  (Figur 2d).

Integration mit Hilfe der Geschwindigkeitsverteilung über den ganzen Körper ausgeführt worden. Die Gleichungen (43) und (44) gelten deshalb bei schallnahen Strömungen auch für abgebrochene Körper (Figur 2b), wenn das Körperende genügend tief in Überschallströmung steckt, so dass von dort keine Störungen mehr stromaufwärts wandern können. Ausgenommen bleibt stets der Körper vom Typus Figur 2d.

Der Widerstand äquivalenter Körper unterscheidet sich nach Gleichung (44) nur durch die Querschnittformen und die aus ihnen folgenden Querschnittsströmungen im Endquerschnitt des Körpers. Dieser Unterschied ist unabhängig von der Mach-Zahl, so dass daraus eine nützliche Formel folgt, in welcher der Index  $L$  eine beliebige Mach-Zahl-Linearisierung in Überschall kennzeichnet:

$$M_{\infty} > 1: D_{\text{Flügel}} - D_{\text{äq.R.K.}} = D_{L\text{Flügel}} - D_{L\text{äq.R.K.}} \quad (45)$$

Die Differenz der Widerstände äquivalenter Körper ist von der Mach-Zahl unabhängig.

Gleichung (45) ist trivial für unterkritische Strömung, da dort jeder Summand der Gleichung schon wegen des d'Alembertschen Prinzips für sich verschwindet. Im Überschall kann die Differenz der Widerstände jedoch positiv oder negativ sein; dann handelt es sich um Körper (etwa Figur 2b), für welche die Unterschallvoraussetzungen verletzt sind. Gleichung (45) verliert ihre Gültigkeit, sobald ein solches Körperende in Unterschallnähe gerät.

Die Gleichungen (43) oder (44) und (45) geben nicht nur den Gesamtwiderstand äquivalenter Körper, sondern bei ausreichender Schlankheit den *Teilwiderstand* von der Körperrase bis zu einer beliebigen Stelle  $x$  ( $x_0 \rightarrow x$ ) innerhalb des Körpers. Dann sind aber im allgemeinen die Änderung  $Q_x(x)$  der Querschnittfläche und die Querschnittströmung von Null verschieden. Die Teilwiderstände äquivalenter Körper unterscheiden sich – wie die Geschwindigkeiten, Gleichung (11) – durch die Querschnittverteilungen im betrachteten Querschnitt. Selbst bei gleichem Gesamtwiderstand von Flügel und äquivalentem Rotationskörper, also für  $Q(x_0) - Q_x(x_0) = 0$ , sind im allgemeinen die örtlichen Widerstandsanteile des Flügels und des äquivalenten Rotationskörpers verschieden. Gleich sind sie nur in Ausnahmefällen für den Teilwiderstand bis zur Stelle des Maximalquerschnittes, in dem  $Q_x(x) = 0$  und  $Q(x) > 0$  sind; wenn dort die Quellverteilung  $q(x, z)$  über die örtliche Spannweite Null ist, die im allgemeinen positive und negative Werte annehmen kann.

Mit den vorliegenden Ergebnissen sind nun auch die *schallnahen Ähnlichkeitsgesetze für den Widerstand* gewonnen. Mit dem auf die Flügeltiefe als Längeneinheit bezogenen Maximalquerschnitt  $Q_{\max}$  folgt für Rotationskörper nach [8], Gleichung (18b):

$$\frac{D_{R.K.}}{Q_{\max}^2} + \frac{\varrho_{\infty}}{2} u_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Q_x^2(x_0)}{Q_{\max}^2} \ln Q_{\max} = \text{const.} \quad (46)$$

Hier kommt man zu dem gleichen Ergebnis, wenn Gleichung (24) in Gleichung (35) eingeführt wird und beachtet wird, dass in  $W u_\infty \ll 1$  das Glied  $x^2/2$  nach Gleichung (20) proportional  $Q_{xx}(0)/2\pi$  ist. Schliesslich folgt Gleichung (46), da  $Q_{xx}(0)/2\pi \sim Q_{max}^2$  ist.

Der Quotient  $D_{KK} Q_{max}^2$  des Widerstandes im Ähnlichkeitsgesetz deutet direkt auf den in der Ballistik üblichen mit der Stirnfläche  $Q_{max}$  dimensionslos gemachten Widerstandsbeiwert hin:

$$D = \frac{\varrho}{2} u_\infty^2 Q_{max} c_d.$$

Für äquivalente Körper mit affinverzerrtem Querschnittverlauf ist mit Gleichung (43)  $\sigma(x_0)$  proportional der auf die Gesamttiefe bezogenen maximalen Halbspannweite  $b$  und  $R(x_0)$  proportional  $\sqrt{Q_{max}}$ :

$$D_{Flügel} = D_{dq.R.K.} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{2\pi} Q_x^2(x_0) \ln \frac{\sqrt{Q_{max}}}{b} + \text{const } Q_{max}^2, \quad (47)$$

oder

$$\begin{aligned} D_{Flügel} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{2\pi} Q_x^2(x_0) \ln b \\ = D_{dq.R.K.} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{2\pi} Q_x^2(x_0) \ln \sqrt{Q_{max}} + \text{const } Q_{max}^2. \end{aligned}$$

Damit nun auf der rechten Gleichungsseite die schallnahe Ähnlichkeit, Gleichung (46), steht, ist zunächst auf beiden Seiten ein Glied mit  $\ln Q_{max}$  zu addieren und durch  $Q_{max}^2$  zu dividieren:

$$\begin{aligned} \frac{D_{Flügel}}{Q_{max}^2} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Q_x^2(x_0)}{Q_{max}^2} \ln b \sqrt{Q_{max}} \\ = \frac{D_{dq.R.K.}}{Q_{max}^2} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Q_x^2(x_0)}{Q_{max}^2} \ln Q_{max} + \text{const} = \text{const}. \quad (48) \end{aligned}$$

Vergleicht man bei gleicher Mach-Zahl nur Flügel miteinander, so ist mit Gleichung (46) die ganze rechte Gleichungsseite eine Konstante und

$$\sqrt{Q_{max}} \sim b^{1/2} \delta^{1/2}: \quad \frac{D_{Flügel}}{Q_{max}^2} + \frac{\varrho_\infty}{2} u_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Q_x^2(x_0)}{Q_{max}^2} \ln b^{3/2} \delta^{1/2} = \text{const}. \quad (49)$$

Dieses Ergebnis folgt natürlich auch, wenn in Gleichung (36) das Ähnlichkeitsgesetz für Flügel, Gleichung (27), eingesetzt und die Integration ausgeführt wird. Mit  $b \sim \sqrt{Q_{max}}$  geht Gleichung (48) über in Gleichung (46), ebenso wie die schallnahen Ähnlichkeitsgesetze für Flügel, Gleichung (27), in die für Rotationskörper, Gleichung (28), übergegangen sind.

Beim Übergang von einer Mach-Zahl auf die andere gilt Gleichung (26) für Flügel und mit  $\delta b \sim Q_{max}$  für Rotationskörper, das heisst,  $1 - M_\infty^2$  ist proportional zu  $Q_{max}$  zu ändern.

Die Widerstandsformeln seien an folgenden *Beispielen* erläutert. Zuerst sei der Fall betrachtet, dass die Quellen im Endquerschnitt verschwinden [ $q(x_0, z) = 0$ ]. Dann ist nach Gleichung (6) auch  $Q_x(x_0) = 0$ , der äquivalente Rotationskörper endigt entweder als Halbkörper wie Figur 2a oder als Vollkörper kegelig wie Figur 2c. Die äquivalenten Flügel enden dann ohne Knick in der Hinterkante, bei Vollflügeln also wie die Längsschnitte in Figur 3. Die Theorie kleiner Spannweiten ist in diesem Fall nicht nur in Überschall-, sondern auch in Unterschallströmung über die Hinterkante hinaus gültig. Der Widerstand ist in Unterschall Null und in Überschall nach Gleichung (43) für alle äquivalenten Körper gleich und nach Gleichung (47) bei Affinverzerrung proportional zu  $Q_{max}^2$ . In den Teilwiderständen unterscheiden sich solche Körper allerdings.

Diesen sei ein «abgebrochener» Flügel nach Figur 5 gegenübergestellt, dem ein äquivalenter Rotationskörper vom Typus Figur 2b entspricht. Die Unterschalltheorie kleinen Seitenverhältnisses ist in näherer Umgebung der Hinterkanten hier nicht mehr anwendbar. Die Quellverteilung in der Hinterkante zeigt im Mittelstück Senken, an den äusseren Rändern jedoch Quellen entsprechend der Dickenabnahme und -zunahme an diesen Stellen. Ferner ist  $Q_x(x_0) \neq 0$ . Damit unterscheiden sich die Widerstände von Flügel und äquivalentem Rotationskörper entsprechend Gleichung (43) oder (44); bei Affinverzerrung entsprechend Gleichung (47). Auch die Teilwiderstände unterscheiden sich im allgemeinen selbst im Punkt des Querschnittmaximums  $Q_x(x) = 0$ . Die Geschwindigkeitsverteilung im Linearisierungsgebiet von  $M_\infty > 1$  ist in [3], Bild 10 bis 12, gegeben.

#### 4. Mathematischer Anhang

I. Der Beweis für Gleichung (38) soll in möglichst allgemeiner Form durchgeführt werden, indem

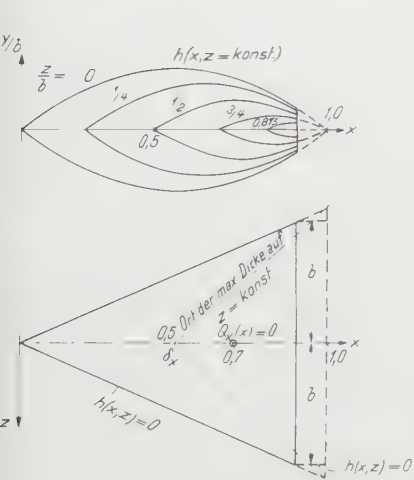
a) an Stelle der Dickenänderung  $h_x(x, z)$  nach Gleichung (5) die Quellverteilung  $q(x, z)/2$  geschrieben und

b) für diese und den Grundriss des Flügels (Figur 6a) nur Symmetrie zur  $x$ -Achse,  $q(x, +z) = q(x, -z)$ , vorausgesetzt wird. Dann kann die Integration über  $t$  auf eine Flügelhälfte beschränkt bleiben:

$$4 J_I = \int_F \int q(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{\sigma(x)} q(x, t) \ln |t^2 - z^2| dt \right] df.$$

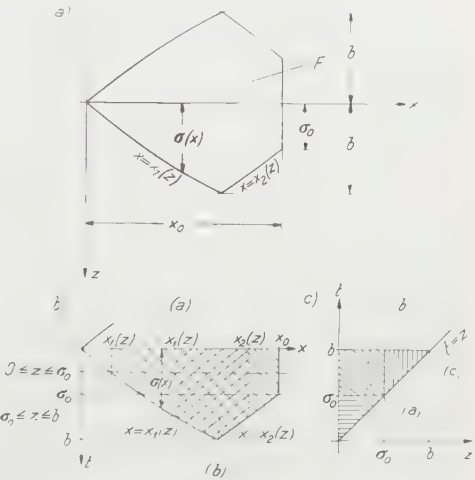
Die Funktion  $\ln |t^2 - z^2|$  ist eine in  $t$  und  $z$  symmetrische Kernfunktion  $K(t, z) = K(z, t)$ , ferner können nach Figur 6a für die halbe Belegungsbreite  $z = s(x)$  die Umkehrfunktionen  $x = x_1(z)$  und  $x = x_2(z)$  eingeführt werden, für welche gilt:

$$0 < z < b: \quad z = \sigma(x_1(z)); \quad \text{und} \quad \sigma_0 < z < b: \quad z = \sigma(x_2(z)). \quad (50)$$



Figur 5

Deltaflügel mit endlicher Dickenverteilung in der Hinterkante. Die Dickenverteilung ist durch geradlinige Erzeugende konstruiert und an den seitlichen Flügelrändern Null.



Figur 6

Flügelgrundriss (a) und Skizzen zur Umkehrung der Integrationsgrenzen.

Dann ist  $J_I$  in grösstmöglicher Allgemeinheit, über eine Flügelhälfte integriert:

$$2 J_I = \int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{x=x_1(z)}^{x_0} q(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{\sigma(x)} q(x, t) K(t, z) dt \right] dx dz + \int_{\sigma_0}^b \int_{x=x_1(z)}^{x_2(z)} q(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{\sigma(x)} q(x, t) K(t, z) dt \right] dx dz, \quad (51)$$

und es ist zu beweisen, dass mit der Belegungsbreite  $\sigma_0 = \sigma(x_0)$

$$2 J_I - \frac{1}{2} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} \int_{t=0}^{\sigma(x_0)} K(t, z) q(x_0, z) q(x_0, t) dt dz = 0 = 2 J_{I1} - 2 J_{I2} \quad (52)$$



ist, wenn die erste Form von Gleichung (38) gelten soll. Der Beweis wird hier so skizziert, dass seine Nachprüfung ohne Umwege durchgeführt werden kann. Wird zunächst Gleichung (51) partiell nach  $x$  integriert, so ergeben sich drei Doppelintegrale und zwei dreifache Integrale. Von dem einen Doppelintegral, nämlich

$$2 J_1 = \int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{t=0}^{\sigma_0} K(t, z) q(x_0, z) q(x_0, t) dt dz + \text{usw.},$$

stimmt der halbe Wert mit Gleichung (38) überein, während der Rest zu Null werden soll. Deshalb ist die Hälfte dieses Wertes auf die linke Gleichungsseite von Gleichung (52) gezogen, und in den drei Doppelintegralen  $J_{11}$  nach der partiellen Integration bleibt die andere Hälfte stehen:

$$\begin{aligned} 2 J_{11} &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{t=0}^{\sigma_0} K(t, z) q(x_0, z) q(x_0, t) dt dz + \int_{z=\sigma_0}^b \int_{t=0}^z K(t, z) q(x_2(z), z) q(x_2(z), t) dt dz \\ &= \int_{z=0}^b \int_{t=0}^z K(t, z) q(x_1(z), z) q(x_1(z), t) dt dz. \end{aligned}$$

Für die beiden dreifachen Integrale nach der partiellen Integration von (51) gilt:

$$\begin{aligned} 2 J_{12} &= \int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{x_1(z)}^{x_0} q_x(x, z) \int_0^{\sigma(x)} q(x, t) K(t, z) dt dx dz \\ &\quad + \int_{z=\sigma_0}^b \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} q_x(x, z) \int_0^{\sigma(x)} q(x, t) K(t, z) dt dx dz. \end{aligned}$$

Diese beiden dreifachen Integrale werden umgeformt, indem zunächst die Integrationsreihenfolgen umgekehrt werden:

1. nach Figur 6b die von  $t$  und  $x$ :

a)  $0 < z \leq \sigma_0$ :

$$\int_{x_1(z)}^{x_0} \int_{t=0}^{\sigma(x)} g(t, x) dt dx = \int_{t=0}^z \int_{x_1(z)}^{x_0} g(t, x) dx dt + \int_{t=z}^{\sigma_0} \int_{x_1(t)}^{x_0} g(t, x) dx dt + \int_{t=\sigma_0}^b \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} g(t, x) dx dt,$$

$$\text{b) } \sigma_0 \leq z \leq b: \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} \int_{t=0}^{\sigma(x)} g(t, x) dt dx = \int_{t=0}^z \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} g(t, x) dx dt + \int_{t=z}^b \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} g(t, x) dx dt.$$

2. nach Figur 6c in den nun für  $2 J_{12}$  entstehenden fünf Integralen die von  $t$  und  $z$ , mit folgender Vertauschung der beiden Integrationsvariablen  $z$  und  $t$ :

a) im zweiten Integral:

$$\int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{t=z}^{\sigma_0} g(t, z) dt dz = \int_{t=0}^{\sigma_0} \int_{z=0}^t g(t, z) dz dt \rightarrow \int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{t=0}^z g(z, t) dt dz ,$$

b) im dritten Integral:

$$\int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{\sigma_0}^b g(t, z) dt dz = \int_{t=\sigma_0}^b \int_{z=0}^{\sigma_0} g(t, z) dz dt \rightarrow \int_{z=\sigma_0}^b \int_{t=0}^{\sigma_0} g(z, t) dt dz ,$$

c) im letzten Integral:

$$\int_{z=\sigma_0}^b \int_z^b g(t, z) dt dz = \int_{t=\sigma_0}^b \int_{z=\sigma_0}^t g(t, z) dz dt \rightarrow \int_{z=\sigma_0}^b \int_{t=\sigma_0}^z g(z, t) dt dz ,$$

während das erste und vierte Integral unverändert bleiben. Nun sind im dritten und letzten der fünf Integrale die beiden Integrationsbereiche über  $t$  bei gleichen Integrationsbereichen  $z$  und  $x$  zusammenzufassen zum Integrationsbereich  $0 \leq t \leq z$  des dritten Integrals mit dem Ergebnis in unveränderter Reihenfolge:

$$\begin{aligned} 2 J_{12} = & \int_{z=0}^{\sigma_0} \int_{t=0}^z K(z, t) \int_{x_1(z)}^x [q_x(x, z) q(x, t) + q_x(x, t) q(x, z)] dx dt dz \\ & + \int_{z=\sigma_0}^b \int_{t=0}^z K(z, t) \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} [q_x(x, t) q(x, z) + q_x(x, z) q(x, t)] dx dt dz . \end{aligned}$$

Da nun aber in eckigen Klammern  $d, dx \ q(x, t) q(x, z)$  steht und die Kernfunktion  $K(x, t) = K(t, z)$  ist, folgt, nach der Integration über  $x$ , Zusammenfassung der beiden Integrationsbereiche über  $z$  der Integrale mit der unteren Grenze  $x_1(z)$  und schliesslich Vergleich mit  $2 J_{11}$  nach Gleichung (52):

$$\begin{aligned} 2 J_{11} - 2 J_{12} = & \frac{1}{2} \int_{z=0}^{\sigma_0} \left\{ \int_{t=z}^{\sigma_0} K(t, z) q(x_0, z) q(x_0, t) dt - \int_{t=0}^z K(t, z) q(x_0, z) q(x_0, t) dt \right\} dz . \end{aligned}$$

Nun sind aber diese beiden Doppelintegrale gleich<sup>16)</sup>, so dass unmittelbar folgt:

$$2 J_{11} - 2 J_{12} = 0 ,$$

<sup>16)</sup> Vergleiche für das erste Integral die Umkehr der Integrationsreihenfolge und Vertauschung der Variablen in 2. (a).

womit Gleichung (52) bewiesen ist und im Fall von Gleichung (38) gilt:

$$J_1 = \frac{1}{4} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} \int_{t=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) q(x_0, t) \ln |t^2 - z^2| dt dz$$

$$= \frac{1}{4} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=-\sigma(x_0)}^{+\sigma(x_0)} q(x_0, t) \ln |t - z| dt dz \quad (53)$$

oder mit der Umformung 2. (a) in mathematisch am besten ausführbarer Form:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{\sigma(x_0)} q(x_0, z) \int_{t=0}^z q(x_0, t) \ln (z^2 - t^2) dt dz. \quad (54)$$

II. Für den Beweis, dass der Widerstand, Gleichung (39), im Fall der linearisierten Unterschallströmung verschwindet, wird der Raumeinfluss des Potentials am besten in der Form geschrieben<sup>17)</sup>:

$$\Omega(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^x Q_{xx}(\xi) \ln 2(x - \xi) d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_x^{x_0} Q_{xx}(\xi) \ln 2(\xi - x) d\xi,$$

wobei für diese Formel und die folgende Ableitung  $Q_x(0) = Q_x(x_0) = 0$  voraussetzen ist (Figur 2c). Dann lautet das Integral, Gleichung (39):

$$J_{II} = \int_0^{x_0} \Omega_x(x) Q_x(x) dx = - \int_0^{x_0} \Omega(x) Q_{xx}(x) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{x=0}^{x_0} \int_{\xi=0}^x Q_{xx}(x) Q_{xx}(\xi) \ln 2(x - \xi) d\xi dx$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{x=0}^{x_0} \int_{\xi=x}^{x_0} Q_{xx}(x) Q_{xx}(\xi) \ln 2(\xi - x) d\xi dx.$$

Im ersten Doppelintegral sind nun die Integrationsvariablen  $x$  und  $\xi$  zu vertauschen, während im zweiten Doppelintegral die Integrationsreihenfolge vertauscht werden soll, was mit  $x \rightarrow z$ ,  $x_0 \rightarrow b$ ,  $\xi \rightarrow t$  ganz analog zu Figur 6c zu geschehen hat. Damit folgt:

$$J_{II} = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{x_0} \int_{x=0}^{\xi} Q_{xx}(\xi) Q_{xx}(x) \ln 2(\xi - x) dx d\xi$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^{x_0} \int_{x=0}^{\xi} Q_{xx}(x) Q_{xx}(\xi) \ln 2(\xi - x) dx d\xi = 0$$

für beliebige  $Q(x)$ -verteilung, wenn  $Q_x(0) = Q_x(x_0) = 0$ .

<sup>17)</sup> Vergleiche [2], Gleichung (4.11).

# LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. N. WARD, *Supersonic Flow Past Slender Pointed Bodies*, Quart. J. Mech. appl. Math. 2, H. 1, 75 (März 1949).
- 2 F. KEUNE, *Low Aspect Ratio Wings with Small Thickness at Zero Lift in Subsonic and Supersonic Flow*, KTH-AERO TN 21, Aeronautics Division, Royal Institute of Technology, Stockholm, 15. Juni 1952.
- 3 F. KEUNE und K. OSWATITSCH, *Nicht angestellte Körper kleiner Spannweite in Unter- und Überschallströmung*, Z. Flugwiss. 1, H. 6, 137 (1953).
- 4 K. OSWATITSCH, *Gasdynamik* (Springer-Verlag, Wien 1952).
- 5 R. T. JONES, *Properties of Low-Aspect-Ratio Pointed Wings at Speeds Below and Above the Speeds of Sound*, NACA TN 1032 (1946).
- 6 K. OSWATITSCH, *Die theoretischen Arbeiten über schallnahe Strömung am Flugtechnischen Institut der Königlich Technischen Hochschule, Stockholm*, Vortrag am 8. internat. Kongress theoret. angew. Mech. (Istanbul 1952).
- 7 K. OSWATITSCH und F. KEUNE, *Ein Äquivalenzsatz für nicht angestellte Flügel kleiner Spannweite in schallnaher Strömung*, Z. Flugwiss. 3, H. 2, 29 (1955).
- 8 K. OSWATITSCH und S. B. BERNDT, *Aerodynamic Similarity at Axisymmetric Transonic Flow Around Slender Bodies*, KTH-AERO TN 15, Aeronautics Division, Royal Institute of Technology, Stockholm 1950.
- 9 F. KEUNE, *On the Subsonic, Transonic and Supersonic Flow Around Low Aspect Ratio Wings with Incidence and Thickness*, KTH-AERO TN 28, Aeronautics Division, Royal Institute of Technology, Stockholm 1953.
- [10] F. KEUNE, *Singularitätenverfahren zur Berechnung der Strömung um mässig dicke Flügel endlicher Spannweite*, Z. Flugwiss. 2, H. 10, 253 (1954).
- [11] TH. v. KÄRMÁN und N. B. MOORE, *Resistance of Slender Bodies Moving with Supersonic Velocities, with Special Reference to Projectiles*, Trans. Amer. Soc. mech. Engr. APM-54-27, 1932, 303.

## Summary

In transonic flow the velocity disturbance on low aspect ratio wings can be reduced to the velocity disturbance on bodies of revolution with the same distribution of cross-sectional area. This law of equivalence has been proved in another paper and is stated here from the physical point of view. By the similarity law for bodies of revolution corresponding similarity laws for low aspect ratio wings are given. Further the law of equivalence for the pressure drag is given for bodies of revolution and pointed low aspect ratio wings with any cross-section at the end, if the end lies sufficiently far in the supersonic flow. The last one is a generalisation for transonic flow of a formula of WARD originally valid for linearized supersonic equations only.

(Eingegangen: 16. Dezember 1954.)

# Zur Auflösung linearer homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung

Von JOSEF ZBORNIK, Chur<sup>1)</sup>

Die Differentialgleichung

$$y'' + G y' + H y = 0 \quad (1)$$

mit den Koeffizienten  $G = G(x)$  und  $H = H(x)$ , welche in dem betrachteten Intervall stetig und  $\neq 0$  sein sollen, geht durch die Transformation

$$u = \int \exp(-\int G dx) dx^2, \quad v(u) = y(x) \quad (2)$$

in die reduzierte Differentialgleichung

$$v^{**} (u')^2 + H v = 0 \quad (3)$$

über, wobei  $*$ ,  $**$ , ... die Ableitungen nach  $u$  anzeigen und  $H$  und  $u'$  mittels (2) als Funktionen von  $u$  dargestellt sein sollen.

Ist  $v = F(u)$  das allgemeine Integral der Differentialgleichung (3), so stellt gemäß (2)

$$y = F\left(\int \exp(-\int G dx) dx\right) \quad (4)$$

die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1) dar.

Im weiteren werden aus der beliebigen Zahl von Differentialgleichungen die nach dem angeführten Verfahren lösbar sind, einige Typen herausgegriffen und jeweils die gegebene Differentialgleichung (1),  $u$  und die allgemeine Lösung (4) angeführt<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Calanda S. A., Domat-Ems.

<sup>2)</sup> Die Integrationskonstanten sind bedeutungslos, weil sie in der allgemeinen Lösung der jeweiligen Differentialgleichung in den Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  enthalten sind.

<sup>3)</sup> Wo einzelne Differentialgleichungen unter den Beispielen des Werkes von Prof. Dr. E. KAMKE *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. 1, 4. Aufl. (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951) auftreten, wird durch Angabe der betreffenden Beispielnnummer darauf hingewiesen.



# 1. Differentialgleichungen mit der reduzierten Differentialgleichung $v^{**} + q v = 0 \quad (q = \text{const})$

$$v = C_1 \exp(i u q^{1/2}) + C_2 \exp(-i u q^{1/2}) = c_1 \sin(u q^{1/2}) + c_2 \cos(u q^{1/2})$$

$$y'' - \left(\frac{f''}{f'}\right) y' - b^2 f'^2 y = 0, \quad f = f(x), \quad f' \neq 0 \quad [\text{KAMKE (2.79)}]. \quad (1.1)$$

$$u = f, \quad y = C_1 \exp(b f) + C_2 \exp(-b f) = c_1 \sin(i b f) + c_2 \cos(i b f).$$

$$y'' - \left(\frac{f'}{f} - a \frac{\xi'}{\xi}\right) y' - b^2 \xi^{2a} f^2 y = 0 \quad [f = f(x) \neq 0, \quad \xi = \xi(x) \neq 0]. \quad (1.2)$$

$$u = \int f \xi^a dx, \quad y = C_1 \exp(b u) + C_2 \exp(-b u) = c_1 \sin(i b u) + c_2 \cos(i b u).$$

$$y'' - c y' - b^2 e^{2cx} y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.33, 2.34)}], \quad (1.3)$$

$$u = e^{cx}/c, \quad y = C_1 \exp(b u) + C_2 \exp(-b u) = c_1 \sin(i b u) + c_2 \cos(i b u).$$

$$y'' + \left(\frac{f f'}{f^2 + a^2} - \frac{f''}{f'}\right) y' - \frac{b^2 f'^2}{f^2 + a^2} y = 0 \quad [f = f(x) \neq \pm i a, \quad f' \neq 0]. \quad (1.4)$$

$$u = \ln(f + (f^2 + a^2)^{1/2}), \quad y = C_1 (f + (f^2 + a^2)^{1/2})^b + C_2 (f + (f^2 + a^2)^{1/2})^{-b} \\ - c_1 \sin(i b u) + c_2 \cos(i b u).$$

Für

$$a = 2, \quad b = \frac{1}{3} \quad (1.4a)$$

erhält man die Differentialgleichung [KAMKE (2.81)] mit der Lösung

$$y = C_1 (f + (f^2 + 4)^{1/2})^{1/3} + C_2 (f + (f^2 + 4)^{1/2})^{-1/3}.$$

Wird speziell  $C_1 = 1: |2^{1/3}|$  und  $C_2 = -|2^{1/3}|$  angenommen, so gilt  $y^3 + 3 y = f$ .

$$(x^2 + 2 A x + B) y'' + (x + A) y' - m^2 y = 0. \quad (1.5)$$

$$u = \ln(x + A + (x^2 + 2 A x + B)^{1/2}), \quad y = C_1 (x + A + (x^2 + 2 A x + B)^{1/2})^m \\ + C_2 (x + A + (x^2 + 2 A x + B)^{1/2})^{-m}.$$

Für  $m = 1: (2 n + 1), \quad n = 0, 1, \dots$  und  $C_2 = C_1 (A^2 - B)^m$  genügt  $y$  der Gleichung

$$y^{2n+1} + a_1 C_1 C_2 y^{2n-1} + a_2 (C_1 C_2)^2 y^{2n-3} + \dots + a_n (C_1 C_2)^n y \\ = 2 C_1^{2n+1} (x + A),$$

wobei die Koeffizienten  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) durch die Rekursionsformeln

$$a_k = - \binom{2n+1}{k} - a_1 \binom{2n-1}{k-1} - a_2 \binom{2n-3}{k-2} - \dots - a_{k-1} \binom{2n-2k+3}{1}$$

bestimmt sind.

$$(27x^2 + 4)y'' + 27xy' - 3y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.290)}], \quad (1.6)$$

Sonderfall von (1.5) mit  $A = 0$ ,  $B = 4/27$ ,  $m = 1/3$ ;  $a_1 = -3$ :

$$y = C_1 \left[ x + \left( x^2 + \frac{4}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3} + C_2 \left[ x + \left( x^2 + \frac{4}{27} \right)^{1/2} \right]^{-1/3}.$$

Für  $C_1 = -1$ :  $|2^{1/3}|$ ,  $C_2 = 1/3$   $|2^{1/3}|$  gilt  $y^3 + y + x = 0$ .

$$50x(x-1)y'' + 25(2x-1)y' - 2y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.292)}], \quad (1.7)$$

Sonderfall von (1.5) mit  $A = -1/2$ ,  $B = 0$ ,  $m = 1/5$ ,  $-a_1 = a_2 = 5$ :

$$y = C_1 \left( x - \frac{1}{2} + (x^2 - x)^{1/2} \right)^{1/5} + C_2 \left( x - \frac{1}{2} + (x^2 - x)^{1/2} \right)^{-1/5}.$$

Für  $C_1 = 1/C_2 = |2^{1/5}|$  gilt  $y^5 - 5y^3 + 5y = 4x - 2$ .

$$(x^2 + 1)y'' + xy' + 2y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.222)}], \quad (1.8)$$

Sonderfall von (1.5) mit  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,

$$y = C_1 \sin w + C_2 \cos w, \quad w = 2^{1/2} \ln(x + (x^2 + 1)^{1/2}).$$

$$(x^2 - x)^2 y'' + (2x - 1)(x^2 - x)y' - m^2 y = 0, \quad (1.9)$$

$$u = \ln((x-1)/x), \quad y = C_1 \exp(mu) + C_2 \exp(-mu) = C_1 ((x-1)/x)^m + C_2 (x/(x-1))^m.$$

$$y'' + k^2 \frac{\sin x \cos x}{\sin x} y' + n^2 y \sin^2 x = 0 \quad [\text{KAMKE (2.74)}], \quad (1.10)$$

$$u = \int \frac{dx}{\sin x}, \quad y = c_1 \sin(n \int \frac{dx}{\sin x}) + c_2 \cos(n \int \frac{dx}{\sin x}).$$

$$y'' - f'y' + b^2 e^{2f} y = 0 \quad [f = f(x)], \quad (1.11)$$

$$u = \int \exp f dx, \quad y = C_1 \exp(ib u) + C_2 \exp(-ib u) = c_1 \sin(b u) + c_2 \cos(b u).$$

$$y'' - m \operatorname{ctg} x y' + b^2 \sin^2 m x y = 0, \quad (1.12)$$

$$\text{Sonderfall von (1.11) mit } f = m \ln \sin x, \quad u = \int \sin^m x dx, \quad y = c_1 \sin(b u) + c_2 \cos(b u).$$

$$y'' - \operatorname{ctg} x \, y' + \sin^2 x \, y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.69)}], \quad (1.13)$$

Sonderfall von (1.12) mit  $m = b = 1$ ,  $y = c_1 \operatorname{sincos} x + c_2 \operatorname{coscos} x$ .

$$y'' + m \operatorname{tg} x \, y' + b^2 \operatorname{cos}^2 m x \, y = 0, \quad (1.14)$$

Sonderfall von (1.11) mit  $f = m \ln \cos x$ ,  $u = \int \cos^m x \, dx$ ,  $y = c_1 \sin(b u) + c_2 \cos(b u)$ .

$$y'' + \operatorname{tg} x \, y' - \cos^2 x \, y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.67)}]. \quad (1.15)$$

Sonderfall von (1.14) mit  $m = 1$ ,  $b = i$ ,  $y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$ .

$$\sin 2 x \, y'' - 2 m \, y' + 2 b^2 \operatorname{tg}^{2m-1} x \sin^2 x \, y = 0, \quad (1.16)$$

Sonderfall von (1.11) mit  $f = m \ln \operatorname{tg} x$ ,  $u = \int \operatorname{tg}^m x \, dx$ ,

$y = c_1 \sin(b \int \operatorname{tg}^m x \, dx) + c_2 \cos(b \int \operatorname{tg}^m x \, dx)$ .

$$\sin 2 x \, y'' - y' + 2 b^2 \sin^2 x \, y = 0, \quad (1.17)$$

Sonderfall von (1.16) mit  $m = 1/2$ .  $u = \int \operatorname{tg}^{1/2} x \, dx$ ,  $y = c_1 \sin(b \int \operatorname{tg}^{1/2} x \, dx) + c_2 \cos(b \int \operatorname{tg}^{1/2} x \, dx)$ .

$$x \ln x \, y'' - n \, y' - a^2 x \ln^{2n+1} x \, y = 0, \quad (1.18)$$

Sonderfall von (1.11) mit  $f = \ln(\ln^n x)$ ,  $b = i a$ ,

$u = \int \ln^n x \, dx = x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} n! / k! \ln^k x$ ,  $y = C_1 \exp(a u) + C_2 \exp(-a u)$ .

$$x \ln x \, y'' - y' - x \ln^3 x \, y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.412)}], \quad (1.19)$$

Sonderfall von (1.18) mit  $a = n = 1$ ,  $y = C_1 (x/e)^x + C_2 (e/x)^x$ .

$$x^4 y'' + 2 x^3 y' + a^2 y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.350)}], \quad (1.20)$$

$u = -1/x$ ,  $y = c_1 \sin(a/x) + c_2 \cos(a/x)$ .

$$y'' - n \operatorname{Im} x \, y' - a^2 \operatorname{Co}^2 n x \, y = 0, \quad (1.21)$$

Sonderfall von (1.11) mit  $f = n \ln \operatorname{Co} x$ ,  $u = \int \operatorname{Co}^n x \, dx$ ,

$y = C_1 \exp(a \int \operatorname{Co}^n x \, dx) + C_2 \exp(-a \int \operatorname{Co}^n x \, dx)$ .

$$y'' - 2 \operatorname{ctg} 2x y' - \sin^2 2x y = 0, \quad (1.22)$$

$$u = 1/2 \sin^2 x, \quad y = C_1 \exp(\sin^2 x) + C_2 \exp(-\sin^2 x).$$

$$(x^2 - 1) y'' + x y' - a y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.235)}], \quad (1.23)$$

Spezialfall von (1.5) mit  $A = 0$ ,  $B = -1$ ,  $m = a^{1/2}$ .

$$y = C_1 (x + (x^2 - 1)^{1/2})^{a^{1/2}} + C_2 (x + (x^2 - 1)^{1/2})^{-a^{1/2}}.$$

$$x^{2n} x^2 y'' + [(n+1) x^n + n a] x^n x y' - n^2 a^2 e^{2a/x^n} y = 0, \quad (1.24)$$

$$u = -1/an \exp(a/x^n), \quad y = C_1 \exp(e^{a/x^n}) + C_2 \exp(-e^{a/x^n}).$$

$$y'' - (a + 2cx) y' - b^2 \exp(2ax + 2cx^2) y = 0, \quad (1.25)$$

$$u = \exp(ax + cx^2),$$

$$y = C_1 \exp(b \exp(ax + cx^2)) + C_2 \exp(-b \exp(ax + cx^2)).$$

$$y'' - \left( \frac{f''}{f'} + 2a \right) y' - \left( b^2 f'^2 - a \frac{f''}{f'} - a^2 \right) y = 0 \quad [\text{KAMKE (2.80)}], \quad (1.26)$$

$f = f(x)$ ,  $f' \neq 0$ . Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = e^{ax} z$  in (1.1) mit  $z$  statt  $y$  über.  $y = e^{ax} [C_1 \exp(bf) + C_2 \exp(-bf)]$ .

$$y'' - \left( \frac{f''}{f} + a \frac{g'}{g} + 2c \right) y' + \left[ c \left( \frac{f'}{f} + a \frac{g'}{g} \right) - b^2 g^{2a} f^2 + c^2 \right] y = 0, \quad (1.27)$$

$f = f(x) \neq 0$ ,  $g = g(x) \neq 0$ . Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = e^{cx} z$  in (1.2) mit  $z$  statt  $y$  über.

$$y = e^{cx} [C_1 \exp(b \int g^a f dx) + C_2 \exp(-b \int g^a f dx)].$$

$$x^2 y'' - \left( x \frac{f''}{f'} + 2c \right) x y' + \left( -b^2 f'^2 x^2 + c \frac{f''}{f'} x + c^2 + c \right) y = 0. \quad (1.28)$$

Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = x^c z$  in (1.1) mit  $z$  statt  $y$  über.

$$y = x^c [C_1 \exp(bf) + C_2 \exp(-bf)] = x^c [c_1 \sin(ibf) + c_2 \cos(ibf)].$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 y'' - \left[ x \left( \frac{f''}{f'} + 2a \right) + 2c \right] x y' \\ + \left[ x^2 \left( a^2 + a \frac{f''}{f'} - b^2 f'^2 \right) + x \left( 2ac + c \frac{f''}{f'} \right) + c(c+1) \right] y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

$f = f(x)$ ,  $f' \neq 0$ . Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = x^c e^{ax} z$  in (1.1) mit  $z$  statt  $y$  über.

$$y = x^c e^{ax} [C_1 \exp(bf) + C_2 \exp(-bf)] = x^c e^{ax} [c_1 \sin(ibf) + c_2 \cos(ibf)].$$

## 2. Differentialgleichungen mit der reduzierten Differentialgleichung

$$v'' u^2 - n(n-1)v = 0$$

$$v = C_1 u^n + C_2 u^{1-n} \text{ für } n \neq 1/2; \quad v = u^{1/2} (C_1 + C_2 \ln u) \text{ für } n = 1/2.$$

$$y'' - \left(\frac{f''}{f'}\right) y' - n(n-1) \left(\frac{f'}{f}\right)^2 y = 0, \quad (2.1)$$

$$f = f(x) \neq 0, \quad f' \neq 0, \quad u = f.$$

$$y = C_1 f^n + C_2 f^{1-n}, \quad n \neq 1/2; \quad y = f^{1/2} (C_1 + C_2 \ln f), \quad n = 1/2.$$

$$y'' + \operatorname{tg} x y' - n(n-1) \operatorname{ctg}^2 x y = 0, \quad (2.2)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \sin x = u$ .

$$y = C_1 \sin^n x + C_2 \sin^{1-n} x, \quad n \neq 1/2; \quad y = \sin^{1/2} x (C_1 + C_2 \ln \sin x), \quad n = 1/2.$$

$$\sin^2 x y'' - 4 \sin^2 x \sin 2x y' - 4n(n-1)y = 0, \quad (2.3)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \operatorname{tg} x = u$ .

$$y = C_1 \operatorname{tg}^n x + C_2 \operatorname{tg}^{1-n} x, \quad n \neq 1/2; \quad y = \operatorname{tg}^{1/2} x (C_1 + C_2 \ln \operatorname{tg} x), \quad n = 1/2.$$

$$x y'' - (2x^2 + 1) y' - 4n(n-1)x^3 y = 0. \quad (2.4)$$

$$u = 1/2 \exp(x^2).$$

$$y = C_1 e^{n x^2} + C_2 e^{(1-n)x^2}, \quad n \neq 1/2; \quad y = e^{x^2/2} (C_1 + C_2 x^2), \quad n = 1/2.$$

$$y'' - \left(\frac{f''}{f'} + 2a\right) y' - \left[n(n-1) \frac{f'^2}{f^2} - a^2 - a \frac{f''}{f'}\right] y = 0. \quad (2.5)$$

Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = e^{ax} z$  in (2.1) mit  $z$  statt  $y$  über.

$$y = e^{ax} (C_1 f^n + C_2 f^{1-n}), \quad n \neq 1/2; \quad y = e^{ax} f^{1/2} (C_1 + C_2 \ln f), \quad n = 1/2.$$

$$x^2 y'' - \left(x \frac{f''}{f'} + 2c\right) x y' + \left[-n(n-1) \frac{f'^2}{f^2} x^2 + c \frac{f''}{f'} x + c(c+1)\right] y = 0. \quad (2.6)$$



Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = x^c z$  in (2.1) mit  $z$  statt  $y$  über.

$$y = x^c (C_1 f^n + C_2 f^{1-n}), \quad n \neq 1/2; \quad y = x^c f^{1/2} (C_1 + C_2 \ln f), \quad n = 1/2.$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 y'' - \left[ x \left( \frac{f''}{f'} + 2a \right) + 2c \right] x y' \\ + \left[ x^2 \left( a^2 + a \frac{f''}{f'} - n(n-1) \frac{f'^2}{f^2} \right) + x \left( 2ac + c \frac{f''}{f'} \right) \right. \\ \left. + c(c+1) \right] y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = x^c e^{ax} z$  in (2.1) mit  $z$  statt  $y$  über.

$$y = x^c e^{ax} (C_1 f^n + C_2 f^{1-n}), \quad n \neq 1/2; \quad y = x^c e^{ax} f^{1/2} (C_1 + C_2 \ln f), \quad n = 1/2.$$

$$x^2 y'' + x y' - n(n-1) \ln^{-2} x y = 0. \quad (2.8)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \ln x = u$ .

$$y = C_1 \ln^n x + C_2 \ln^{1-n} x, \quad n \neq 1/2; \quad y = \ln^{1/2} x (C_1 + C_2 \ln \ln x), \quad n = 1/2.$$

$$y'' - (1 + e^x) y' - n(n-1) e^{2x} y = 0. \quad (2.9)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \exp(e^x) = u$ .

$$y = C_1 \exp(n e^x) + C_2 \exp((1-n) e^x), \quad n \neq 1/2;$$

$$y = \exp(1/2 e^x) (C_1 + C_2 e^x), \quad n = 1/2.$$

$$y'' - (\cos x - \operatorname{tg} x) y' - n(n-1) \cos^2 x y = 0. \quad (2.10)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \exp(\sin x) = u$ .

$$y = C_1 \exp(n \sin x) + C_2 \exp((1-n) \sin x), \quad n \neq 1/2;$$

$$y = \exp(1/2 \sin x) (C_1 + C_2 \sin x), \quad n = 1/2.$$

$$y'' - \left( \frac{g''}{g'} + g' \right) y' - n(n-1) g'^2 y = 0. \quad (2.11)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \exp g = u$ ,  $g = g(x)$ ,  $g' \neq 0$ .

$$y = C_1 \exp(n g) + C_2 \exp((1-n) g), \quad n \neq 1/2;$$

$$y = \exp(1/2 g) (C_1 + C_2 g), \quad n = 1/2.$$

$$\cos^4 x \, y'' + \cos^2 x \, (2 \operatorname{tg} x \cos^2 x - 1) \, y' - n \, (n - 1) \, y = 0 \, . \qquad (2.12)$$

Sonderfall von (2.1) mit  $f = \exp(\operatorname{tg} x) = u$  bzw. von (2.11) mit  $g = \operatorname{tg} x$  .

$$y = C_1 \exp(n \operatorname{tg} x) + C_2 \exp((1 - n) \operatorname{tg} x) \, , \quad n \neq 1/2;$$

$$y = \exp(1/2 \operatorname{tg} x) \, (C_1 + C_2 \operatorname{tg} x) \, , \quad n = 1/2 \, .$$

### 3. Differentialgleichungen mit der reduzierten Differentialgleichung

$$\boldsymbol{v}^{**} + \boldsymbol{b}^2 \boldsymbol{u}^{2r-2} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \, , \quad \boldsymbol{b} = \text{const}$$

$$v = u^{1/2} \, Z_{1/2r} (b/r \, u^r) \, , \quad Z = \text{Zylinderfunktion.}$$

$$y'' - \frac{f''}{f'} \, y' + b^2 f'^2 f^{2r-2} \, y = 0 \, , \qquad (3.1)$$

$$f = f(x) \, , \quad f' \neq 0 \, . \quad u = f; \quad y = f^{1/2} \, Z_{1/2r} (b/r \, f^r) \, .$$

$$y'' - y' + b^2 e^{-2x} \, y = 0 \, . \qquad (3.2)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = e^x$ ,  $r = -1$ :  $y = e^x [C_1 \sin(b \, e^{-x}) + C_2 \cos(b \, e^{-x})]$ .

$$y'' + y' + b^2 e^{2x} \, y = 0 \, . \qquad (3.3)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = e^{-x}$ ,  $r = -1$ :  $y = e^{-x} [C_1 \sin(b \, e^x) + C_2 \cos(b \, e^x)]$ .

$$y'' - a \, y' + a^2 b^2 e^{2rax} \, y = 0 \, . \qquad (3.4)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = e^{ax}$ :  $y = \exp(a \, x/2) \, Z_{1/2r} (b/r \, e^{rax})$  .

$$y'' + \operatorname{tg} x \, y' + b^2 \cos^2 x \sin^{2r-2} x \, y = 0 \, . \qquad (3.5)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = \sin x$  ,  $y = \sin^{1/2} x \, Z_{1/2r} (b/r \sin^r x)$  .

$$y'' - \operatorname{Tg} x \, y' + b^2 \operatorname{Cof}^2 x \, \operatorname{Sin}^{2r-2} x \, y = 0 \, . \qquad (3.6)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = \operatorname{Sin} x$  ,  $y = \operatorname{Sin}^{1/2} x \, Z_{1/2r} (b/r \operatorname{Sin}^r x)$  .

$$x \, y'' - (1 + 2 \, x^2) \, y' + 4 \, b^2 \, x^3 \, e^{2rx^2} \, y = 0 \, . \qquad (3.7)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = \exp(x^2)$  ,  $y = \exp(x^2/2) \, Z_{1/2r} (b/r \, e^{rx^2})$  .

$$x^2 \, y'' + x \, y' + b^2 \ln^{2r-2} x \, y = 0 \, . \qquad (3.8)$$

Sonderfall von (3.1) mit  $u = \ln x$  ,  $y = \ln^{1/2} x \, Z_{1/2r} (b/r \ln^r x)$  .

$$y'' - \left( \frac{f''}{f'} + 2a \right) y' + \left( b^2 f'^2 r^{2r-2} + a^2 + a \frac{f''}{f'} \right) y = 0. \quad (3.9)$$

Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = e^{ax} z$  in (3.1) mit  $z$  statt  $y$  über.  $y = e^{ax} f^{1/2} Z_{1/2r}(b/r f') .$

$$x^2 y'' - \left( x \frac{f''}{f'} + 2c \right) x y' + \left( b^2 f'^2 f^{2r-2} x^2 + c \frac{f''}{f'} x + c^2 + c \right) y = 0. \quad (3.10)$$

Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = x^c z$  in (3.1) mit  $z$  statt  $y$  über.  $y = x^c f^{1/2} Z_{1/2r}(b/r f') .$

$$\left. \begin{aligned} x^2 y'' - \left[ x \left( \frac{f''}{f'} + 2a \right) + 2c \right] x y' \\ + \left[ x^2 \left( a^2 + a \frac{f''}{f'} + b^2 f'^2 f^{2r-2} \right) + x \left( 2ac + c \frac{f''}{f'} \right) \right. \\ \left. + c(c+1) \right] y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Die Differentialgleichung geht durch die Transformation  $y = x^c e^{ax} z$  in (3.1) mit  $z$  statt  $y$  über.  $y = x^c e^{ax} f^{1/2} Z_{1/2r}(b/r f') .$

#### 4. Differentialgleichungen mit der reduzierten Differentialgleichung

$$v^{**} (e^{2u} - 1) - 4 e^{2u} v = 0$$

$$v = (e^{2u} - 1) [C_1 + C_2 \ln(1 - e^{-2u})] + C_2 .$$

$$y'' - \frac{f''}{f'} y' - 4 \frac{e^{2f}}{e^{2f} - 1} f'^2 y = 0, \quad (4.1)$$

$$u = f, \quad y = (e^{2f} - 1) [C_1 + C_2 \ln(1 - e^{-2f})] + C_2 .$$

$$x (x^{2n} - 1) y'' + (x^{2n} - 1) y' - 4 n^2 x^{2n-1} y = 0. \quad (4.2)$$

Sonderfall von (4.1) mit  $u = n \ln x$ .

$$y = (x^{2n} - 1) [C_1 + C_2 \ln(1 - x^{-2n})] + C_2 .$$

$$x (x^2 - 1) y'' + (x^2 - 1) y' - 4 x y = 0. \quad (4.3)$$

Sonderfall von (4.2) mit  $n = 1$ .  $y = (x^2 - 1) [C_1 + C_2 \ln(1 - x^{-2})] + C_2 .$

$$\cos^2 x y'' - \operatorname{ctg} x y' - 4 y = 0. \quad (4.4)$$

Sonderfall von (4.1) mit  $u = -\ln \cos x$ .  $y = \operatorname{tg}^2 x (C_1 + 2 C_2 \ln \sin x) + C_2 .$

$$(1 - e^{2x})^2 y'' - 2 (1 - e^{2x}) y' - 4 e^{2x} y = 0 . \tag{4.5}$$

Sonderfall von (4.1) mit  $u = -1/2 \ln(1 - e^{2x})$  .

$$y = \exp(2 x)/(1 - e^{2x}) (C_1 + 2 C_2 x) + C_2 .$$

Durch die Transformation  $e^{2x} \rightarrow x$  geht die Differentialgleichung (4.5) über in

$$x (x - 1)^2 y'' + x (x - 1) y' - y = 0 \tag{4.6}$$

mit der Lösung  $y = x/(x - 1) [C_1 + C_2 \ln x] - C_2$  [Vgl. KAMKE (2.326)] .

$$y'' - \frac{y'}{\sin x \operatorname{Co} x} - 4 y = 0 . \tag{4.7}$$

Sonderfall von (4.1) mit  $u = \ln \operatorname{Co} x$  .  $y = \operatorname{Sin}^2 x (C_1 + 2 C_2 \operatorname{Tg} x) + C_2$  .

### 5. Differentialgleichungen mit der reduzierten Differentialgleichung $v^{**} \sin^2 u - 2 v = 0$ bzw. $v^{**} \cos^2 u - 2 v = 0$

$$v = \operatorname{ctg} u (C_1 - C_2 u) + C_2 \quad \text{bzw.} \quad v = \operatorname{tg} u (C_1 + C_2 u) + C_2 .$$

$$y'' - \frac{f''}{f'} y' - 2 \left( \frac{f'}{\sin f} \right)^2 y = 0 . \tag{5.1}$$

$$u = f . \quad y = \operatorname{ctg} f (C_1 - C_2 f) + C_2 .$$

$$y'' - \frac{f''}{f'} y' - 2 \left( \frac{f'}{\cos f} \right)^2 y = 0 . \tag{5.2}$$

$$u = f . \quad y = \operatorname{tg} f (C_1 + C_2 f) + C_2 .$$

$$y'' + \operatorname{Tg} x y' - 2 y = 0 \quad [\text{Vgl. KAMKE (2.64)}] . \tag{5.3}$$

Sonderfall von (5.1) mit  $u = \arcsin(1/\operatorname{Co} x)$  .

$$y = \operatorname{Sin} x (C_1 - C_2 \arcsin(1/\operatorname{Co} x)) + C_2 .$$

$$(a^2 - x^2)^2 y'' - x (a^2 - x^2) y' - 2 a^2 y = 0 . \tag{5.4}$$

Sonderfall von (5.2) mit  $u = \arcsin(x/a)$  .

$$y = x/(a^2 - x^2)^{1/2} (C_1 + C_2 \arcsin(x/a)) + C_2 .$$

$$(1 - x^2)^2 y'' - x (1 - x^2) y' - 2 y = 0 . \tag{5.5}$$

Sonderfall von (5.4) mit  $a = 1$  .  $y = x/(1 - x^2)^{1/2} (C_1 + C_2 \arcsin x) + C_2$  .

$$(1 - e^{-2x}) y'' + y' - 2y = 0. \quad (5.6)$$

Sonderfall von (5.2) mit  $u = \operatorname{arctg}(e^{2x} - 1)^{1/2}$ .

$$y = (e^{2x} - 1)^{1/2} (C_1 + C_2 \operatorname{arctg}(e^{2x} - 1)^{1/2}) + C_2.$$

$$(x^2 + 1) y'' + 2x y' - 2y = 0. \quad (5.7)$$

Sonderfall von (5.2) mit  $u = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = x(C_1 + C_2 \operatorname{arctg} x) + C_2$ .

### Schlussbemerkungen

Da  $v^{**} F(u) - F^{**}(u) v = 0$  mit der Lösung

$$v = F(u) \left[ C_1 + C_2 \int \left( \frac{1}{F^2(u)} \right) du \right]$$

die allgemeinste Form der reduzierten Differentialgleichung (3) darstellt, so ist die Differentialgleichung

$$F(f) \left[ y'' - \frac{f''}{f'} y' \right] - \frac{d^2 F(f)}{df^2} f'^2 y = 0, \quad f = f(x), \quad f' \neq 0, \quad (5)$$

mit

$$u = f \quad \text{und} \quad y = F(f) \left[ C_1 + C_2 \int \left( \frac{1}{F^2(f)} \right) df \right] \quad (6)$$

die allgemeinste Differentialgleichung (1), die nach dem angeführten Verfahren lösbar ist, sofern die beliebigen Funktionen  $F(f)$  und  $f(x)$  den eingangs gestellten Bedingungen genügen.

Die Beziehungen (5) und (6) sind einander eineindeutig zugeordnet.

### Summary

By the transformation  $y(x) = v(u)$ ,  $u = \int \exp(-\int G(x) dx) dx$  the differential equation  $D \equiv y'' + G(x) y' + H(x) y = 0$  turns to  $T \equiv (u')^2 v^{**} + H v = 0$ , where  $v^{**}$  signifies  $d^2 v/du^2$ , and  $u' = du/dx$  and  $H = H(x)$  should be expressed as functions of  $u$ .

From the solution  $v(u)$  of  $T$  follows immediately the solution  $y(x)$  of  $D$ , and vice versa.

In this paper there are treated some of the types of differential equations, that may be solved by this method.

(Eingegangen: 10. November 1954.)



### On a Thermistor-Pirani Gauge of High Sensitivity

By ALI ALI ARAFA, FATHI SULTAN AHMED SULTAN, and IBRAHIM SAYED SHAFIE,  
Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

In this paper an attempt is made to increase the sensitivity of a Pirani gauge by the introduction of a semi-conducting element having a negative temperature-resistance coefficient. The semi-conducting element which fulfills this requirement is a bead thermistor of the type D 163 903 (V-519), used in 10-cm-band waveguides for microwave-power detection. The electrical setup is shown in Figure 1,

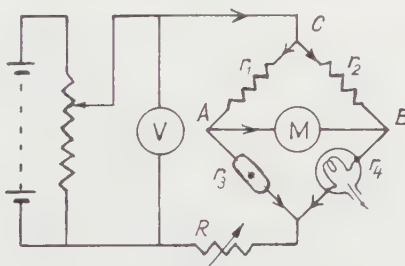


Figure 1

in which  $r_1$  and  $r_2$  are 1000 and 250  $\Omega$  respectively,  $r_3$  is the thermistor and  $r_4$  is a 110 V, 25 W lamp which is connected to the vacuum system. It will be seen that the use of the thermistor in this connection has a great advantage as regards the gauge sensitivity and linearity.

The direct-current characteristics of the thermistor are shown in Figure 2. As the current through the thermistor is increased, the voltage at first rises in accordance with OHM's law. For large currents, however, appreciable heating of the thermistor results, thereby causing a decrease in resistance, and the current-voltage characteristic becomes non-linear. A sufficiently high current increases the temperature so much that the resulting drop in resistance may actually produce a voltage decrease and a negative differential resistance occurs.

The best working conditions necessitate that the thermistor should be safe from overload or burnout. The useful and safe thermistor current ranges from about 2.5 to 11.0 mA, which corresponds to a resistance change from 670 to 110  $\Omega$  and a voltage across it ranging from 1.58 to 1.2 V.

When the pressure in the gauge increases, the resistance of the manometric wire decreases producing a drop in the potential of B relative to that of A. The current through the thermistor decreases producing an increase in its resistance. The potential of A accordingly becomes higher than it was, had the thermistor been replaced by a pure resistance. In other words, better sensitivity is obtained due to simultaneous changes of opposite signs in  $r_3$  and  $r_4$  with changing pressure.

<sup>1)</sup> Physics Dept., Faculty of Science, Alexandria University.

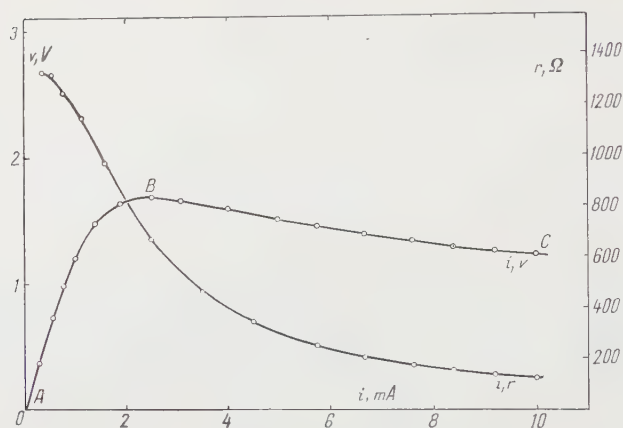


Figure 2

Voltage-current and resistance-current characteristics of the bead thermistor.

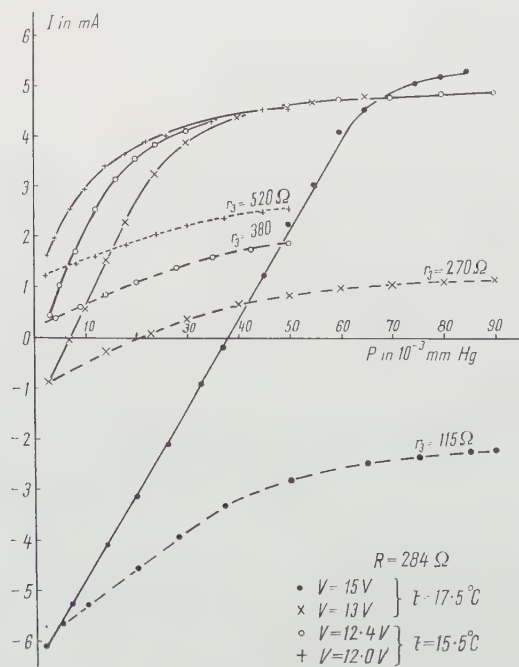


Figure 3

( $P$ — $I$ )-relation for different voltages applied to the bridge;

— with thermistor and --- with a pure resistance in arm 3.

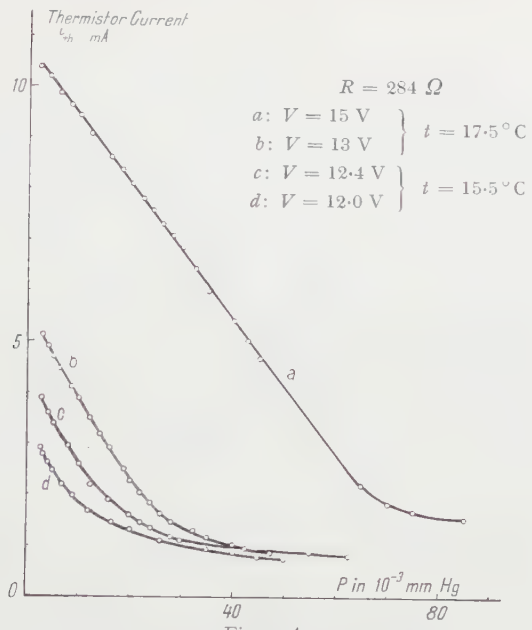


Figure 4

The relation between the pressure  $P$  and the thermistor current  $i_{th}$  for different voltages applied to the bridge.

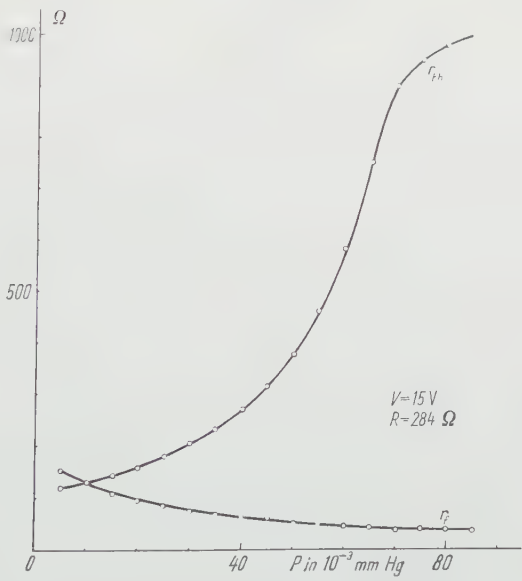


Figure 5

The simultaneous variation of the filament and thermistor resistances with the pressure.

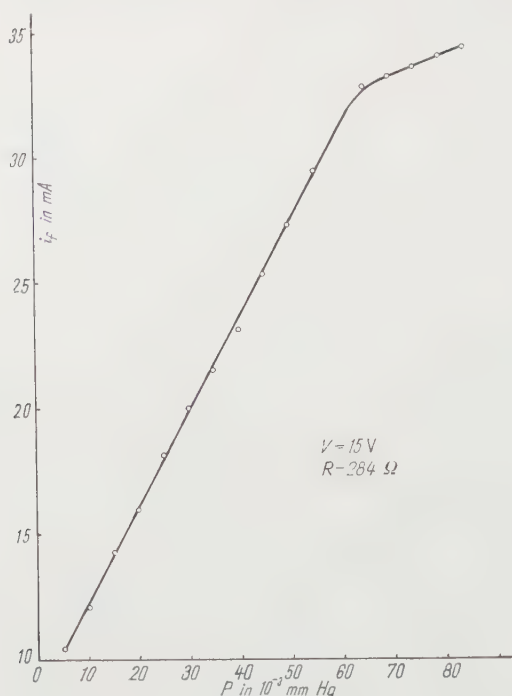


Figure 6

The variation of the filament current with the pressure.

The family of curves in Figure 3 demonstrate the relation between the pressure  $P$  in the gauge and the unbalanced current  $I$  in the meter  $M$  for different voltages ( $V$ ) applied to the bridge. For each curve the thermistor current starts with a certain value, which is limited by the voltage  $V$  and the initial minimum pressure. These conditions fix the initial point on the working range  $BC$  of the thermistor-current-voltage characteristic. As the pressure increases, the thermistor current decreases (Figure 4). The working point moves towards the point  $B$  on the curve in Figure 2. The thermistor current values beyond  $B$  produced by further increase of pressure result in a non-linearity in the  $(P-I)$ -relation.  $V$  has to be so chosen that the initial thermistor current is high enough to realize a maximum linear range in the  $(P-I)$ -curve subject to the condition that this thermistor current is less than the burnout value. The relation is linear so long as the thermistor functions along the part  $BC$ .

This corresponds to a thermistor resistance which ranges from 110 up to 670  $\Omega$ .

Figure 5 shows the variation of  $r_{th}$  and  $r_f$  with  $P$ . The  $(P-r_{th})$ -relation is obtained by inserting a 1- $\Omega$ -resistance milliammeter in series with the thermistor and noting the variation of  $i_{th}$  with increasing  $P$ , and then deducing the corresponding values of  $r_{th}$  from the thermistor characteristics in Figure 2. The  $(P-r_f)$  relation, however, can be easily obtained by indirect means.

Figure 6 gives the relation between  $P$  and  $i_f$ . It is linear throughout that portion corresponding to the linear portion of the  $(P-I)$ -curve of Figure 3 and of the  $(P-i_{th})$ -curve of Figure 4.

*Sensitivity of the bridge*

In order to show the advantage realized by the thermistor, a similar set of curves (Figure 3) gives the relation between  $P$  and  $I$  using a pure resistance of the same initial value as that of the thermistor at  $P_{min}$ . They show a great difference in the sensitivity and a wider range of linearity. The sensitivity of the gauge using the thermistor amounts to  $170 \mu A / \mu (10^{-3} \text{ mm Hg})$ , i.e.  $5.88 \times 10^{-6} \text{ mm Hg} / \mu A$ . The linearity of the curves surpasses that of the ordinary Pirani gauge. The simplicity of the circuit compared with that of the ionization gauge is obvious.

Such a bridge could be used with the utmost safety without the danger of burn-out for measuring the lowest pressure attained by any vacuum system, since the burnout current of the thermistor used is of the order of 50 mA. In the present work, a thermistor current of about 10.5 mA has not been exceeded.

The choice of the pressure range is arbitrary, since by proper adjustment of  $R$ , a balanced circuit can always be obtained at any desired pressure. From this value of pressure,  $I$  increases linearly with  $P$ . This fact is indicated by the set of straight lines in Figure 7. When full scale deflection in the meter is reached, the balance is restored by decreasing the variable resistance  $R$  in order to increase the current in the bridge and both filament current  $i_f$  and thermistor current  $i_{th}$  increase.

The resistance of the filament decreases because the effect of increasing pressure overweighs that of increasing  $i_f$ . The thermistor resistance decreases

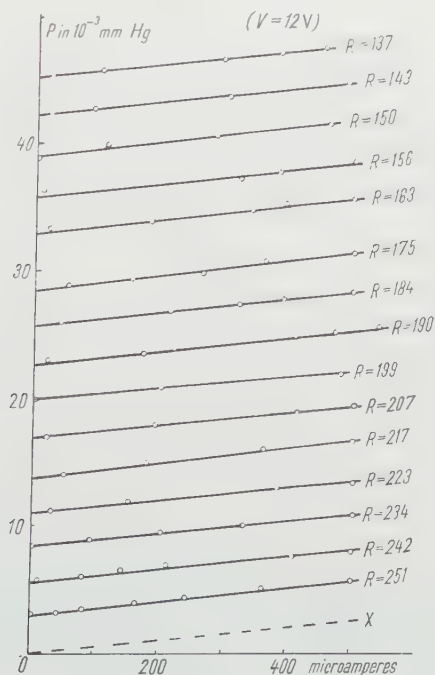


Figure 7

The ( $P$ — $I$ )-relation for different values of  $R$ .



because of the increase in its current. Thus we start again with the same ratio between  $r_f$  and  $r_{th}$ . This process is repeated to cover the whole range of pressure required. With increasing  $P$ , the thermistor current decreases along one and the same ( $P-I$ )-line. As mentioned above this has the effect of an augmented rise of the potential of  $A$  with respect to that of  $B$ . This set of lines are to a great extent parallel to each other, which corresponds to a constant sensitivity ( $1 \mu A, 5.8 \times 10^{-6} \text{ mm Hg}$ ). Working from a pressure of the order of  $2.7 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$  downwards is possible using the same meter  $M$  ( $500 \mu A, 75 \Omega$  resistance), assuming the same sensitivity to apply to the extrapolated line  $OX$ . This assumption is justified, since the thermistor current is never below  $3.5 \text{ mA}$ , which is in the useful working range of the thermistor (Figures 2, 3, and 4). The minimum reading of the meter  $M$  in this case will depend on the efficiency of the vacuum system.

### *Zusammenfassung*

Ein Hitzdrahtmanometer bildet, mit einem Thermistor in eine Wheatstone-Anordnung geschaltet, ein Thermistor-Pirani-Messgerät hoher Empfindlichkeit, das in einem weiten Gebiet eine lineare Druck-Strom-Abhängigkeit zeigt. Dabei wird von der verstärkenden Wirkung der negativen Widerstandcharakterististik eines Thermistors Gebrauch gemacht, um die von winzigen Druckänderungen herrührenden kleinen Widerstandsvariationen zu verstärken.

(Received: September 24, 1955.)

## **The Indentation of a Transversely Isotropic Half-Space by a Rigid Punch**

By HARRY DONALD CONWAY, Ithaca, New York, U. S. A.<sup>1)</sup>

### **Introduction**

Problems involving a large elastic mass having a plane boundary which is indented by a cylindrical punch whose axis is normal to the plane, have considerable practical significance. For example, they are encountered in the analysis of structural foundations where the large elastic mass simulates the earth, and the cylinder simulates a pillar.

The first investigation of problems of this kind was made in 1885 by BOUSSINESQ [1]<sup>2)</sup> who gave the contact pressure distribution for a rigid, flat-ended and axially loaded punch having an elliptical cross section. It was not until 1939 that LOVE [2] treated the problem of a right circular cone; this solution required great intuition on the part of the author, and cannot easily be extended to other forms of punch.

A very considerable advance in finding the pressure distribution under a punch of axisymmetrical but otherwise arbitrary shape was next made by SCHUBERT [3] who reduced the problem to that of solving a pair of relatively simple integral equations, and gave the distributions of contact pressure for

<sup>1)</sup> Cornell University, College of Engineering, Department of Mechanics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 84.

number of punch shapes. In addition, SCHUBERT gave a very simple solution to the general problem of an indented isotropic half-plane and again illustrated his solution by a number of examples.

Apparently unaware of SCHUBERT's work, HARDING and SNEDDON [4] also treated the axisymmetrical problem, reduced it to that of solving dual integral equations different from those of SCHUBERT, and gave, as examples, the solutions for a flat-ended punch, cone, and ball. SNEDDON later presented detailed numerical results obtained by his method, including a study of the stresses in the interior of the half-space for a flat-ended punch [5] and cone [6]. An alternative method of solution, not confined to axisymmetrical problems, has been given by GREEN [7], who has discussed, by way of illustration, the rigid cylindrical punch having a flat end inclined to the generators of the cylinder.

Of recent years, a considerable amount of attention has been given to the problem of an indented half-space of transversely isotropic material, a number of papers having been published on the subject by ELLIOTT [8], [9], SHIELD [10], and PAYNE [11]. Such a material has the structure of hexagonal closely-packed crystals and is characterized by having five elastic constants. It is the purpose of the present paper to show that, if the distribution of the contact pressure is known under an axisymmetrical rigid punch acting on an isotropic half-space, the corresponding distribution for a transversely isotropic half-space may be written down by inspection. Similar results [12] have recently been given for an indented orthotropic half-plane.

As in most analyses of this kind, the effects of frictional forces under the punch have been neglected, and the plane assumed to be deformed solely by normally applied forces. A two-dimensional investigation by OKUBO [13] indicates that this is quite probably a reasonable assumption for the axisymmetrical case. It is also considered unlikely that the solutions are at all valid for an indenting surface of the punch which is far removed from a plane. For example, it is difficult to see how it can reasonably be assumed that the applied forces are normal in the case of a cone with a small apex angle. Additionally, the problem is assumed to be an elastic one, it being assumed that the presence of a small amount of plasticity will not change the calculated contact-pressure distribution to any great extent.

### Analysis

Consider an isotropic half-space, the bounding plane of which is loaded with a normal concentrated load  $P$ , acting in the  $z$ -direction. The solution of this problem is very well known, having first been given by BOUSSINESQ [1], who showed that the vertical deflection of the bounding plane at a radius  $r$  is

$$\omega_0 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \cdot \frac{P}{r} = \frac{1}{\pi E'} \cdot \frac{P}{r} \quad (1)$$

with the usual notation for elastic constants.

The case of a transversely isotropic half-space loaded in the same manner and having the bounding plane parallel to the hexagonal planes, was later treated by MICHELL [14], the corresponding vertical deflection being

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{A}}{2\pi\sqrt{L}} \cdot \frac{\{(\sqrt{AC} + L)^2 - (F + L)^2\}^{1/2}}{AC - F^2} \cdot \frac{P}{r} \quad (2)$$

using the notation of LOVE [15] for the elastic constants  $A, C, F$ , and  $L$ , the strain energy function being given, in terms of these constants and the strains, by

$$\left. \begin{aligned} 2W = & A(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + C e_{zz}^2 + 2F(e_{yy} + e_{xx}) \\ & + 2(A - 2N)e_{xx}e_{yy} + L(e_{yz}^2 + e_{zx}^2) + N e_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

It follows that the vertical deflection of the bounding plane in the transversely isotropic case may be immediately obtained from that in the isotropic case by merely replacing  $E'$  by an equivalent modulus  $E_{eq}$  defined by the equation

$$E_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{A}\{\sqrt{AC} + L\}^2 - (F + L)^2\}^{1/2}}{\sqrt{L}(AC - F^2)}. \quad (4)$$

Since the deformation caused by a rigid punch may be obtained by integration from the concentrated load solution if the contact pressure distribution is known, it also follows that the pressure distribution for the transversely isotropic case is obtainable from that for the isotropic case merely by replacing  $E'$  by  $E_{eq}$ .

In what follows, it will be advantageous to outline the solution of SCHUBERT [3], remembering now that the half-space may be transversely isotropic rather than isotropic. Figure 1 shows the circular area of indentation caused by

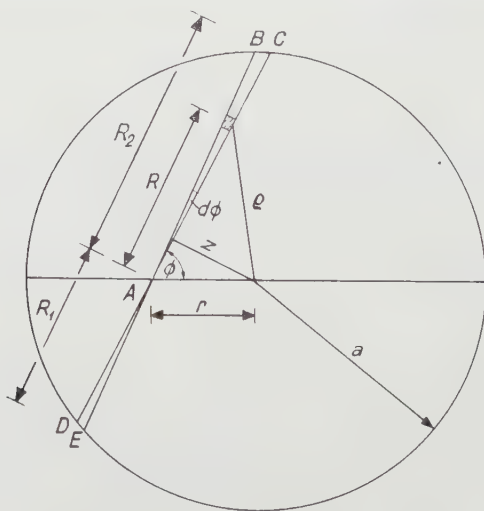


Figure 1  
Indented area of half space.

an axisymmetrical punch. Denoting the pressure by  $p$ , the deflection at a radius  $r$  due to the loading on the segments  $ABC$  and  $ADE$  is, from equation (2),

$$d\omega_0 = \frac{1}{\pi E_{eq}} d\varphi \int_{-R_1}^{R_2} p(R, \varphi) dR = \frac{1}{\pi E_{eq}} d\varphi \Phi_1(\varphi). \quad (5)$$

Hence the deflection  $\omega_0$  at a radius  $r$  due to the entire loading on the circle is

$$\omega_0 = \frac{2}{\pi E_{eq}} \int_0^r \Phi_1(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Now  $z = r \sin \varphi$  and hence

$$\omega_0 = \frac{2}{\pi E_{eq}} \int_0^z \frac{\Phi(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz, \quad \Phi(z) = \Phi_1\left(\arcsin \frac{z}{r}\right). \quad (7)$$

Since  $R = \sqrt{r^2 - z^2} + \sqrt{\varrho^2 - z^2}$  and  $dR/d\varrho = \varrho/\sqrt{\varrho^2 - z^2}$

$$\Phi(z) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} \frac{d\varrho}{r^2}. \quad (8)$$

It is interesting to note that the integral equation (8) has also been encountered by GURNEE [16] in connection with optical studies on orientated filaments. The solutions of equations (7) and (8) are, respectively

$$\Phi(z) = E_{eq} \left[ \omega_0(0) + z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega'_0(r)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dr \right], \quad (9)$$

$$p(\varrho) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\Phi(a)}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} - \int_{\varrho}^a \frac{\Phi'(s)}{\sqrt{s^2 - \varrho^2}} ds \right] = \frac{1}{\pi \varrho} \cdot \frac{d}{d\varrho} \int_a^{\varrho} \frac{\Phi(s) s}{\sqrt{s^2 - \varrho^2}} ds. \quad (10)$$

The constant term  $E_{eq} \omega_0(0)$  in equation (9) presents no difficulty, and is determined from the equilibrium equation

$$P = \int_0^a 2 \pi p(\varrho) \varrho d\varrho. \quad (11)$$

Knowing the slope  $\omega'_0(r)$  of the punch, equation (9) gives  $\Phi(z)$  and hence  $\Phi(s)$  which, when substituted in equation (10), gives the pressure distribution under the punch.

Considering the flat-ended punch,  $\omega'_0(r)$  will be zero,  $\Phi(z) = \Phi(s) = \text{a constant}$ , and the well-known result of BOUSSINESQ [1] follows

$$p(\varrho) = \frac{P}{2 \pi a \sqrt{a^2 - \varrho^2}}. \quad (12)$$

It is seen that the indented area is constant, and the pressure is independent of the elastic constants of the half-space, being the same whether the latter is isotropic or transversely isotropic. This statement is only true in the case of a flat-ended punch, although the form of the contact pressure distribution will be the same for other kinds of punch. For example, the conical punch has a pressure distribution, determined from equations (9), (10), and (11) of

$$p(\varrho) = \frac{P}{\pi a^2} \cosh^{-1} \left( \frac{a}{\varrho} \right), \quad a^2 = \frac{2P}{\alpha \pi E_{eq}} \quad (13)$$

where  $\alpha = \tan \beta$ ,  $\beta$  being the angle which the face of the cone makes with the horizontal.

It may also be mentioned here that BOROWICKA [17] has obtained, by a rather intuitive approach, the distribution of pressure under a flat-ended punch, when the load  $P$  is applied parallel to but distant  $b$  from the axis of the punch. Assuming that contact does not cease at any point, the contact pressure was shown to be

$$p(\varrho, \theta) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - \varrho^2}} \left( 1 + 3 \frac{b}{a} \frac{\varrho}{a} \cos \theta \right) \quad (14)$$

where  $\theta$  is measured from a diameter perpendicular to the axis about which the punch turns due to the eccentricity of loading. This result is also applicable to a transversely isotropic half-space. So far as is known, the solution has not been found for the case where the eccentricity  $b$  is sufficiently large to cause contact to cease over part of the face of the punch. However, it is apparent that the contact-pressure distribution is still the same whether the half-space is isotropic or transversely isotropic.

#### REFERENCES

- [1] J. BOUSSINESQ, *Application des potentiels...* (Paris 1885).
- [2] A. E. H. LOVE, *Boussinesq's Problem for a Rigid Cone*, Quart. appl. Math. 10, 161 (1939).
- [3] G. SCHUBERT, *Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken*, Ingen.-Arch. 13, 132 (1942).
- [4] J. W. HARDING and I. N. SNEDDON, *The Elastic Stresses Produced by the Indentation of the Plane Surface of a Semi-Infinite Elastic Solid by a Rigid Punch*, Proc. Camb. phil. Soc. 41, 16 (1945).
- [5] I. N. SNEDDON, *Boussinesq's Problem for a Flat-Ended Cylinder*, Proc. Camb. phil. Soc. 42, 29 (1946).
- [6] I. N. SNEDDON, *Boussinesq's Problem for a Rigid Cone*, Proc. Camb. phil. Soc. 44, 492 (1948).
- [7] A. E. GREEN, *On Boussinesq's Problem and Penny-Shaped Cracks*, Proc. Camb. phil. Soc. 45, 251 (1949).
- [8] H. A. ELLIOTT, *Three-Dimensional Stress Distributions in Hexagonal Aeolotropic Crystals*, Proc. Camb. phil. Soc. 44, 522 (1948).
- [9] H. A. ELLIOTT, *Axial Symmetric Stress Distributions in Aeolotropic Hexagonal Crystals. The Problem of the Plane and Related Problems*, Proc. Camb. phil. Soc. 45, 621 (1949).
- [10] R. T. SHIELD, *Notes on Problems in Hexagonal Aeolotropic Materials*, Proc. Camb. phil. Soc. 47, 401 (1951).
- [11] L. E. PAYNE, *On Axially Symmetric Crack and Punch Problems for a Medium with Transverse Isotropy*, Proc. Camb. phil. Soc. 50, 466 (1954).
- [12] H. D. CONWAY, *The Indentation of an Orthotropic Half-Plane*, ZAMP 6, 40 (1955).
- [13] H. OKUBO, *The Stress Distribution in a Semi-Infinite Domain Having a Plane Boundary and Compressed by a Rigid Body*, Z. angew. Math. Mech. 20, 271 (1940).
- [14] J. H. MICHELL, *The Stress in an Aeolotropic Elastic Solid with an Infinite Plane Boundary*, Proc. Lond. math. Soc. 32, 247 (1900).
- [15] A. E. H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition (Cambridge University Press 1927), 160 p.



- [16] E. F. GURNEE, *Solution of an Integral Equation Arising in Optical Studies of Oriented Filaments*, J. appl. Phys. 26, 918 (1955).
- [17] H. BOROWICKA, *Über ausmittig belastete starre Platten auf elastisch-isotropem Untergrund*, Ingen.-Arch. 14, 1 (1943).

### Zusammenfassung

Der Verfasser gibt eine allgemeine Lösung für die Verteilung des Druckes zwischen einem axialsymmetrischen Stempel und einem transversal-isotropen Halbraum. Es wird gezeigt, dass die Verteilung des Druckes für den flachen Stempel mit allgemeiner Belastung unabhängig ist von den elastischen Eigenschaften des Halbraums und auch genau dieselbe, als ob der Halbraum isotrop wäre.

(Received: September 13, 1955.)

---

### Varia – Miscellaneous – Divers

---

## Congrès international sur les tubes électroniques pour hyperfréquences du 29 mai au 2 juin 1956 à Paris

La Société des radioélectriciens et la Société française des Ingénieurs techniciens du vide organisent à Paris, du 29 mai au 2 juin 1956, le congrès submentionné. Les sujets proposés sont:

1. Phénomènes fondamentaux et théories générales.
2. Lampes à grilles de contrôle.
3. Magnétrons.
4. Tubes à modulation de vitesse.
5. Tubes à onde progressive amplificateurs et oscillateurs.
6. Tubes divers (tubes à saut de potentiel, tubes à ondes de charge d'espace...).
7. Accélérateurs linéaires.
8. Générateurs spéciaux pour ondes millimétriques et inframillimétriques.
9. Tubes à décharge gazeuse.
10. Circuits associés (cavités résonnantes, circuits à retard).
11. Technologie.
12. Optique électronique.
13. Mesures.

Siège du Congrès: Paris VI<sup>e</sup>, 44, rue de Rennes.

N. SCHAEETI

## 9. Internationaler Kongress für Angewandte Mechanik

Der Kongress wird vom 7. bis 13. September 1956 in Brüssel stattfinden. Kongressleitung: Prof. Dr. F. VAN DEN DUNGEN, Universität Brüssel. Sektionen:

1. Hydro- und Aerodynamik; 2. Mechanik der festen Körper (starre Körper, Schwingungen, Elastizität, Plastizität). Das Programm kann von den Lehrstühlen für Mechanik an der ETH. bezogen werden.

H. ZIEGLER

# Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Primzahlen.** Par ERNST TROST (Birkhäuser, Bâle 1953). Volume 2 de la série: *Elemente der Mathematik von höherem Standpunkt aus*. 95 p.; broché fr. s. 13.50.

On sait que la théorie des nombres premiers pose des problèmes intéressants, dont quelques-uns sont encore à résoudre. EUCLIDE a déjà établi l'existence d'une infinité de nombres premiers; mais ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle que DIRICHLET a démontré qu'une progression arithmétique, dont les termes sont premiers avec la raison, contient aussi une infinité de nombres premiers. A la fin du même siècle HADAMARD et DE LA VALLÉE-POUSSIN établirent la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers: si  $\pi(x)$  désigne le nombre des nombres premiers inférieurs à  $x$ , le quotient de  $\pi(x)$  par  $x/\ln x$  tend vers 1 lorsque  $x$  croît indéfiniment. Une proposition célèbre de GOLDBACH – il existe une infinité de nombres premiers  $p$  tels que  $p + 2$  soit encore un nombre premier – n'est pas encore démontrée.

L'opuscule de M. TROST est une excellente introduction à la théorie des nombres premiers et aux questions rappelées ci-dessus. En particulier la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers et le théorème cité de DIRICHLET y sont établis par la méthode récente de SELBERG et d'ERDÖS, qui constitue une simplification remarquable et est de nature élémentaire. L'exposition est concise et rigoureuse. Bien que demandant du lecteur une attention et un effort soutenus, la lecture ne réclame de lui que peu de connaissances préalables d'analyse. Les propriétés de théorie des nombres nécessaires sont établies dans la mesure où elles trouvent emploi pour celle des nombres premiers. L'ouvrage peut être recommandé aux jeunes mathématiciens qui désirent être mis au courant des questions les plus importantes de la théorie des nombres premiers.

M. Plancherel

**Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique.** Von TH. VOGEL (Editions du Centre national de la recherche scientifique, Paris 1953). 191 S., 4 Fig., broschiert fFr. 1200.—.

Die ausserordentliche Bedeutung der orthogonalen Funktionssysteme für die Mathematik und ihre Anwendungen rechtfertigen wohl die Herausgabe eines Leitfadens über diesen Gegenstand. Die vorliegende Schrift behandelt zuerst die allgemeine Theorie unter Einschluss der Eigenwertprobleme, die ja auch auf orthogonale Funktionssysteme führen. In einem 2. Kapitel werden die klassischen Orthogonalsysteme (Besselsche Funktionen, Legendresche, Hermitesche, Laguerresche Polynome und andere) und insbesondere auch die Fourierschen Reihen eingehend behandelt. Das 3. Kapitel enthält sodann die zahlreichen, sorgfältig ausgewählten und durchaus nicht trivialen Anwendungsbeispiele aus der Physik. Das Werk kann zum Einarbeiten in die Materie wärmstens empfohlen werden.

H. Rutishauser

**Discontinuous Automatic Control.** Von IRMGARD FLÜGGE-LOTZ (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953). 168 S., 102 Fig.; \$5.—.

In vielen Fällen liesse sich eine Regulierung technisch am einfachsten lösen, wenn das Regelorgan nur zwei symmetrische Stellungen oder zwei entgegengesetzt gleiche Verstellgeschwindigkeiten aufweisen müsste. Eine solche Lösung lässt sich in geschlossener mathematischer Form nicht mehr diskutieren. Im vor-

liegenden Buch wird versucht, den Ausschwingvorgang, die Stabilitätsbedingungen und den Einfluss von Unvollkommenheiten des Regelsystems systematisch mit Hilfe graphischer Verfahren eingehend zu diskutieren. Drei Viertel des Buches sind der Betrachtung eines bewegten Körpers mit einem Freiheitsgrad gewidmet, wobei die Aufgabe der Regelung darin besteht, beim Auftreten einer äussern Störung den Körper möglichst rasch in die ursprüngliche Lage oder Bahn zurückzuführen. Die Stellung (Positionsregelung) bzw. die Verstellgeschwindigkeit (Geschwindigkeitsregelung) des Regelorgans ist nur vom Vorzeichen einer Regelfunktion abhängig, welche ihrerseits von der Lageabweichung und deren zeitlicher Ableitung des betrachteten Körpers abhängt. Die der Hauptbewegung überlagerte Bewegung soll sich durch eine lineare Differentialgleichung zweiten Grades darstellen lassen. In diesem Falle lässt sich die superponierte Bewegung für jede Ausgangslage in zeitliche Teilstücke zerlegen, wobei die Zeit als Parameter erscheint und die Bewegung in einem Phasendiagramm (Lageabweichung und deren zeitliche Ableitung als schiefwinklige Koordinaten) als Stücke einer logarithmischen Spirale aufgezeichnet werden kann. Die Diskontinuität hat zur Folge, dass nur zwei Spiralen mit Zentren symmetrisch zum Ursprung betrachtet werden müssen. Die Schaltunkte liegen auf einer Geraden durch den Ursprung des Phasendiagramms (Positionsregelung). Bei der Geschwindigkeitsregelung mit Rückführung im Kontrollsystem wird gezeigt, dass die Darstellung in zwei Ebenen eines Phasenraumes genügt, um alle Fälle diskutieren zu können. In dieser Darstellungsart lässt sich der Einfluss von Unvollkommenheiten des Regelsystems (zeitliche Umschaltverzögerung; Umschaltung erst bei einem bestimmten Wert der Regelfunktion; oder Regelorgan auf Null, sofern die Regelfunktion innerhalb bestimmter, entgegengesetzter Werte sich befindet) sehr gut berücksichtigen. Im letzten Teil des Buches wird dieselbe Art Betrachtung angewandt auf das Problem der Längsstabilisierung eines Flugkörpers mit vorgeschriebener gerader Bahn. Die Regelung geschieht durch rasche Verdrehung des Einstellwinkels des Tragflügels oder des Höhenleitwerks zwischen zwei bestimmten Werten in Abhängigkeit der Abweichung von einem vorgegebenen absoluten Winkel und deren zeitlicher Ableitung. Die Bewegung selbst hat drei Freiheitsgrade; ohne Regelung ergeben sich vier Lösungen der freien Bewegung. Bei Annahme von je zwei konjugiert komplexen Lösungen wird gezeigt, wie die Bewegung mit der Regelung unter verschiedenen Bedingungen erfolgt. Ein numerisches Beispiel wird durchgerechnet und in Phasendiagrammen diskutiert.

Das Wertvolle an diesem Buch ist die sehr eingehende Darstellung der Methode, mit welcher man den Problemen mit diskontinuierlicher Regelung beikommen kann. Literaturhinweise fehlen fast vollkommen, was sich damit erklären liesse, dass sich sozusagen alle Arbeiten über dieses Gebiet hinter dem Vorhang der militärischen Geheimsphäre verborgen halten. Um so dankbarer darf die zivile Welt über diesen Beitrag sein, der eine Lücke der Servotechnik ausfüllen hilft.

*H. Weber*

**Gasdynamik.** Von K. OSWATITSCH (Springer-Verlag, Wien 1952). 456 S., 300 Abb.; Ganzleinen sFr. 80.—.

Die Gasdynamik, die Lehre von den Strömungen kompressibler Medien, hat in den letzten zwei Jahrzehnten einen sehr bedeutenden Aufschwung genommen. Vor allem ist es die Flugtechnik, die, nachdem durch neuartige Antriebe viel höhere Geschwindigkeiten möglich geworden sind, sich sehr eingehend mit der Kompressibilität befassen muss.

Das Buch erscheint zu einer Zeit, in der das Bedürfnis nach Ordnung und Verständlichmachung der sehr zahlreichen theoretischen und experimentellen Untersuchungen der Kriegszeit besonders gross ist. Da der Verfasser es ausgezeichnet versteht, mit anschaulichen Begriffen und Methoden zu arbeiten, handelt es sich um ein Werk, das von grösstem Wert für jeden ist, der sich in dieses neue Gebiet einarbeiten will.

Daneben zeichnet es sich durch eine aussergewöhnliche Vollständigkeit der Erfassung der zum Teil schwer zugänglichen Literatur aus. Für jeden Kenner der Lehrbuchliteratur ist es eine angenehme Überraschung, zu sehen, wie OSWATITSCH keineswegs nur die bekannten Überlegungen wiedergibt, sondern nicht selten recht originelle Gedankenwendungen vornimmt, die den Gegenstand in neuem Licht erscheinen lassen.

Nach einleitenden Kapiteln mehr physikalischer Natur wird zunächst die Fadenströmung behandelt, wobei die auch hier nützlichen Charakteristiken frühzeitig eingeführt werden. Insbesondere ist der Abschnitt über nichtstationäre Fadenströmung sehr ausführlich, indem zum Beispiel die kugel- und zylindersymmetrischen Strömungen mit und ohne Verdichtungsstösse behandelt werden. Sodann folgen die allgemeinen Sätze über zwei- und dreidimensionale Strömungen. – Unter den Integralsätzen ist der Oswatitschsche über die Widerstandsberechnung aus dem Entropiefluss besonders bemerkenswert.

Sehr ausführlich wird sodann die linearisierte Theorie der Unter- und Überschallströmungen dargestellt. Es werden transsonische Ähnlichkeitsgesetze behandelt, ebenso die Hyperschallströmungen (sehr grosse Mach-Zahlen).

Ein grösserer Abschnitt über kompressible Grenzschichten und ein Kapitel über Messtechnik beschliessen das Buch. – Druck und Ausstattung sind in gewohnter Weise vorzüglich. Man darf dem Buch eine weite Verbreitung wünschen.

*J. Ackere*

### **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.** Vol.

N. I. MUSKHELISHVILI; übersetzt aus dem Russischen durch J. M. R. RADON (P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1953). 704 S., 65 Fig.; hfl. 38.—

Der Titel dieses Buches ist allzu bescheiden. In Wirklichkeit enthält das Werk neben einer vorbildlichen Einführung in die lineare Elastizitätstheorie mit Anwendungen auf die exakte Balkenlehre eine umfassende Darstellung der mathematischen Theorie der ebenen Zustände (Spannungs- und Verzerrungszustand) in isotropen Körpern auf funktionentheoretischer Basis.

Die komplexe Behandlung ebener Zustände geht auf G. V. KOLOSOW zurück und ist vorwiegend von russischen Forschern zu einer Theorie ausgebaut worden, die der komplexen Strömungslehre zur Seite zu stellen, mit Rücksicht auf das differenziertere Verhalten des elastischen Körpers, aber wesentlich verwickelter ist. Das Buch enthält neben einer neuen Darstellung der Kolosowschen Theorie eine bemerkenswerte Fülle von neuen Anwendungen allgemeiner wie spezieller Natur, die sich aus der systematischen Verwendung der Eigenschaften der Cauchy-Integrale sowie der Möglichkeiten der konformen Abbildung ergeben. Besonders sorgfältig sind die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen behandelt, die bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen (Ringe) wichtig sind.

Es ist vorauszusetzen, dass dieses Werk auf Jahre hinaus auf seinem Gebiet grundlegend bleiben wird. Mit seiner sorgfältigen (übrigens auch buchtechnisch vorbildlich geratenen) Übertragung in die englische Sprache hat sich auch der Übersetzer ein grosses Verdienst erworben.

*H. Ziegler*



# Über ein simultanes Differenzenverfahren zur Abschätzung der Torsionssteifigkeit und der Kapazität nach beiden Seiten

Von JOSEPH HERSCH, ALBERT PFLUGER und ANDREAS SCHOPF, Zürich<sup>1)</sup>

Die Ausgangspunkte dieser Arbeit sind einerseits eine von Prof. G. PÓLYA im Wintersemester 1953/54 an der ETH. gehaltene Vorlesung über Variationsmethoden bei physikalisch-technischen Aufgaben, andererseits ein Artikel [5]<sup>2)</sup> von Prof. A. PFLUGER über das Typenproblem einer Riemannschen Fläche.

## § 1. Charakterisierung der Torsionssteifigkeit als Maximum und als Minimum

1. 1. Wir betrachten das Problem der Torsion eines prismatischen Stabes, dessen Querschnitt wir zunächst als einfach zusammenhängend voraussetzen. Zwischen der spezifischen Torsionssteifigkeit  $P$ , dem Schubmodul  $G$ , dem Drehmoment  $M$  und dem spezifischen Verdrehwinkel  $\vartheta$  besteht die Beziehung  $G \vartheta P = M$ . Die Torsionssteifigkeit  $P$  hängt nur von der geometrischen Gestalt des Querschnittes  $Q$  ab und ist bekanntlich [12], durch folgendes Randwertproblem bestimmt: Es sei  $u$  die wohldefinierte reelle und stetige Funktion, welche in  $Q$  der Gleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -2 \quad (1.1.1)$$

genügt und auf dem Rande  $\Gamma$  verschwindet. Dann ist

$$P = 2 \iint_Q u \, dx \, dy = \iint_Q \text{grad}^2 u \, dx \, dy \quad (\text{Dimension cm}^4). \quad (1.1.2)$$

Gleichzeitig liefert  $u$  die Spannungsfunktion  $\Phi = G \vartheta u$ , das heisst  $\vec{\tau} = (\Phi_y, -\Phi_x)$  ist der Schubspannungsvektor.

Beispiel:  $Q$  ist ein Kreis vom Radius  $r$ . Dann ist

$$u = \frac{1}{2} (r^2 - x^2 - y^2), \quad P = \frac{\pi}{2} r^4, \quad \vec{\tau} = G \vartheta (-y, x).$$

<sup>1)</sup> Mathematisches Seminar der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 112.



Wir setzen zur Abkürzung:  $\iint_Q f(x, y) dx dy = \bar{f}$ ,  $\iint_Q (f_x^2 + f_y^2) dx dy = D(f)$ ,  
 $\iint_Q \vec{v} \vec{w} dx dy = (\vec{v}, \vec{w})$ ,  $(\vec{v}, \vec{v}) = N(\vec{v})$ , wo  $f$  eine stetige bzw. stückweise stetig  
 differenzierbare Funktion,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  stückweise stetige Vektorfelder sind.

Die Torsionssteifigkeit genügt zwei bemerkenswerten Variationsprinzipien [8].

1. 2. *Das Dirichletsche Prinzip* oder, in mechanischer Deutung, das Prinzip von CASTIGLIANO. Es beruht auf der Variation der Lösungsfunktion  $u$  (bzw. der Spannungsfunktion  $\varphi$ ) unter Festhalten der Randbedingung. Es sei also  $p$  eine beliebige stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion auf dem Querschnitt  $Q$ , die am Rande  $\Gamma$  verschwindet. Wir bilden die von  $p$  abhängige Grösse

$$P_1^-(p) = 4 \bar{p} - D(p)$$

und finden mit Hilfe der Greenschen Formel, indem wir  $p = u + h$  setzen und (1. 1. 1) und (1. 1. 2) beachten, dass  $P_1^-(p) = P - D(h)$  und daher

$$P_1^-(p) \leq P \quad (1. 2. 1)$$

ist. Um also eine untere Schranke von  $P$  zu erhalten, braucht man nur mit einer Funktion  $p$  zu «probieren», das heisst die zugehörige Grösse  $P_1^-(p)$  zu berechnen. Deshalb nennen wir  $p$  eine «Probierfunktion». Um eine möglichst gute Abschätzung zu bekommen, wird man natürlich eine solche Probierfunktion wählen, deren  $P_1^-(p)$  möglichst gross wird. Gleichheit tritt in (1. 2. 1) dann und nur dann ein, wenn  $p$  schon die Lösungsfunktion  $u$  ist.

Für jede reelle Zahl  $\lambda (\neq 0)$  ist mit  $p$  auch  $\lambda p$  eine Probierfunktion. Hat man also schon ein  $p$  gewählt, so wird man über den Parameter  $\lambda$  noch so verfügen, dass  $P_1^-(\lambda p) = 4 \lambda \bar{p} - \lambda^2 D(p)$  möglichst gross wird. Dies ist der Fall, wenn  $\lambda = 2 \bar{p}/D(p)$  ist, und das Maximum beträgt  $4 \bar{p}^2/D(p)$ . Damit haben wir folgendes Resultat (PÓLYA und SZEGÖ):

Für alle auf  $Q$  stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen  $p$ , die am Rande  $\Gamma$  verschwinden (Probierfunktionen), ist

$$P^-(p) \equiv 4 \bar{p}^2/D(p) \leq P, \quad \text{oder} \quad \text{Max}_{(p)} P^-(p) = P. \quad (1. 2. 2)$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier bzw. das Maximum wird erreicht für alle Vielfachen  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 0$ ) der Lösungsfunktion  $u$ . Denn es ist  $P^-(p)$  homogen vom Grade Null in  $p$ , das heisst  $P^-(\lambda p) = P^-(p)$ .

1. 3. *Das Thomsonsche Prinzip* oder, in mechanischer Deutung, das Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Es beruht auf der Variation des Vektorfeldes  $\text{grad } u$  bzw. der Dehnung unter Festhalten der Bedingung (1. 1. 1) in

der Form  $\operatorname{div} \vec{v} = -2$ . Der Querschnitt  $Q$  sei durch endlich viele glatte Bögen  $\Gamma_i$  in Teilgebiete  $G_j$  unterteilt, und das Vektorfeld  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  genüge folgenden Bedingungen:

1.  $\vec{v}$  ist in jedem Teilgebiet  $G_j$  stetig und stetig differenzierbar und erfüllt dort die Gleichung  $\operatorname{div} \vec{v} = -2$ .
2. Längs der Bögen  $\Gamma_i$  ist die Normalkomponente von  $\vec{v}$  stetig, jedoch nicht notwendig die Tangentialkomponente.

Ein solches  $\vec{v}$  nennen wir Versuchsfeld.

Für die von  $\vec{v}$  abhängige Grösse

$$P^+(\vec{v}) = \iint_Q (v_x^2 + v_y^2) dx dy = N(\vec{v})$$

finden wir mit  $\vec{h} = \vec{v} - \operatorname{grad} u$  unter Beachtung von (1. 1. 2):

$$P^+(\vec{v}) = P + N(\vec{h}) + 2(\vec{h}, \operatorname{grad} u).$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{h} = 0$  ist  $\vec{h} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} (u \vec{h})$  und daher das letzte Glied rechts gleich

$$\iint_Q \operatorname{div} (u \vec{h}) dx dy = \sum_j \iint_{G_j} \operatorname{div} (u \vec{h}) dx dy = \sum_j \oint_{\operatorname{Rd} G_j} u \vec{h} \cdot \vec{n} ds,$$

wo in bezug auf das jeweilige Gebiet  $G_j$  im positiven Sinne herumintegriert wird und  $\vec{n}$  jeweils die äussere Normale bezüglich  $G_j$  bedeutet. Wegen der Stetigkeit der Normalkomponenten von  $\vec{h}$  längs der  $\Gamma_i$  und der Randbedingung  $u = 0$  auf  $\Gamma$  verschwindet die letzte Summe. Daher ist  $P^+(\vec{v}) = P + N(\vec{h})$ , und wir haben das Resultat:

Für alle Versuchsfelder  $\vec{v}$  ist

$$P^+(\vec{v}) \geq P \quad \text{oder} \quad \min_{(\vec{v})} P^+(\vec{v}) = P. \quad (1. 3. 1)$$

Das Gleichheitszeichen gilt bzw. das Minimum wird erreicht nur für  $\vec{v} = \operatorname{grad} u$ . Jedes Versuchsfeld  $\vec{v}$  liefert in der Grösse  $P^+(\vec{v})$  eine obere Schranke für  $P$ . Um eine gute Abschätzung zu erhalten, wird man  $P^+(\vec{v})$  möglichst klein zu machen suchen.

Hat man eine Probierfunktion  $p$  und ein Versuchsfeld  $\vec{v}$  gewählt und die zugehörigen Grössen  $P^-(p)$  und  $P^+(\vec{v})$  berechnet, so gilt

$$P^-(p) \leq P \leq P^+(\vec{v}).$$

Ist die Differenz  $P^+(\vec{v}) - P^-(p)$  klein, so hat man eine gute Approximation für  $P$ . Danach beurteilt man die Güte der Wahl von  $p$  und  $\vec{v}$ .

1. 4. Es sei noch kurz auf den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Querschnittes  $Q$  hingewiesen [9]. Man erhält  $Q$ , indem man in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet  $G$  (mit dem Rand  $\Gamma$ ) einige «Löcher»  $G_i$  mit den Rändern  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) anbringt, es ist  $Q = G - \sum_i G_i$ .  $F_i$  sei der Flächeninhalt des «Loches»  $G_i$ . Die Lösungsfunktion  $u$  ist in  $G$  stetig, genügt in  $Q$  wieder der Poissonschen Differentialgleichung  $\Delta u = -2$ , verschwindet auf  $\Gamma$ , ist auf den Löchern  $G_i$  und deren Rändern  $\gamma_i$  je konstant und erfüllt die Bedingungen  $\oint_{\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 2 F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), wobei im negativen Sinne um  $G_i$  herum integriert wird und  $\vec{n}$  die äussere Normale bezüglich  $Q$  bedeutet. Dann ist

$$P = 2 \iint_G u \, dx \, dy = \iint_Q \text{grad}^2 u \, dx \, dy.$$

$P$  genügt wiederum den Variationsprinzipien 1. 2 und 1. 3, sofern einerseits die in ganz  $G$  definierte Probiervfunktion  $p$  auf den  $G_i$  je konstant ist und das Integral  $\iint_G p \, dx \, dy - \bar{p}$  über ganz  $G$  erstreckt wird; andererseits das in  $Q$  definierte Versuchsfeld  $\vec{v}$  die zusätzlichen Bedingungen  $\oint_{\gamma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = 2 F_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  erfüllt.

## § 2. Das Differenzenverfahren für die Abschätzung der Torsionssteifigkeit nach unten

Zur Konstruktion geeigneter Probiervfunktionen  $p$  für das Variationsproblem 1. 2 verwendet POLYA [7] eine stückweise lineare bzw. bilineare Funktion. Hier wird nur die letztere, etwas schneller konvergierende Methode angegeben. Wir setzen voraus, dass der Querschnitt  $Q$  von achsenparallelen Linien begrenzt und in lauter kongruente Quadrate  $Q_i$  von der Seitenlänge  $h$  (Maschenweite) eingeteilt sei. Hat der Querschnitt nicht diese Form, so wird er durch eine solche von innen approximiert. Wir schreiben jeder Innenecke des Quadratnetzes einen beliebigen Wert  $p_i$  und jeder Randecke den Wert 0 zu. In jedem Quadrat  $Q_k$  und dessen Rand ist  $p$  diejenige bilineare Funktion  $a + b x + c y + d x y$ , die in den vier Ecken die vorgeschriebenen Werte  $p_k$  annimmt. Haben für ein Quadrat  $Q_0$  die Ecken  $e_1, e_2, e_3, e_4$  zum Beispiel die Koordinaten  $(0, 0)$ ,  $(h, 0)$ ,  $(h, h)$  und  $(0, h)$ , so ist in  $Q_0$

$$p = p_1 \left(1 - \frac{x}{h}\right) \left(1 - \frac{y}{h}\right) + p_2 \frac{x}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + p_3 \frac{x}{h} \cdot \frac{y}{h} + p_4 \left(1 - \frac{x}{h}\right) \frac{y}{h}.$$

Wegen der Linearität auf allen Kanten stimmen die Bilinearfunktionen zweier benachbarter Quadrate längs der gemeinsamen Seite überein;  $p$  ist somit stetig und stückweise stetig differenzierbar in  $Q$  und Null auf  $\Gamma$ , ist also eine Probierv-

funktion im Sinne von 1. 2. Eine einfache Rechnung ergibt

$$p = h^2 \sum p_i$$

und

$$D(p) = \frac{1}{3} \left[ \sum_S (p_i - p_k)^2 + \sum_D (p_i - p_l)^2 \right],$$

wo auf der rechten Seite der letzten Gleichung die erste Summe über alle Quadratseiten und die zweite über alle Diagonalen zu erstrecken ist. Gemäss (1. 2. 1) ist dann

$$4 h^2 \sum p_i - \frac{1}{3} \left[ \sum_S (p_i - p_k)^2 + \sum_D (p_i - p_l)^2 \right] < P, \quad (2. 1)$$

und es entsteht die algebraische Aufgabe, die Werte  $p_1, p_2, \dots, p_n$  so zu wählen, dass der linksstehende Ausdruck möglichst gross wird.

Diese Aufgabe ist ein algebraisches Analogon des Variationsproblems (1. 2). Die Lösungswerte  $u_1, u_2, \dots, u_n$  werden durch folgendes (zum Beispiel durch Differentiation sofort erhaltenes) Gleichungssystem bestimmt: *Seien  $E_{i_0}$  eine beliebige innere Ecke der Unterteilung,  $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_8}$  die acht «benachbarten» Ecken, dann soll sein*

$$8 u_{i_0} - u_{i_1} - u_{i_2} - u_{i_3} - u_{i_4} - u_{i_5} - u_{i_6} - u_{i_7} - u_{i_8} = 6 h^2. \quad (2. 2)$$

Bei  $n$  Innenecken haben wir im allgemeinen ein System von  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten, die sich aber bei Symmetrie stark reduzieren können. Das System hat stets eine und nur eine Lösung: denn das entsprechende homogene System besitzt (Mittelwerteigenschaft, daher Maximumprinzip) nur die triviale Lösung  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ . Die erhaltenen Werte  $p_i = u_i$  werden in (2. 1) eingesetzt und liefern die für diese Maschenweite bestmögliche untere Abschätzung. Für diese Werte lässt sich aber das linke Glied von (2. 1) unter Benützung des Gleichungssystems (2. 2) umformen:

$$\sum_S (u_i - u_k)^2 + \sum_D (u_i - u_l)^2 - \sum_{i_0=1}^n u_{i_0} \left( 8 u_{i_0} - \sum_{q=1}^8 u_{i_q} \right) = 6 h^2 \sum_1^n u_i;$$

wir erhalten also schliesslich

$$2 h^2 \sum_1^n u_i < P. \quad (2. 3)$$

### § 3. Das Differenzenverfahren zur Abschätzung der Torsionssteifigkeit nach oben

3. 1. Der Konstruktion eines geeigneten Versuchsfeldes  $\vec{v}$  für das Variationsproblem 1. 3 legen wir dasselbe Quadratnetz wie in § 2 mit der Maschenweite  $h$  zugrunde. Hat der Querschnitt nicht diese Form, so wird er von aussen durch

eine solche approximiert. Die horizontalen Seiten orientieren wir nach rechts, die vertikalen nach oben.

In je einem beliebigen Quadrat  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) betrachten wir nun wirbelfreie Vektorfelder  $\vec{v}_i$ , die längs jeder Seite je eine konstante Normalkomponente besitzen und im Innern die Gleichung  $\operatorname{div} \vec{v}_i = -2$  erfüllen. Den Fluss der Felder  $\vec{v}_i$  durch die Seite  $k_j$ , und zwar von der Nachbarzelle, zu der  $k_j$  negativ orientiert ist, zur zweiten Nachbarzelle, bezeichnen wir mit  $h S_j$ . Sind die Zahlen  $S_j$  (Normalkomponenten) für die Kanten  $k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}, k_{i_4}$  des Quadrates  $Q_i$  gegeben (der Koordinatenanfang liege in der Ecke links unten), so hat  $\vec{v}_i = (v_x, v_y)$  die Gestalt

$$v_x = -S_{i_4} \left(1 - \frac{x}{h}\right) - S_{i_2} \frac{x}{h}, \quad v_y = S_{i_1} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + S_{i_3} \frac{y}{h}.$$

Wegen der Gleichung  $\operatorname{div} \vec{v}_i = -2$  in  $Q_i$  können die  $S_j$  nicht beliebig sein, sondern müssen die Bedingung

$$-S_{i_1} - S_{i_2} + S_{i_3} + S_{i_4} = -2h \quad (3.1.1)$$

erfüllen.

Legen wir nun allgemein den Seiten  $k_j$  solche Werte  $S_j$  bei, dass die Bedingung (3.1.1) für jedes Quadrat  $Q_i$  erfüllt ist, so existiert in jedem  $Q_i$  ein Vektorfeld der angegebenen Art. Sind  $Q_i$  und  $Q_k$  die Nachbarzellen der Kante  $k_j$ , so haben die Felder  $\vec{v}_i$  und  $\vec{v}_k$  längs  $k_j$  dieselbe Normalkomponente. Die Felder  $\vec{v}_i$  definieren also zusammen in  $Q$  ein Vektorfeld  $\vec{v}$ , das den Bedingungen in 1.3 genügt, also ein Versuchsfeld ist.

### 3. 2. Eine kleine Rechnung ergibt

$$\iint_{Q_i} \vec{v}_i^2 dx dy = \frac{h^2}{3} (S_{i_1}^2 + S_{i_2}^2 + S_{i_3}^2 + S_{i_4}^2 + S_{i_1} S_{i_3} + S_{i_2} S_{i_4})$$

und wegen

$$S_{i_1} S_{i_3} = \frac{1}{2} (S_{i_1}^2 + S_{i_3}^2 - (S_{i_1} - S_{i_3})^2)$$

und eines entsprechenden Ausdrucks für  $S_{i_2} S_{i_4}$

$$\iint_{Q_i} \vec{v}_i^2 dx dy = h^2 \left[ \frac{1}{2} (S_{i_1}^2 + S_{i_2}^2 + S_{i_3}^2 + S_{i_4}^2) - \frac{1}{6} ((S_{i_1} - S_{i_3})^2 + (S_{i_2} - S_{i_4})^2) \right].$$

Beachtet man, dass jede Innenkante an zwei und jede Randkante an einem Quadrat grenzt, und setzt man  $\varepsilon_j = 1$  bzw.  $1/2$ , je nachdem  $k_j$  Innen- oder Randkante ist, so liefert die Summe dieser Beträge der einzelnen Quadrate

$$P^+(\vec{v}) = N(\vec{v}) = h^2 \left[ \sum_j \varepsilon_j S_j^2 - \frac{1}{6} \sum_j (S_j - S_{j'})^2 \right]. \quad (3.2.1)$$



Dabei wird die erste Summe über alle Kanten und die zweite Summe über alle Gegenseitenpaare der Quadrate erstreckt. – Natürlich braucht man aber bei krummlinigen  $F$  die Integrale nur *innerhalb*  $G$  zu erstrecken.

Die Wirbelfreiheit von  $\vec{v}$  in jedem Quadrat hat übrigens zur Folge, dass unter allen Versuchsfeldern mit den Normalkomponenten  $S_j$  längs der  $k_j$  das eben konstruierte Feld die kleinste Norm  $N$  hat. Um für das gegebene Quadratnetz mit der Methode des stückweise linearen Vektorfeldes ein günstiges Versuchsfeld zu bekommen, bleibt also noch die Aufgabe, den Ausdruck (3. 2. 1) unter den Nebenbedingungen (3. 1. 1) zu minimalisieren. Eine rechnerische Durchführung dieser Aufgabe ist bei kleiner Kantenzahl nicht allzu mühsam; sie führt aber bald zu einem recht komplizierten Gleichungssystem, da die Unbekanntenzahl (im allgemeinen) gleich der Kantenzahl ist. (Es sei jedoch bemerkt, dass diese Aufgabe mit einer ähnlichen Methode wie der hier zu beschreibenden exakt behandelt werden kann.)

Es ist also bei feiner Rasterung zweckmässiger, eine etwas weniger scharfe Extremalbedingung zu stellen, dafür aber ein einfacheres Gleichungssystem zu erhalten. Dazu führt die folgende Bemerkung: Die Bedingungen (3. 1. 1) führen zu

$$(S_{i_1} - S_{i_2})^2 + (S_{i_2} - S_{i_3})^2 + \dots + 2 h^2$$

und [vgl. (3. 2. 1)]

$$\sum_{i=1}^N (S_{i_1} - S_{i_2})^2 = \frac{N h^2}{3} - \frac{F}{3},$$

wenn  $N$  die Zahl der Quadrate,  $F = N h^2$  den Flächeninhalt des Querschnittes  $Q$  bezeichnen. Also ist

$$P^+(\vec{v}) \leq P_1^+(\vec{v}) = h^2 \left( \sum_j \varepsilon_j S_j^2 - \frac{F}{3} \right). \quad (3. 2. 2)$$

Bei grober Rasterung kann  $N(\vec{v})$  wesentlich kleiner sein als der rechtsstehende Ausdruck, während bei feiner Rasterung dieser Unterschied, wenigstens bei den durchgerechneten Beispielen, geringfügig wird. Es ist daher zweckmässig (vor allem auch wegen der Simultanmethode, § 4), den Ausdruck  $\sum_j \varepsilon_j S_j^2$  unter den Nebenbedingungen (3. 1. 1) zu minimalisieren.

3. 3. Diese Minimalaufgabe führt zu einem algebraischen Analogon des Variationsproblems 1. 3. Bei dem von achsenparallelen Linien begrenzten und in lauter kongruente Quadrate  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) eingeteilten Querschnitt  $Q$ , der unserer Untersuchung zugrunde liegt, betrachten wir jetzt neben den Ecken und den Kanten  $k_j$  (das sind die Quadratseiten) vor allem auch die Innenflächen, das heisst die Quadrate  $Q_i$  (Zellen). Die ganze Figur ist ein zweidimensionaler Zellenkomplex. Die Kanten sind wie in 3. 1 orientiert. Eine innere Kante  $k_j$  hat zwei Nachbarzellen. Sie heisst zu einer Nachbarzelle positiv

(negativ) orientiert, wenn sie auf der Zelle einen positiven (negativen) Umlaufsinne induziert. Diese zwei Nachbarzellen bezeichnen wir mit  $Q_{j+}$  und  $Q_{j-}$ . Eine Randkante  $k_j$  hat dagegen nur eine Nachbarzelle  $Q_{j+}$  oder  $Q_{j-}$  in  $Q$ .

Kehren wir zur Minimalaufgabe am Schluss von 3. 2 zurück. Wir fassen die Werte  $S_j - \mathfrak{S}(k_j)$  als Werte einer Kantenfunktion  $\mathfrak{S}$  auf. Als «Norm» von  $\mathfrak{S}$  (bezüglich der Gewichte  $\varepsilon_j$ ) definieren wir

$$N_{\varepsilon}(\mathfrak{S}) = \sum_j \varepsilon_j S_j^2; \quad (3. 3. 1)$$

diese soll unter den Nebenbedingungen (3. 1. 1) minimalisiert werden.

Zur Lösung führen wir *Lagrangesche Multiplikatoren*  $\lambda_i = 2 U_i/h$  ein, mit welchen die Gleichungen (3. 1. 1) multipliziert werden sollen. Da jede dieser Gleichungen einem Quadrat  $Q_i$  entspricht, so liegt es nahe, auch die  $U_i = \mathfrak{U}(Q_i)$  als Werte einer Zellenfunktion  $\mathfrak{U}$  aufzufassen. Gemäss der Lagrangeschen Regel haben wir nun folgenden Ausdruck zu minimalisieren:

$$\begin{aligned} \sum_{k_j} \varepsilon_j S_j^2 + \sum_{Q_i} \lambda_i (-S_{i_1} - S_{i_2} + S_{i_3} + S_{i_4} + 2h) \\ = \sum_{\text{innere } k_j} \left[ S_j^2 + \frac{2}{h} S_j (-U_{j+} + U_{j-}) \right] + \sum_{\text{Rand-}k_j} \left( \frac{1}{2} S_j^2 \mp \frac{2}{h} S_j U_{j\pm} \right), \end{aligned}$$

wobei wir nunmehr über die  $S_j$  frei verfügen können. Differentiation nach  $S_j$  ergibt unmittelbar für den gesuchten Wert  $\mathfrak{B}$  der Kantenfunktion  $\mathfrak{S}$ :

$$\text{für innere Kanten } k_j: \quad V_j = \frac{U_{j+} - U_{j-}}{h};$$

$$\text{für Randkanten } k_j: \quad V_j = \pm \frac{2}{h} U_{j\pm},$$

das heisst  $+$  oder  $-$ , je nachdem  $k_j$  zum inneren Nachbarquadrat  $Q_{j+}$  bzw.  $Q_{j-}$  positiv oder negativ orientiert ist.

Es gilt also für *alle* Kanten  $k_j$

$$V_j = \frac{U_{j+} - U_{j-}}{h}, \quad (3. 3. 2)$$

wenn wir abmachen, jeder Randkante  $k_j$  mit innerem Nachbarquadrat  $Q_j$  ein fiktives *äusseres* Nachbarquadrat  $Q'$  (ebenfalls von der Seitenlänge  $h$ ) anzufügen, dem wir den Wert  $U_{j'} = -U_j$  zuordnen. Dies bedeutet, dass  $\mathfrak{U}$  über die Randkante hinaus *durch Spiegelung fortgesetzt* wird. Dasselbe gilt, wenn  $Q_j$  mit mehr als einer Kante an die Aussenfläche grenzt. Der Fall, wo ein äusseres Quadrat mit mehreren inneren  $Q_i$  Seiten gemeinsam hat (einspringende Ecke) macht bei dieser Vorschrift keine Schwierigkeiten: denn der Wert  $-U_j$  bezieht sich auf dieses nur *als Nachbarn von*  $Q_j$  und wird nur für die Randkante  $k_j$  verwendet.

3. 4. Eine lösende Kantenfunktion  $\mathfrak{B}$  für das Variationsproblem 3. 3 muss also auf die erwähnte, zur Gradientbildung analoge Weise von einer Zellenfunktion  $\mathfrak{U}$  ableitbar sein. Damit aber  $\mathfrak{B}$  den Bedingungen (3. 1. 1) genügt, muss  $\mathfrak{U}$  die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Gleichungssystems sein:

$$4 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_2} - U_{i_3} - U_{i_4} = 2 h^2. \quad (3. 4. 1)$$

Aus diesem System von  $N$  Gleichungen mit den Unbekannten  $U_1, U_2, \dots, U_N$  wird die Zellenfunktion  $\mathfrak{U}$  berechnet, und aus ihr leitet man gemäss (3. 3. 2) die gesuchte Kantenfunktion  $\mathfrak{B}$  ab.

Bilden nun die  $U_i$  die Lösung des Gleichungssystems (3. 4. 1), so lässt sich gemäss (3. 3. 2) der Ausdruck (3. 3. 1) folgendermassen umformen:

$$h^2 N_e(\mathfrak{B}) = \sum_{k_j} \varepsilon_j (U_{j^+} - U_{j^-})^2$$

$$\sum_{Q_{i_0} \subset Q} U_{i_0} [4 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_2} - U_{i_3} - U_{i_4}] = 2 h^2 \sum_{Q_i \subset Q} U_i.$$

Gemäss (3. 2. 2) haben wir also

$$P < h^2 \left( 2 \sum_{Q_i \subset Q} U_i - \frac{F}{3} \right) = P_1^+. \quad (3. 4. 2)$$

Die Bestimmung der  $U_i$  bildet die eigentliche Rechenarbeit. Ist diese geleistet, so erhält man die rechte Seite von (3. 4. 2) denkbar einfach. — An und für sich ist (3. 4. 1) eine sehr übliche Differenzengleichung (vgl. zum Beispiel [1], S. 358); sie ist hier in natürlicher Weise gekommen und liefert nicht nur einen Näherungswert für  $P$ , sondern die Abschätzung  $P_1^+$ .

Einen etwas besseren Wert liefert der Ausdruck (3. 2. 1), wenn man dort für die  $S_j$  die Werte  $V_j$  einsetzt. Für das Quadrat  $Q_{i_0}$  wird dann

$$h^2 (S_j - S_{j'})^2 = (2 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_2})^2 \quad \text{bzw.} \quad (2 U_{i_0} - U_{i_2} - U_{i_4})^2,$$

auch am Rande, wenn man durch Spiegelung von  $Q_i$  in der Aussenfläche fiktive Quadrate  $Q'_i$  anbringt und dort den Wert  $-U_i$  vorschreibt. Wir haben dann an Stelle von (3. 4. 2) die etwas bessere Ungleichung

$$\left. \begin{aligned} P &< 2 h^2 \sum_1^N U_i - \frac{1}{6} \sum_{i_0=1}^N (2 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_2})^2 - \frac{1}{6} \sum_{i_0=1}^N (2 U_{i_0} - U_{i_2} - U_{i_4})^2 \\ &= 2 h^2 \sum_1^N U_i - \frac{F h^2}{3} - \frac{1}{3} \sum_{i_0=1}^N (2 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_3} - h^2)^2 = P^+, \end{aligned} \right\} \quad (3. 4. 3)$$

wenn wir beachten, dass zufolge der Differenzengleichung (3. 4. 1)

$$(2 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_3} - h^2)^2 = (2 U_{i_0} - U_{i_2} - U_{i_4} - h^2)^2$$

ist.

### Bemerkungen

1. Die Vorschrift der « Spiegelung der Werte  $U_i$  am Rande » kann heuristisch so erklärt werden: Man denke sich die Lösungsfunktion  $z = u(x, y)$  in 1. 1 als Fläche im dreidimensionalen Raum dargestellt; die  $U_i, h^2$  sind Näherungswerte für das Volumen  $\iint_{Q_i} u \, dx \, dy$  über dem Quadrat  $Q_i$ , die  $U_i$  sind Näherungen für die Steilheit (Wert der Normalableitung) längs  $k_j$ . Im Grenzfall  $h \rightarrow 0$  ist am Rande  $V = \pm 2 U/h$ , was durch die Fiktion eines äusseren Quadrates mit dem Wert  $-U$  erwirkt wird.

2. Die durch die Minimalaufgabe 3. 3 bedingte Einführung der Zellenfunktion  $U$  sowie die Vorschrift der « Spiegelung am Rande » für dieselbe liessen sich ebensogut mit Hilfe einer algebraischen Betrachtung des konstruierten Zellenkomplexes, dann aber ohne Heranziehung Lagrangescher Multiplikatoren begründen.

3. Schliesslich sei erwähnt, dass die Abschätzung (3. 4. 2), welche aus (3. 4. 3) durch Abschwächung hervorgeht, auch direkt mit Hilfe eines in Dreiecken (statt in Quadraten, vgl. 3. 1) linearen Versuchsfeldes für das Variationsproblem 1. 3 erhalten werden kann, und zwar dann als genaue Lösung der entsprechenden diskreten Minimalaufgabe.

### § 4. Simultane Methode

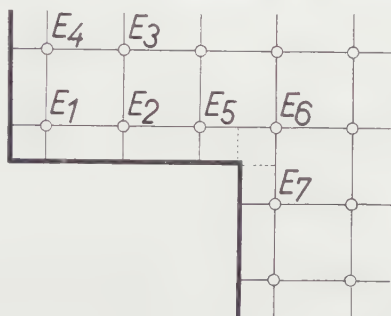
4. 1. Die Methode von PÓLYA (§ 2) liefert für  $P$  untere Schranken  $P^-$ ; die in § 3 dargestellte Methode obere Schranken  $P^+$ . Jedoch ist der Umstand, dass man für jede Maschenweite  $h$  zwei *verschiedene* lineare Gleichungssysteme (zur Berechnung von  $P_h^-$  bzw.  $P_h^+$ ) zu lösen hat, für die Anwendungen unangenehm. Andererseits stellt sich naturgemäss die Frage nach der *Konvergenz* von  $P_h^-$  und  $P_h^+$  für  $h \rightarrow 0$  gegen  $P$ ; die Beantwortung dieser Frage wird durch die Verschiedenheit der Werte  $u_i$  und  $U_i$  wesentlich erschwert.

Nun soll ein simultanes Verfahren dargestellt werden, das erlaubt, aus einem *einzigen* Gleichungssystem Abschätzungen für  $P$  nach beiden Richtungen zu bekommen. Dadurch werden die beiden oben genannten Nachteile beseitigt; die Konvergenzfrage wird dann durch die Gleichheit der Werte  $p_i$  und  $U_i$  prinzipiell erleichtert, indem sie zu einer rein algebraischen (aber keineswegs leichten!) Frage wird.

4. 2.  $P_h^-$  wird wieder genau so berechnet, wie das in § 3 erläutert wurde. Das Gleichungssystem (3. 4. 1) bestimmt die  $U_i$  eindeutig. Dagegen ändern wir ein bisschen für  $P_h^+$  die Methode von PÓLYA. Es wird eine andere Einteilung von  $G$  definiert (Figur 1): Jedes Zentrum  $E_i$  eines früheren Quadrates  $Q_i$  wird nun zum Eckpunkt von Quadraten der neuen Einteilung; die neuen Qua-

drate haben dieselbe Seitenlänge  $h$  (Maschenweite) wie die alten; am Rande bleiben aber jetzt kleinere, näher zu untersuchende Zellen übrig.

Unter Verzicht auf die bestmöglichen Werte  $p_i$  [das heisst diejenigen, die  $P(p)$  maximal machen] wählen wir einfach  $p(E_i) = U(Q_i)$ , das heisst  $p_i = U_i$ . Dieser Verzicht erweist sich an Beispielen als numerisch unwesentlich, also gerechtfertigt, wenn man die Vereinfachung der Rechnung beachtet.



Figur 1

Es treten in der neuen Einteilung folgende vier Arten von Zellen auf:

- I: Im Innern wiederum Quadrate der Kantenlänge  $h$ .
- II: Am Rande Rechtecke mit den Seiten  $h$  und  $h/2$ .
- III: An den *ausspringenden Ecken* kleine Quadrate der Kantenlänge  $h/2$ .
- IV: An den *einspringenden Ecken* winkelförmige Zellen, welche nochmals in drei kleine Quadrate der Kantenlänge  $h/2$  unterteilt seien (in Figur 1 gestrichelt gezeichnet).

Unsere Probierfunktion  $p$  sei dann folgendermassen stetig und stückweise bilinear definiert:

- 1. Am Rande sei  $p = 0$ .
- 2. In den Punkten  $E_i$  sei  $p = p_i$  ( $p_i$  vorläufig beliebig).
- 3. Innerhalb der einzelnen Zellen I, II, III, und im Fall IV innerhalb der einzelnen Teilquadrate sei  $p$  bilinear (mit stetigem Anschluss an die vorgeschriebenen Eckenwerte).

4. 3. Die Ausrechnung ergibt dann für die Integrale

$$H_Z = \iint_Z p \, dx \, dy \quad \text{und} \quad D_Z = \iint_Z (p_x^2 + p_y^2) \, dx \, dy$$

$$\left( \sum_Z H_Z = \bar{p}; \quad \sum_Z D_Z = D(p) \right)$$

für die einzelnen Zellen  $Z$  folgende Werte (mit den speziellen Indizes von Figur 1):



Fall I (für das Quadrat mit den Ecken  $E_1, E_2, E_3, E_4$ ):

$$H_I = \frac{h^2}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4),$$

$$D_I = \frac{2}{3} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_1 p_3 - p_2 p_4) - \frac{1}{3} (p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_4 + p_4 p_1).$$

Fall II (für das Rechteck mit den Eckpunkten  $E_1, E_2$ ):

$$H_{II} = \frac{h^2}{8} (p_1 + p_2), \quad D_{II} = \frac{1}{6} (5 p_1^2 + 5 p_2^2 + 2 p_1 p_2).$$

Fall III (für das kleine Quadrat mit dem Eckpunkt  $E_1$ ):

$$H_{III} = \frac{h^2}{16} p_1, \quad D_{III} = \frac{2}{3} p_1^2.$$

Fall IV (für die winkelförmige Zelle mit den Eckpunkten  $E_5, E_6, E_7$ ):

$$H_{IV} = \frac{h^2}{16} (2 p_5 + 3 p_6 + 2 p_7),$$

$$D_{IV} = \frac{1}{6} (5 p_5^2 + 5 p_6^2 + 5 p_7^2 + p_5 p_6 + p_6 p_7 - p_5 p_7).$$

Bevor wir aufsummieren, wollen wir noch im Hinblick auf später notwendige Umformungen die Ausdrücke für  $D_Z$  in eine Differenz

$$D_Z = D'_Z - R_Z$$

zerlegen, und zwar:

$$\left. \begin{aligned} D'_I &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_1 p_2 - p_2 p_3 - p_3 p_4 - p_4 p_1, \\ D'_{II} &= \frac{3}{2} p_1^2 + \frac{3}{2} p_2^2 - p_1 p_2, \\ D'_{III} &= 2 p_1^2, \\ D'_{IV} &= \frac{3}{2} p_5^2 + p_6^2 + \frac{3}{2} p_7^2 - p_5 p_6 - p_6 p_7. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} R_I &= \frac{1}{3} (p_1 - p_2 + p_3 - p_4)^2, \\ R_{II} &= \frac{2}{3} (p_1 - p_2)^2, \\ R_{III} &= \frac{4}{3} p_1^2, \\ R_{IV} &= \frac{1}{6} (4 p_5^2 + p_6^2 + 4 p_7^2 - 7 p_5 p_6 - 7 p_6 p_7 + p_5 p_7). \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

Übrigens würde man im Falle I bei Verwendung einer auf zwei Teildreiecken *linearen* Probiefunktion an Stelle unserer auf dem ganzen Quadrate bilinearen Probiefunktion gerade den Wert  $D'_I$  an Stelle von  $D_I$  erhalten.

Für den ganzen Querschnitt ergibt sich nun durch Summation der einzelnen Zellenwerte:

$$\bar{p} = h^2 \left\{ \sum_{\mathbf{J}} p_i + \frac{3}{4} \sum_{\mathbf{R}} p_i + \frac{9}{16} \sum_{\mathbf{A}} p_i + \frac{15}{16} \sum_{\mathbf{E}} p_i \right\}$$

oder also

$$2 \bar{p} = h^2 \left\{ 2 \sum_{\mathbf{Q}} p_i + \frac{1}{8} \sum_{\mathbf{E}} p_i + \frac{1}{8} \sum_{\mathbf{A}} p_i + \frac{1}{2} \left( \sum_{\mathbf{R}} p_i + 2 \sum_{\mathbf{A}} p_i \right) \right\} \quad (4.3.3)$$

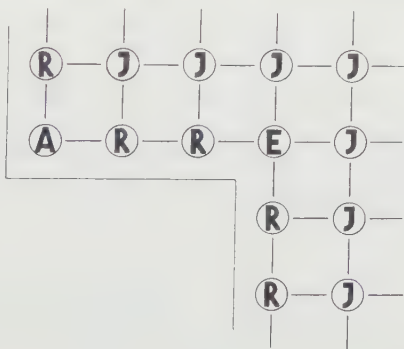
und

$$D(p) = D' - R,$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} D' &= 4 \sum_{\mathbf{J}, \mathbf{E}} p_i^2 + 5 \sum_{\mathbf{R}} p_i^2 + 6 \sum_{\mathbf{A}} p_i^2 - 2 \sum_{\mathbf{K}} p_i p_j, \\ R &= \sum_{\mathbf{I}} R_{\mathbf{I}} + \sum_{\mathbf{II}} R_{\mathbf{II}} + \sum_{\mathbf{III}} R_{\mathbf{III}} + \sum_{\mathbf{IV}} R_{\mathbf{IV}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

Dabei sollen die Symbole unter den Summenzeichen diejenigen Klassen von Eckpunkten, Kanten oder Zellen unserer Zelleneinteilung angeben, über welche jeweils summiert werden soll. Die Klassifizierung der Zellen ist dabei



Figur 2

bereits bekannt; diejenige der Eckpunkte ist in Figur 2 dargestellt. Und zwar umfasse die Klasse

**J**: Alle ganz im *Innern* des Querschnittes liegenden Eckpunkte mit vier Nachbarn, ausgenommen die Eckpunkte der Klasse **E**.

**R**: Alle beim *Rande* des Querschnittes liegenden Eckpunkte mit drei Nachbarn.

**A**: Alle bei den *ausspringenden* Querschnittsecken liegenden Eckpunkte mit zwei Nachbarn.

**E**: Alle bei den *einspringenden* Querschnittsecken liegenden Eckpunkte mit vier Nachbarn.

**Q** = **J** + **R** + **A** - **E**: Alle im Querschnitt liegenden Eckpunkte (die auf dem Rande selbst liegenden Eckpunkte unserer Zelleneinteilung zählen dabei nicht mit; auf ihnen ist ja ohnehin  $p = 0$ ).

Und schliesslich umfasse

**K**: Alle *Kanten* (in Figur 2 ebenfalls dargestellt; die zum Rande führenden Kanten der Länge  $h/2$  zählen dabei nicht mit).

4. 4. Die Maximalisierung von  $P^-(p) = 4\bar{p} - D(p)$  führt auf ein ähnliches lineares Gleichungssystem für die  $p_i$  wie (2. 2). Die den Eckpunkten  $E_i$  der Randklassen **R**, **E**, **A** entsprechenden Gleichungen sind dabei naturgemäss zu modifizieren. Auf eine explizite Angabe dieses Systems sei indessen verzichtet, denn wir wollen es, wie schon gesagt, gar nicht auflösen, sondern uns mit den Werten  $p_i = U_i$  als Näherung begnügen.

Setzt man nun diese speziellen Werte in (4. 3. 3) und (4. 3. 4) ein, so gestatten die Gleichungen (3. 4. 1), welche die  $U_i$  definitionsgemäss erfüllen, analog wie in 3. 4 vereinfachende Umformungen für  $\bar{p}$  und  $D(p)$ . Zunächst liefert Summation aller Gleichungen von (3. 4. 1):

$$N \cdot 2 h^2 = 2 F = \sum_{Q_{i_0} \subset Q} (4 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_2} - U_{i_3} - U_{i_4}) = 2 \sum_{\mathbf{R}} U_i + 4 \sum_{\mathbf{A}} U_i$$

oder also

$$F = \sum_{\mathbf{R}} U_i + 2 \sum_{\mathbf{A}} U_i, \quad (4. 4. 1)$$

was bei der numerischen Auflösung von (3. 4. 1) als willkommene Kontrolle dienen kann. Ebenso ergibt die Multiplikation der  $i$ -ten Gleichung von (3. 4. 1) mit  $U_i$  und anschliessende Summation die bereits in 3. 4 benützte Gleichung:

$$2 h^2 \sum_{Q_{i_0} \subset Q} U_{i_0} = \sum_{Q_{i_0} \subset Q} U_{i_0} (4 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_2} - U_{i_3} - U_{i_4});$$

dies ergibt

$$2 h^2 \sum_{\mathbf{Q}} U_i = 6 \sum_{\mathbf{A}} U_i^2 + 5 \sum_{\mathbf{R}} U_i^2 + 4 \sum_{\mathbf{E}, \mathbf{J}} U_i^2 - 2 \sum_{\mathbf{K}} U_i U_j. \quad (4. 4. 2)$$

Anwendung von (4. 4. 1) auf (4. 3. 3) und von (4. 4. 2) auf (4. 3. 4) liefert:

$$2 \bar{p} = h^2 \left\{ 2 \sum_{\mathbf{Q}} U_i - \frac{1}{8} \sum_{\mathbf{E}} U_i + \frac{1}{8} \sum_{\mathbf{A}} U_i - \frac{1}{2} F \right\} = A \quad (4. 4. 3)$$

und

$$D(p) = 2 h^2 \sum_{\mathbf{Q}} U_i - R = B, \quad (4. 4. 4)$$

und man erhält damit gemäss (1. 2. 1) und (1. 2. 2) die unteren Schranken

$$P > P(p) \quad \frac{A^2}{B} = P^- \quad (4.4.5)$$

und

$$P^- > P_1^-(p) = 2A - B = P_1^- \quad (4.4.6)$$

oder, explizite:

$$P_1^- = h^2 \left\{ 2 \sum_{\mathbf{Q}} U_i + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{A}} U_i - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{E}} U_i - F \right\} + R, \quad (4.4.7)$$

wobei also  $R$  die durch (4. 3. 2) und (4. 3. 4) definierte quadratische Form in den  $U_i$  ist. Aus (4. 3. 2) ersieht man, dass  $R_I$  und  $R_{II}$  positiv semidefinit und  $R_{III}$  positiv definit ist.  $R_{IV}$  ist aber indefinit, wie folgende Zerlegung in Quadrate zeigt:

$$R_{IV} = \frac{3}{8} \left( U_5 + U_7 - \frac{14}{9} U_6 \right)^2 + \frac{7}{24} (U_5 - U_7)^2 - \frac{20}{27} U_6^2.$$

Damit erhält man durch Unterdrückung positiv semidefiniter Bestandteile von  $R$  folgende untere Schranke für  $R$ :

$$R \geq \frac{4}{3} \sum_{\mathbf{A}} U_i^2 - \frac{20}{27} \sum_{\mathbf{E}} U_i^2$$

und damit eine noch etwas einfachere, aber auch schlechtere untere Schranke für  $P$ :

$$\left. \begin{aligned} P_1^- &\geq h^2 \left\{ 2 \sum_{\mathbf{Q}} U_i - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{E}} U_i + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{A}} U_i - F \right\} \\ &+ \frac{4}{3} \sum_{\mathbf{A}} U_i^2 - \frac{20}{27} \sum_{\mathbf{E}} U_i^2 = P_2^- \end{aligned} \right\} \quad (4.4.8)$$

in welcher quadratische Glieder nur noch über die Querschnittsecken summiert werden. Dabei werden offenbar die über  $\mathbf{A}$  summierten Glieder gegenüber den übrigen Gliedern mit abnehmendem  $h$  verschwindend klein werden.

4. 5. *Betrachtungen zur Konvergenz.* Für die Differenz  $P_1^+ - P_2^-$  erhält man gemäss (3. 4. 2) und (4. 4. 8) den Wert

$$P_1^+ - P_2^- = h^2 \left\{ \frac{2}{3} F + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{E}} U_i - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{A}} U_i \right\} + \frac{20}{27} \sum_{\mathbf{E}} U_i^2 - \frac{4}{3} \sum_{\mathbf{A}} U_i^2$$

und davon die obere Schranke (der Einfluss der über  $\mathbf{A}$  summierten Glieder ist ohnehin unbedeutend):

$$P_1^+ - P_2^- < h^2 \left\{ \frac{2}{3} F + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{E}} U_i \right\} + \frac{20}{27} \sum_{\mathbf{E}} U_i^2 = \delta. \quad (4.5.1)$$

Diese Formel gibt einen gewissen Aufschluss über das Konvergenzverhalten unserer verschiedenen Schranken

$$P_2^- < P_1^- < P^- < P < P^+ < P_1^+$$

bei progressiver Verkleinerung der Maschenweite  $h$ . Zu ähnlichen Konvergenzaussagen gelangt G. E. FORSITHE bei einem Differenzenverfahren für den Grundton einer Membran [2]. Insbesondere weist der Term

$$\sum_{\mathbf{E}} U_i^2 \quad (4.5.2)$$

auf den kritischen Einfluss der *einspringenden* Querschnittsecken hin. Denn bei diesen wird bekanntlich die Normalableitung der exakten Spannungsfunktion  $u$  unendlich, somit ist  $u(E_i)$  auf den Eckpunkten  $E_i$  der Klasse  $\mathbf{E}$  von tieferer Ordnung als  $O(h)$  [und zwar, wie eine genauere Betrachtung zeigt, in unserem Falle rechtwinklig einspringender Ecken von der Ordnung  $O(h^{2/3})$ ]. Für die  $U_i$  auf denselben Punkten  $E_i$  ist ein ähnliches Verhalten zu erwarten und wird bei numerischen Beispielen auch beobachtet. Vom kritischen Term (4.5.2) muss man daher eine tiefere Ordnung als  $O(h^2)$  annehmen; allerdings ist es durchaus möglich, dass er erst bei sehr kleinem  $h$  gegenüber dem ersten, mit  $h^2$  konvergierenden Anteil von  $\delta$  in (4.5.1) gross wird.

Unser kritischer Term (4.5.2) rührt übrigens nicht lediglich von der eventuell ungenügend genauen Abschätzung der Differenz  $P^+ - P^-$  durch (4.5.1) her; denn ein ähnliches, konvergenzschwächendes Glied bleibt auch für  $P - P^-$  allein bestehen, selbst dann, wenn die  $p_i$  nicht  $= U_i$ , sondern direkt als Extremale zu maximalem  $P^-(p)$  gewählt werden [10].

Die Differenz  $P - P_1^-$  dagegen konvergiert mindestens so gut wie  $\delta^2$ , das heisst es gilt

$$|P^- - P_1^-| = O(\delta^2). \quad (4.5.3)$$

Denn einerseits folgt aus (4.4.2) bis (4.4.6):

$$P^- - P_1^- = \frac{(A - B)^2}{B}; \quad A - B = R + O(h^2); \quad B = O(1); \quad \frac{1}{B} = O(1).$$

Andrerseits folgt aus (3.4.2) und (4.4.7):

$$0 < P_1^- - P_1^- = O(h^2) - R < \delta$$

somit

$$|R| \leq \delta + O(h^2) = O(\delta)$$

und damit

$$|A - B| = O(\delta), \quad \text{also} \quad |P^- - P_1^-| = O(\delta^2).$$



§ 5. Beispiel

Als Querschnitt wurde ein aus fünf Quadraten der Kantenlänge 1 zentral-symmetrisch zusammengesetztes Kreuz gewählt.

Die für  $h = 1, 1/2, 1/3, 1/4$  berechneten Resultate und die wichtigsten Zwischenresultate sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

$h$	1	1/2	1/3	1/4	0 (extrapoliert)
$P_1^+$ . . . . .	3,500	2,548	2,244	2,114	1,945
$P^+$ . . . . .	2,907	2,194	2,040	1,981	1,905
$P^-$ . . . . .		1,574	1,676	1,734	1,808
$P_1^-$ . . . . .		1,229	1,549	1,675	1,837
$P_2^-$ . . . . .		1,024	1,414	1,575	1,783
$2 h^2 \sum_Q U_i$ . . . . .	5,167	2,964	2,430	2,218	
$1/3 \sum (2 U_{i_0} - U_{i_1} - U_{i_3} - h^2)^2$	0,593	0,354	0,205	0,133	
$U_E$ . . . . .		0,554	0,415	0,341	
$U_A$ . . . . .		0,161	0,085	0,053	
$20/27 \sum_E U_i^2$ . . . . .		0,908	0,511	0,345	
$3/8 \sum_{IV} (U_{i_5} + U_{i_7} - 14/9 U_{i_9})^2$ .		0,097	0,051	0,036	
$2/3 \sum_{II} (U_{i_1} - U_{i_3})^2$ . . . . .		0,109	0,067	0,042	
$1/3 \sum_I (U_{i_1} - U_{i_2} + U_{i_3} - U_{i_4})^2$ .		0	0,018	0,022	
$4/3 \sum_A U_i^2$ . . . . .		0,276	0,077	0,030	

Im Diagramm in Figur 3 sind die Werte von  $P_2^-$ ,  $P_1^-$ ,  $P^-$ ,  $P^+$ ,  $P_1^+$  als Funktion von  $h^2$  ausgetragen und geradlinig verbunden. Die Strecken zwischen  $h = 1/3$  und  $h = 1/4$  sind geradlinig bis  $h = 0$  weitergeführt (extrapoliert). Wie nach den Ausführungen von 4. 5 zu erwarten ist, werden die Verbindungsstrecken mit abnehmendem  $h$  allmählich steiler. Für die vorliegenden Werte geschieht dies sogar auf monotone (konvexe) Weise.

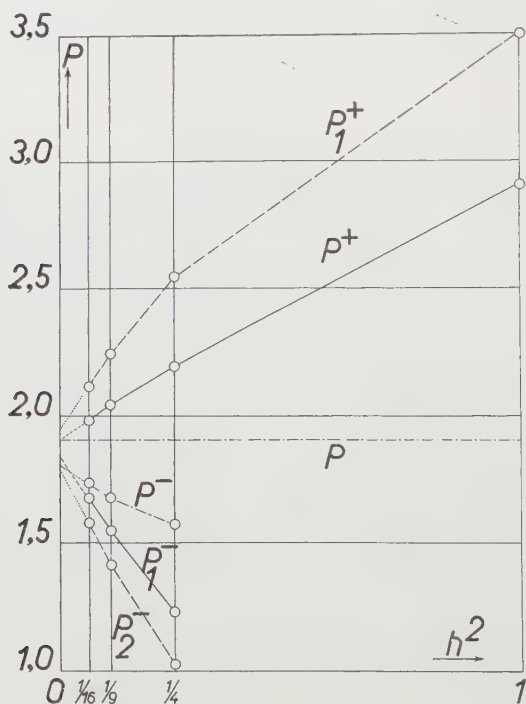
Von G. LEIN sind Schranken für eine ganze Klasse von kreuzförmigen Querschnitten auf andere Weise berechnet worden [4], insbesondere für unseren Fall:

$$1,9017 < P < 1,9042 .$$

Bemerkwürdig ist dabei, dass obige Schranken für alle kreuzförmigen Querschnitte, welche aus dem vorliegenden durch Translationen der beiden Kreuz-

balken hervorgehen, ebenso gelten sollen. Im Diagramm ist der Wert 1,90 durch eine horizontale strichpunktierte Linie dargestellt.

Aus dem Diagramm ersieht man auch, dass der extrapolierte Wert von  $P^-$  schlechter ist als derjenige von  $P_1^-$ , was durchaus im Einklang mit (4.5.3) steht.



Figur 3

Schliesslich sei noch auf den besonderen numerischen Vorteil hingewiesen, welchen die Extrapolation erfahrungsgemäss bei solchen Differenzenverfahren bietet, wenn man bedenkt, dass die Anzahl der Unbekannten mit  $h^{-2}$  und die Rechenarbeit mit der dritten Potenz der Anzahl Unbekannten wächst. Allerdings besteht die Hauptarbeit nur noch in der Auflösung eines Systems für die  $U_i$  der Randklassen **R**, **E**, **A** allein, da sich die übrigen  $U_i$  der Klasse **J** in einfacher, durch die Zelleneinteilung selbst nahegelegter Weise eliminieren lassen. Aber auch so wächst die Rechenarbeit immer noch mit  $h^{-3}$ ; bei Annahme einer Konvergenz mit  $h^2$  verlangt damit eine Vergrösserung der Genauigkeit um eine Dezimalstelle immer noch einen rund 30mal grösseren Rechenaufwand.

Für  $h = 1,4$  war in unserem Beispiel ein System mit drei Unbekannten aufzulösen, wobei natürlich auch die Symmetrie des Querschnittes zur Erniedrigung der Anzahl der Unbekannten beitrug. Der aus  $P_{h-1,3}^+$  und  $P_{h-1,4}^+$  in  $h^2$  linear extrapolierte Wert lieferte bereits:

$$P_{h=0}^+ = \frac{16 P_{h=1,4}^+ - 9 P_{h=1,3}^+}{7} = 1,9047.$$

## § 6. Elektrostatische Kapazität

6. 1. Im dreidimensionalen Raum beschäftigen uns zwei Arten von Zellenfunktionen, nämlich drei- und zweidimensionale; diese wollen wir «Würfel-funktionen» bzw. «Quadratfunktionen» nennen.

Wir betrachten einen Kondensator, der etwa durch den Zwischenraum  $G$  zweier geschlossener Flächen (Elektroden)  $E_0$  und  $E_1$  gebildet wird, wobei  $E_0$  die andere Elektrode  $E_1$  vom Unendlichen trennen möge.

### Bemerkungen

1. Im Falle  $G \ni \infty$  ist unsere Methode wegen der Anwesenheit unendlich vieler Unbekannten ungünstig.

2. Eventuelle *adiabatische* Teile des Randes von  $G$  liessen sich dagegen ohne Schwierigkeit berücksichtigen.

Es sei  $u$  die in  $G$  harmonische Funktion mit den Randwerten 0 auf  $E_0$  und 1 auf  $E_1$ . Dann ist die elektrostatische Kapazität  $C$  des Kondensators gegeben durch

$$4 \pi C = D(u) \equiv \iiint_G \text{grad}^2 u \, d\tau = \oint_{E_1} \frac{\partial u}{\partial n} \, dF \quad (6. 1. 1)$$

( $d\tau$  = Volumenelement,  $dF$  = Flächenelement,  $\vec{n}$  = äussere Normale).

6. 2. Ist  $p$  eine beliebige stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion («Probierfunktion») in  $G$  mit den Randwerten 0 auf  $E_0$  und 1 auf  $E_1$ , so gilt nach dem *Dirichletschen Prinzip*  $C \leq C^+(p)$ , wo

$$4 \pi C^+(p) = D(p) \quad (6. 2. 1)$$

ist. Setzen wir nämlich  $p = u + h$ , so wird  $4 \pi C^+(p) = 4 \pi C + D(h)$ ; denn

$$\iiint_G \text{grad} u \, \text{grad} h \, d\tau = \oint_{E_0 + E_1} h \frac{\partial u}{\partial n} \, dF - \iiint_G h \, \Delta u \, d\tau = 0.$$

Nur für  $p = u$  ist  $C^+(p) = C$ .

6. 3.  $G$  sei durch endlich viele glatte Flächenstücke  $\Gamma_i$  in Teilgebiete  $G_j$  unterteilt und  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  ein in allen  $G_j$  definiertes Vektorfeld, welches den folgenden Bedingungen genügt:

1.  $\vec{v}$  ist in jedem Teilgebiet  $G_j$  stetig, stetig differenzierbar und quellenfrei ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ).
2. Längs der Flächenstücke  $\Gamma_i$  ist die Normalkomponente von  $\vec{v}$  stetig, jedoch nicht notwendig die Tangentialkomponente. (Mit anderen Worten, es verschwindet dort die Flächendivergenz:  $\text{Div } \vec{v} = 0$ .)
3.  $\vec{v}$  hat durch  $E_1$  den Fluss  $\oint_{E_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dF = 1$ .

Ein solches  $\vec{v}$  nennen wir jetzt Versuchsfeld. Es gilt  $C \geq C^-(\vec{v})$ , wo

$$[4 \pi C^-(\vec{v})]^{-1} = \iiint_G \vec{v}^2 \, d\tau \equiv N(\vec{v}) \quad (6. 3. 1)$$

ist. (Etwas allgemeinere Fassung des *Thomsonschen Prinzips*.)

Setzen wir nämlich  $\vec{v} = [4 \pi C]^{-1} \text{grad } u + \vec{h}$ , so ist

$$[4 \pi C^-(\vec{v})]^{-1} = [4 \pi C]^{-1} + N(\vec{h});$$

denn

$$\iiint_G \vec{h} \cdot \text{grad } u \, d\tau = \sum_j \iiint_{G_j} \vec{h} \cdot \text{grad } u \, d\tau = \sum_j \oint_j u \vec{h} \cdot \vec{n} \, dF$$

wegen  $\text{div } \vec{h} = 0$ ; nun verschwindet aber die letzte Summe überall: über den  $\Gamma_i$  wegen der Stetigkeit der Normalkomponente von  $\vec{v}$  (also auch von  $\vec{h}$ ); über  $E_0$  und  $E_1$ , da  $u$  dort konstant ist und der Fluss von  $\vec{h}$  verschwindet.

6. 4. Unsere Methode zur unteren Abschätzung der Kapazität ist ganz analog der von 3. 4 für die obere Abschätzung der Torsionssteifigkeit. Das Raumgebiet  $G$  wird in Würfel der Kantenlänge  $h$  zerlegt (bzw. von aussen approximiert). — Der Kürze halber beschränken wir uns hier auf Quadratfunktionen, welche von Würfelfunktionen ableitbar sind. Diese Einschränkungen sowie die Vorschrift der «Spiegelung am Rande» liessen sich analog wie in 3. 2 und 3. 3 rechtfertigen.

Jedem Würfel  $W_j$  wird eine reelle Zahl  $U_j$  zugeordnet; diese Zahlen sollen folgendes Gleichungssystem befriedigen: Für jeden Würfel  $W_{j_0}$  und die 6 benachbarten  $W_{j_1}, W_{j_2}, W_{j_3}, W_{j_4}, W_{j_5}, W_{j_6}$  soll die Gleichung gelten:

$$6 U_{j_0} - U_{j_1} - U_{j_2} - U_{j_3} - U_{j_4} - U_{j_5} - U_{j_6} = 0. \quad (6. 4. 1)$$

Wir halten die Vorschrift der «Spiegelung am Rande» (vgl. 3. 3) in folgender Form aufrecht: Gehört ein Seitenquadrat des Würfels  $W_j$  der Randfläche  $E$  an, so soll dem äusseren Würfel, der mit  $W_j$  dieses Quadrat gemeinsam hat

der Wert  $-U_j$  zugeordnet werden. Dabei ist wieder gemeint, dass der Wert  $-U_j$  dem äusseren Würfel als Nachbarwürfel von  $W_j$  zugehört; ist etwa auch  $W_k$  mit ihm benachbart, so bekommt er auch, bezüglich  $W_k$ , den Wert  $-U_k$ . — Gehört aber ein Seitenquadrat von  $W_j$  der Randfläche  $E_1$  an, so erhalte der benachbarte äussere «Bildwürfel» den Wert  $2A - U_j$ , wobei  $A$  eine später zu bestimmende Konstante ist. — Wir ordnen noch dem gemeinsamen Seitenquadrat  $Q_i(x = a)$  zweier Würfel  $W_j(x < a)$  und  $W_k(x > a)$  den Wert  $I_i = (U_k - U_j)/h$  zu, ebenso für  $y$  bzw.  $z$  statt  $x$ .

Wir konstruieren nun in jedem Würfel  $W_{j_0}$  ( $0 \leq x, y, z \leq h$ ; die Seitenquadrate  $Q_i$ ;  $x = 0$  bzw.  $x = h$ ,  $y = 0$ ,  $y = h$ ,  $z = 0$ ,  $z = h$  bilden den Durchschnitt von  $W_{j_0}$  mit  $W_{j_1}$  bzw. mit  $W_{j_2}$ ,  $W_{j_3}$ ,  $W_{j_4}$ ,  $W_{j_5}$ ,  $W_{j_6}$ ) ein quellenfreies Vektorfeld  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  mit der Normalkomponente  $v_i \equiv I_i$  auf dem Quadrat  $Q_i$ :

$$v_x = \frac{U_{j_0} - U_{j_1}}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right) + \frac{U_{j_2} - U_{j_0}}{h} \cdot \frac{x}{h};$$

$$v_y = \frac{U_{j_0} - U_{j_3}}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{U_{j_4} - U_{j_0}}{h} \cdot \frac{y}{h};$$

$$v_z = \frac{U_{j_0} - U_{j_5}}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) + \frac{U_{j_6} - U_{j_0}}{h} \cdot \frac{z}{h}.$$

Man verifiziert sofort:  $\operatorname{div} \vec{v} = -(6 U_{j_0} - U_{j_1} - U_{j_2} - \dots - U_{j_6})/h^2 = 0$  wegen des Gleichungssystems (6. 4. 1), dem die  $U_j$  genügen müssen. — Auf allen Seitenquadrate der Würfel hat  $\vec{v}$  eine stetige Normalkomponente; damit  $\vec{v}$  ein Versuchsfeld ist, soll noch der Fluss durch  $E_1$  nach aussen  $= 1$  sein; dieser ist aber wegen der Quellenfreiheit von  $\vec{v}$  in  $G$  gleich dem Fluss durch  $E_0$  nach innen; das heisst wir bekommen die zusätzliche Bedingung:

$$h \sum_{Q_i \subset E_1 \cap W_j} (2A - 2U_j) = 1 \quad \text{oder} \quad h \sum_{Q_i \subset E_0 \cap W_j} 2U_j = 1. \quad (6. 4. 2)$$

Sei  $N$  die Anzahl der Würfel in  $G$ ; die  $N$  Gleichungen (6. 4. 1) und eine der Gleichungen (6. 4. 2) bilden ein System zur Bestimmung der  $N + 1$  Grössen  $U_1, \dots, U_N$  und  $A$ . Mit den so bestimmten Grössen erhält man also ein zulässiges Versuchsfeld für das Thomsonsche Prinzip (6. 3. 1).

Die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems wird dadurch sichergestellt, dass das entsprechende homogene System [das heisst mit  $0$  statt  $1$  in (6. 4. 2)] nur die triviale Lösung  $U_1 = \dots = U_N = A = 0$  besitzt: denn ein maximaler Wert  $\neq 0$  kann keiner dieser  $N + 1$  Grössen zukommen.

6. 5. Für den oben betrachteten Würfel  $W_{j_0}$  berechnet man leicht

$$\iiint_{W_{j_0}} \vec{v}^2 d\tau = \frac{h}{2} \sum_{\varrho=1}^6 (U_{j_\varrho} - U_{j_0})^2 = \frac{h}{6} \cdot I_{j_0},$$



wobei

$$A_{j_0} = (2 U_{j_0} - U_{j_1} - U_{j_2})^2 + (2 U_{j_0} - U_{j_3} - U_{j_4})^2 + (2 U_{j_0} - U_{j_5} - U_{j_6})^2. \quad (6.5.1)$$

Summieren wir über alle Würfel  $W_j \subset G$  und schreiben wir überall

$$(U_j - U_k)^2 = U_j (U_j - U_k) + U_k (U_k - U_j),$$

so erhalten wir dank (6.4.1)

$$\begin{aligned} [4 \pi C^-(\vec{v})]^{-1} = N(\vec{v}) &= h^3 \sum_{\text{innere } Q_i} V_i^2 + \frac{h^3}{2} \sum_{Q_i \subset E_0 \cup E_1} V_i^2 - \frac{h^3}{6} \sum_{W_j} A_j \\ &- A h \sum_{Q_i \subset E_1 \cap W_j} (2 A - 2 U_j) - \frac{h}{6} \sum_{W_j} A_j, \end{aligned}$$

das heisst bei Berücksichtigung von (6.4.2)

$$[4 \pi C^-(\vec{v})]^{-1} = A - \frac{h}{6} \sum_{W_j} A_j, \quad (6.5.2)$$

oder etwas gröber

$$C^- \geq C_1^- = \frac{1}{4 \pi A}. \quad (6.5.3)$$

Für letztere Abschätzung genügt es also, aus dem Gleichungssystem nur den Wert von  $A$  zu berechnen.

6.6. *Simultane Methode.* Wir verfahren ganz analog wie im § 4. Statt der bis jetzt gebrauchten Würfелеinteilung führen wir für die untere Abschätzung der Kapazität eine andere ein, indem jedes Zentrum  $Z_j$  eines alten Würfels  $W_j$  zum Eckpunkt von Würfeln der neuen Unterteilung wird. Es bleiben noch an den Rande Zellen übrig, die aus Würfeln der Kantenlänge  $h/2$  zusammengesetzt sind. – Nun ordnen wir jedem Punkt  $Z_j$  den Wert  $p_j = U_j$  zu, der in 6.4 dem Würfel  $W_j$  zukam; auf der Randfläche  $E_0$  setzen wir überall  $p = 0$ ; auf der Randfläche  $E_1$ :  $p = A$ . In jedem neuen Würfel konstruieren wir sodann die *trilineare*, das heisst in jeder der drei Variablen  $x, y$  und  $z$  lineare Funktion  $p$ , die an den 8 Ecken  $Z_j$  die vorgeschriebenen Werte  $p_j$  annimmt. Da  $p$  in allen Seitenquadraten bilinear ist, ist der stetige Anschluss zwischen zwei benachbarten Würfeln gesichert; so dass  $p/A$  als stetige Probierfunktion für das Dirichletsche Prinzip zugelassen ist. – So bekommt man aus denselben Werten  $p_j = U_j$  auch eine obere Abschätzung  $C^+(p/A)$  für die Kapazität.

### Bemerkung

Diese Verwendung einer stückweise trilinearen Probierfunktion ist wieder eine etwas abgeschwächte Fassung eines (zum § 2 analogen) Verfahrens von PÓLYA, das eine Bestimmung der Eckenwerte  $p_j$  durch die Extremalbedingungen

$C^+(p)$  - min vorsah. Erst unser *Verzicht* auf diese Bedingung ermöglicht in relativ einfacher Weise die Gewinnung der Schranken  $C^-$  und  $C^+$  aus einem einzigen Gleichungssystem.

6. 7. Dasselbe Problem der Kapazität lässt sich auch für 2 statt 3 Dimensionen ebenso lösen (Kapazität pro Längeneinheit). Das zweidimensionale Gebiet  $G$  (mit den Randkurven  $E_0$  und  $E_1$ ) wird (wie beim Problem der Torsion, §§ 3 und 4) in Quadrate eingeteilt, denen Werte  $U_j$  zugeordnet sind. Die Gleichungen (6. 4. 1) werden durch  $4 U_{j_0} - U_{j_1} - U_{j_2} - U_{j_3} - U_{j_4} = 0$  ersetzt, die Vorschriften von 6. 4 über die « Spiegelung am Rande » übertragen sich wörtlich (« Quadrat » statt « Würfel », « Kante » statt « Quadrat » lesen); so wird wieder eine Konstante  $A$  eingeführt. Das Feld  $\vec{v}$  wird wie in 3. 1 konstruiert; es ist jetzt quellenfrei. Die beiden äquivalenten Gleichungen (6. 4. 2) lauten jetzt

$$\sum_{k_i \in E_1 \cap Q_j} (2 A - 2 U_j) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k_i \in E_0 \cap Q_j} 2 U_j = 1. \quad (6. 7. 1)$$

Ist  $N$  die Anzahl der Quadrate  $Q_i$  im Gebiet  $G$ , so haben wir wieder ein System von  $N + 1$  linearen Gleichungen in den  $N + 1$  Unbekannten  $U_j, A$ .

Man erhält  $[4 \pi C^-(\vec{v})]^{-1} = N(\vec{v}) = A \sum_{k_i \in E_1 \cap Q_j} (2 A - 2 U_j) = 1/6 \sum_{Q_j} A_j$ , wo nun

$$A_{j_0} = (2 U_{j_0} - U_{j_1} - U_{j_2})^2 + (2 U_{j_0} - U_{j_2} - U_{j_4})^2 = 2 (2 U_{j_0} - U_{j_1} - U_{j_3})^2; \quad (6. 7. 2)$$

wegen (6. 7. 1) haben wir also

$$[4 \pi C^-(\vec{v})]^{-1} = A - \frac{1}{6} \sum_{Q_i} A_i, \quad (6. 7. 3)$$

oder etwas gröber wieder

$$C^- \geq C_1^- = \frac{1}{4 \pi A}. \quad (6. 7. 3)$$

Für die Simultanmethode wird die stückweise trilineare Funktion von 6. 6 durch eine bilineare ersetzt.

## § 7. Schlussbemerkungen

Es wurde verschiedentlich auf die Dualität der Prinzipien von DIRICHLET und von THOMSON hingewiesen, die Abschätzungen in verschiedenen Richtungen liefern. Die hier dargestellten Methoden zur Gewinnung oberer und unterer Schranken für Torsionssteifigkeit und Kapazität bestehen in einer Algebraisierung des Dirichletschen Prinzips durch Zuhilfenahme einer diskreten Eckenfunktion  $p_i$  (0-dimensionale Funktion [G. PÓLYA]) und einer Algebraisierung des Thomsonschen Prinzips durch Verwendung von Zellenfunktionen  $U_i$  (2- bzw. 3dimensionale Funktionen im Falle der Ebene bzw. des Raumes).

Zwischen diesen Prinzipien und ihren Algebraisierungen besteht eine sehr weitgehende formale Analogie, auf welche hier nur vereinzelt hingewiesen wurde, die aber den mathematischen Hintergrund der angegebenen Methoden darstellt. Unter diesem Gesichtspunkt tritt hinter der erwähnten Dualität der beiden Prinzipien jene der algebraischen Topologie eines  $n$ -dimensionalen Zellenkomplexes hinsichtlich der komplementären Dimensionen  $k$  und  $n - k$  in Erscheinung.

Die Grundgedanken der vorliegenden gemeinsamen Arbeit wurden 1954 anlässlich der Jahresversammlung der Schweiz. Mathematischen Gesellschaft in Altdorf bekanntgegeben [6].

Obere Schranken für die Torsionssteifigkeit sowie untere Schranken für die Kapazität kann man auch mit Hilfe von Zellenfunktionen ohne Benutzung des Thomsonschen Prinzips gewinnen [3]; die Dualität der komplementären Dimensionen  $k$  und  $n - k$  tritt auch in Abwesenheit eines Thomsonschen Prinzips in Erscheinung.

Eine nähere Untersuchung über Konvergenzfragen, die zum Teil in 4. 5 auftauchten, wird in einer Arbeit von A. SCHOPF [10] erscheinen.

Für viele Untersuchungen über Differenzenverfahren wende man sich an das Standardbuch von L. COLLATZ [1] und die dort angegebene Literatur.

Schliesslich sei auf die mit unserem Gedankenkreis verwandte schöne Methode von J. L. SYNGE [11] hingewiesen, die auf anschaulichen Betrachtungen im Funktionenraum beruht.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1955).
- [2] G. E. FORSYTHE, *Asymptotic Lower Bounds for the Frequencies of Certain Polygonal Membranes*, *Pacif. J. Math.* 4, 467–480 (1954).
- [3] J. HERSCH, *Equations différentielles et fonctions de cellules*, *C. R. Acad. Sci., Paris* 240, 1602–1604 (1955).
- [4] G. LEIN, *Die Torsionssteifigkeit von kreuzförmigen Querschnitten*, *Ingenieur-Archiv* 21, 352–364 (1953).
- [5] A. PFLUGER, *Über das Typenproblem Riemannscher Flächen*, *Comment. math. helvet.* 27, 346–356 (1953).
- [6] A. PFLUGER, *Über die Bestimmung von obern und untern Schranken für die Kapazität und Torsionssteifigkeit*, *Verh. schweiz. naturf. Ges., Altdorf 1954*, 98.
- [7] G. PÓLYA, *Sur une interprétation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures*, *C. R. Acad. Sci., Paris* 235, 995–997 (1952).
- [8] G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, *Ann. Math. Stud.* 27 (1951).
- [9] G. PÓLYA und A. WEINSTEIN, *On the Torsional Rigidity of Multiply Connected Cross-Sections*, *Ann. Math.* 52, 154–163 (1950).
- [10] A. SCHOPF. Arbeit erscheint später.

- [11] J. L. SYNGE, *Flow of Viscous Liquid Through Pipes and Channels*, Proc. Fourth Symp. appl. Math. (McGraw-Hill, New York 1953), S. 141-165.
- [12] S. TIMOSHENKO und J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York 1951).

### Summary

We consider the torsion of a prism. Let its cross-section  $Q$  be covered by a square network (lattice) of mesh size  $h$ . PÓLYA defined a function  $u_i$  on all lattice points by means of a partial difference equation, and then a function  $p$  on  $Q$  by bilinear continuation of  $u_i$  in every square. To  $p$  he applied DIRICHLET's principle and obtained thus lower bounds for the torsional rigidity  $P$  of  $Q$ . - Here we define (§ 3) a *cell function*  $V_i$ , attributing a real value to each square; using  $U_i$ , we construct a vector field  $\vec{v}$ , to which we can apply THOMSON's principle and get upper bounds for  $P$ . - A simultaneous method for upper and lower bounds is then indicated and discussed (§ 4), and an example is given (§ 5). - Evaluations for capacity may be calculated in a very similar way (§ 6).

(Eingegangen: 11. Januar 1955.)

## Numerische Behandlung der Diffusionsgleichung mit Konvektionsterm<sup>1)</sup>

VON EDUARD BATSCHELET<sup>2)</sup> und FRANZ GRÜN<sup>3)</sup>, Basel

### 1. Einleitung

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat M. ABRAMOWITZ<sup>1, 4)</sup> ein spezielles Problem der Wärme konvektion durch Separation der Variablen und durch Reihenentwicklung gelöst und gezeigt, wie die Lösung für die numerische Auswertung verwendet werden kann. Wir beschreiben im folgenden bei einem verwandten Diffusionsproblem ein andersartiges Verfahren, das ebenfalls zu einer brauchbaren numerischen Lösung führt. Nur dürfte der Rechenaufwand wesentlich geringer sein. Unser Vorgehen ist überdies nicht an die Voraussetzung einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung gebunden.

Wir ersetzen zuerst die Differentialgleichung und die Randbedingungen des Problems durch ein System von linearen Differenzgleichungen (Abschnitt 3).

<sup>1)</sup> Die vorliegende Mitteilung handelt von einem Teil eines Forschungsprojektes «Probleme des Gasaustausches in der Lunge» der Arbeitsgemeinschaft K. BUCHER, Pharmakologische Anstalt, und F. GRÜN, Physikalisch-Chemische Anstalt. Die Untersuchungen werden in verdankenswerter Weise subventioniert von der F.-Hoffmann-La-Roche-Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Arbeitsgemeinschaften in der Schweiz.

<sup>2)</sup> Mathematische Anstalt der Universität Basel.

<sup>3)</sup> Physikalisch-Chemische Anstalt der Universität Basel.

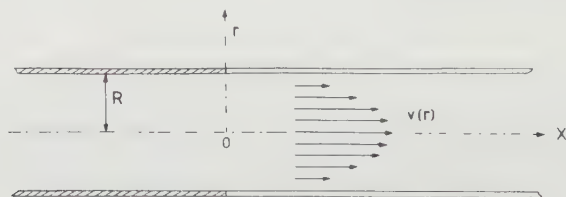
<sup>4)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 120.

Im Gegensatz zu den meisten Anwendungen des Differenzenverfahrens auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus ergeben sich hier bei der Auflösung zwei besondere Schwierigkeiten: Erstens sind unendlich viele Gitterpunkte vorhanden. Zweitens konvergiert die iterative Auflösung der Gleichungen nicht. Das sonst so bequeme Relaxationsverfahren ist daher nicht anwendbar.

Umgekehrt wird unsere Aufgabe durch die speziellen Voraussetzungen erleichtert, die wir in Abschnitt 2 über das Integrationsgebiet treffen: Es soll die Form eines Kreiszylinders besitzen. Damit wird es möglich, einen Ansatz mit Exponentialfunktionen zu machen und die Differenzengleichungen ohne Iteration exakt aufzulösen. Für den Fehler, der beim Übergang von der Differential- zu den Differenzengleichungen entsteht, können Abschätzungen ermittelt werden (Abschnitt 6).

## 2. Formulierung des Diffusionsproblems

Eine Flüssigkeit, die eine Substanz  $A$  in der Konzentration  $u^*$  gelöst enthält, strömt, aus einem Reservoir kommend, durch ein unendlich langes, kreiszylindrisches Rohr vom Radius  $R$ . Das Geschwindigkeitsfeld sei stationär und zur Rohrachse symmetrisch. Der Geschwindigkeitsvektor  $v(r)$  sei nur Funktion des Abstandes von der Rohrachse. Wir lassen die Rohrachse mit der  $x$ -Achse eines Koordinatensystems zusammenfallen (Figur 1).



Figur 1

Das Geschwindigkeitsfeld der strömenden Lösung.

Wir nehmen an, die Rohrwand sei für negative  $x$ -Werte für die gelöste Substanz undurchlässig. Sie sei aber für positive  $x$ -Werte aus einem für die Substanz  $A$  durchlässigen Material angefertigt. Ausserhalb des Rohres sei die Konzentration der Substanz  $A$  durchweg gleich Null. Unter diesen Annahmen findet ein ständiger Transport von Substanz  $A$  aus dem Rohr nach aussen statt. Die Substanz diffundiert zunächst in der Flüssigkeit mit der Diffusionskonstanten  $D$  von der Rohrachse gegen die Wand und von da durch die Wand mit der Diffusionskonstanten  $D_w$  nach aussen. Durch die Strömung wird beständig Substanz nachgeliefert. Gesucht ist die Konzentration  $u$  der Substanz  $A$  in allen Punkten des Rohres, nachdem sich der stationäre Zustand eingestellt hat.





Für die Gitterseite wählen wir den Wert  $h = R/3$ . Die Funktionswerte  $u(x, r)$  approximieren wir durch die Gitterwerte  $U_n$  am Rande  $r = R$ , durch  $u_n$  längs der Parallelen  $r = 2R/3$ , durch  $w_n$  längs der Parallelen  $r = R/3$  und durch  $W_n$  längs der  $x$ -Achse ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Bei Verwendung von zentralen Differenzen lauten die Differenzenapproximationen längs der Geraden  $r = 2R/3$  und für  $x = nh$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + \mathfrak{R}_1, & \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{U_n - w_n}{2h} + \mathfrak{R}_2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{u_{n+1} + U_n + u_{n-1} + w_n - 4u_n}{h^2} + \mathfrak{R}_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Darin bezeichnen  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$  die später im Abschnitt 6 angegebenen Restglieder. Entsprechende Ausdrücke haben wir längs der Geraden  $r = R/3$  anzusetzen. Setzen wir (6) in (1) ein und vernachlässigen wir die Restglieder, so erhalten wir die Differenzengleichungen:

Für  $r = 2h$ :

$$\left. \left(1 - \frac{h v_{2h}}{2D}\right) u_{n+1} + \frac{5}{4} U_n + \left(1 + \frac{h v_{2h}}{2D}\right) u_{n-1} + \frac{3}{4} w_n - u_n = 0, \right\} \quad (7)$$

Für  $r = h$ :

$$\left(1 - \frac{h v_h}{2D}\right) w_{n+1} + \frac{3}{2} u_n + \left(1 + \frac{h v_h}{2D}\right) w_{n-1} + \frac{1}{2} W_n - 4w_n = 0.$$

Durch (2) sind die Gitterwerte für  $x = 0$  vorgegeben:

$$U_0 = u_0 = w_0 = W_0 = u^*. \quad (8)$$

Zur Befriedigung der Randbedingungen für  $r = 0$  und  $r = R$  verwenden wir die folgende Dreipunktformel der numerischen Differentiation<sup>7)</sup>:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \mathfrak{R}_4. \quad (9)$$

Das Restglied  $\mathfrak{R}_4$  wird in Abschnitt 6 ausgeschrieben werden. Mit Hilfe von (9) lauten die den Randbedingungen (3) und (5) entsprechenden Differenzengleichungen

$$-(3 + 2hk) U_n + 4u_n - w_n = 0, \quad -3W_n + 4w_n - u_n = 0. \quad (10)$$

Zur Auflösung der simultanen Gleichungen (7) und (10) eliminieren wir zunächst  $U_n$  und  $W_n$  und erhalten so

$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} + \delta w_n = 0, \quad \varepsilon w_{n+1} + \zeta w_n + \eta w_{n-1} + \vartheta u_n = 0, \quad (11)$$

<sup>7)</sup> Andere Methoden der Randapproximation verwenden L. COLLATZ [3], S. 428, L. FOX [4] und G. SHORTLEY und Mitarb. [5].

worin wir zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{1}{3 + \frac{2}{h} \bar{h}}, & \alpha &= 1 - \frac{h v_{2h}}{2D}, & \beta &= 5l - 4, & \gamma &= 1 + \frac{h v_{2h}}{2D}, \\ \delta &= \frac{3 - 5l}{4}, & \varepsilon &= 1 - \frac{h v_h}{2D}, & \zeta &= -\frac{10}{3}, & \eta &= 1 + \frac{h v_h}{2D}, & \vartheta &= \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gesetzt haben.

#### 4. Die exakte Auflösung der Differenzengleichungen

Die Gleichungen (11) stellen für  $n = 1, 2, \dots$  ein System linearer homogener Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten dar. Zur exakten Auflösung macht man den Ansatz

$$u_n = A \Theta^n, \quad w_n = B \Theta^n.$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$A (\alpha \Theta^2 + \beta \Theta + \gamma) + B (\delta \Theta) = 0, \quad A (\vartheta \Theta) + B (\varepsilon \Theta^2 + \zeta \Theta + \eta) = 0,$$

die nur befriedigt werden können, wenn

$$\left. \begin{aligned} &\alpha \Theta^2 + \beta \Theta + \gamma && \delta \Theta \\ &\vartheta \Theta && \varepsilon \Theta^2 + \zeta \Theta + \eta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \varepsilon \Theta^4 + (\alpha \zeta + \beta \varepsilon) \Theta^3 + (\alpha \eta + \beta \zeta + \gamma \varepsilon - \vartheta \delta) \Theta^2 \\ &+ (\beta \eta + \gamma \zeta) \Theta + \gamma \eta = 0 \end{aligned}$$

ist. Die Formel (13) stellt die *charakteristische Gleichung* des Problems dar. Ihre Wurzeln seien mit  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$  bezeichnet<sup>8)</sup>. Dann lautet bekanntlich die allgemeine Lösung der Gleichungen (11)

$$u_n = \sum_{\kappa=1}^4 A_{\kappa} \Theta_{\kappa}^n, \quad w_n = \sum_{\kappa=1}^4 B_{\kappa} \Theta_{\kappa}^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Die Koeffizienten  $A_{\kappa}, B_{\kappa}$  lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen. Die Bedingung (4) kann nur erfüllt werden, wenn alle charakteristischen Wurzeln vom absoluten Betrag  $\geq 1$  unterdrückt werden, wenn also die zugehörigen Koeffizienten in (14) gleich Null gesetzt werden. Die restlichen Koeffizienten ergeben sich bei der Erfüllung von (8).

<sup>8)</sup> Wir betrachten hier den Fall mehrfacher Wurzeln nicht, da er im vorliegenden Problem ohne Bedeutung ist.

### 5. Zahlenbeispiel

Wir legen die folgenden Daten zugrunde<sup>9)</sup>:

$$R = 6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}; \quad D = 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}; \quad k = 0,5 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}.$$

Für die Strömung der Flüssigkeit im Rohr nehmen wir eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung an:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad \text{mit } v_0 = 0,54 \text{ cm s}^{-1}. \quad (15)$$

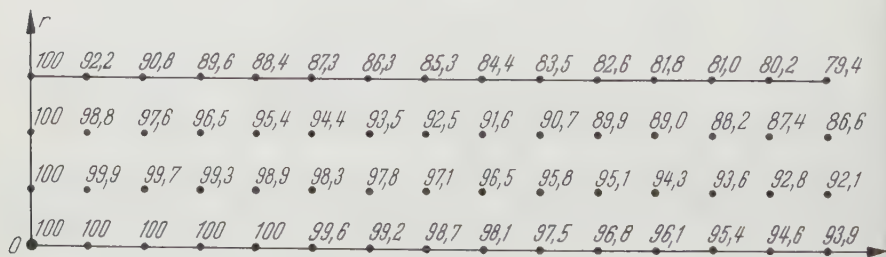
Die Differenzengleichungen (11) lauten dann

$$\left. \begin{aligned} -2u_{n+1} - \frac{39}{16}u_n + 4u_{n-1} + \frac{23}{64}w_n &= 0, \\ -\frac{19}{5}w_{n+1} - \frac{10}{3}w_n + \frac{29}{5}w_{n-1} + \frac{4}{3}u_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Daraus gewinnt man die charakteristische Gleichung

$$22,8 \Theta^4 + 47,7875 \Theta^3 - 57,4625 \Theta^2 - 82,4125 \Theta + 69,6 = 0$$

mit den Wurzeln  $\Theta_1 = 0,9911378 \dots$ ,  $\Theta_2 = 0,8213722 \dots$ ,  $\Theta_3 = -1,69 \dots$ ,  $\Theta_4 = 2,21 \dots$ . Da die Lösung für  $n \rightarrow \infty$ , wie oben erwähnt, nach 0 konvergieren muss, kann sie nur die beiden Wurzeln  $\Theta_1, \Theta_2$  vom absoluten Betrag  $< 1$



Figur 3

Die exakte Lösung der Differenzengleichungen. Die Werte stellen die Konzentration des diffundierenden Stoffes dar.

<sup>9)</sup> Das in dieser Mitteilung behandelte Diffusionsproblem stellt sich bei der Betrachtung eines Modells, das wir uns machen, um den Gasaustausch aus einer einzelnen Lungenkapillare in dem umgebenden Alveolarraum theoretisch zu behandeln. Die für die Berechnungen im Text verwendeten Zahlenwerte sind die für dieses Modell anzunehmenden Daten. Für Näheres siehe Publikationen, die in den *Helvetica Physiologica et Pharmacologica Acta* erscheinen werden.

enthalten. Die Lösung lautet:

$$u_n = A_1 \Theta_1^n + A_2 \Theta_2^n, \quad w_n = B_1 \Theta_1^n + B_2 \Theta_2^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Setzt man die Anfangskonzentration  $u_0 = w_0 = 100$ , so gewinnt man für die Koeffizienten die Gleichungen  $A_1 + A_2 = 100$ ;  $B_1 + B_2 = 100$  und aus (16) für  $n = 1$  zwei weitere lineare Gleichungen, aus denen die Koeffizienten zu  $A_1 = 97,90101 \dots$ ,  $A_2 = 2,09898 \dots$ ,  $B_1 = 104,61210 \dots$ ,  $B_2 = -4,61210 \dots$  ermittelt werden können. Die Lösung der Differenzengleichungen ist in Figur 3 für  $n = 0, 1, \dots, 14$  dargestellt.

## 6. Die Methode der Fehlerabschätzung

Durch den Übergang von der Differentialgleichung und ihren Randbedingungen zu einem System von Differenzengleichungen entsteht der sogenannte *Abbrechfehler* (truncation error). Wir skizzieren hier das Prinzip der Abschätzung und benützen dazu das oben verwendete grobe Gitter. Es ist zu betonen, dass für die tatsächliche Durchführung einer Fehlerberechnung feinere Gitter benützt werden müssen.

Wir bezeichnen den Abbrechfehler mit  $\Delta(x, r)$  und verstehen darunter die Differenz aus der exakten Lösung  $u(x, r)$  der Gleichungen (1) bis (5) und der Lösung der Differenzengleichungen (11). Die in (6) mit  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$  bezeichneten Restglieder erhält man aus der Taylor-Entwicklung:

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{h^2}{6} \Phi_1, \quad \mathfrak{R}_2 = -\frac{h^2}{6} \Phi_2, \quad \mathfrak{R}_3 = -\frac{h^2}{12} (\Psi_1 + \Psi_2), \quad (17)$$

wo  $\Phi_1, \Phi_2$  Mittelwerte der 3. Ableitungen von  $u$  nach  $x$  und  $r$ ,  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  entsprechende Mittelwerte der Ableitungen 4. Ordnung sind. Ferner ist in (9)

$$\mathfrak{R}_4 = -\frac{h^2}{3} (f_1''' - 2 f_2'''). \quad (18)$$

Hierin sind  $f_1'''$  und  $f_2'''$  gewisse Mittelwerte der 3. Ableitung von  $f(x)$ .

Die genannten Mittelwerte der höheren Ableitungen von  $u(x, r)$  sind zwar unbekannt. Sie können jedoch aus der Lösung des Gleichungssystems (11) geschätzt werden. Man braucht dazu nur die höheren Differenzen zu bilden und geeignete Formeln der numerischen Differentiation anzuwenden. Die Schätzung wird um so zuverlässiger, je kleiner die Gitterseite  $h$  ist<sup>10)</sup>.

Leitet man die Formeln (11) wie in Abschnitt 3, jedoch ohne Vernachlässigung der Restglieder her, so erhält man die Fehlergleichungen

$$\alpha u_{n+1}^* + \beta u_n^* + \gamma u_{n-1}^* + \delta w_n^* = S, \quad \varepsilon w_{n+1}^* + \zeta w_n^* + \eta w_{n-1}^* + \vartheta u_n^* = T, \quad (19)$$

<sup>10)</sup> Dass der Abbrechfehler gegen Null strebt, kann auf die gleiche Weise wie in [2] gezeigt werden.



in denen  $u_n^*$  und  $w_n^*$  die Werte der exakten Lösung von (1) und  $S$ ,  $T$  lineare Ausdrücke in den Mittelwerten der Formeln (17) und (18) bezeichnen. Subtrahieren wir die Gleichungen (11) von den entsprechenden Gleichungen (19), so ergibt sich ein *inhomogenes* System linearer Gleichungen für die Werte  $\Delta(x, r)$  in den Gitterpunkten. Die Fehler  $\Delta(x, r)$  genügen also demselben Gleichungssystem wie die Näherungswerte  $u_n, w_n$ , nur mit anderen rechten Seiten<sup>11)</sup>. Zur Auflösung dieser Fehlergleichungen können wir wiederum Gebrauch von der Theorie der linearen Differenzengleichungen machen: Wir addieren zu einer willkürlichen partikulären Lösung die allgemeine Lösung des homogenen Systems, die wir schon in Abschnitt 4 ermittelt haben, und passen die Koeffizienten den folgenden Randbedingungen an:

$$\Delta(0, r) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x, r) = 0. \quad (20)$$

Herrn PETER TSCHICHOLD sprechen wir für die Durchführung der numerischen Rechnungen unseren besten Dank aus.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. ABRAMOWITZ, *On the Solution of the Differential Equation Occuring in the Problem of Heat Convection in Laminar Flow Through a Tube*, J. Math. Physics 32, 184–186 (1953).
- [2] E. BATSCHELET, *Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Phys. (ZAMP) 3, 165–193 (1952).
- [3] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, 2. Auflage (Springer-Verlag 1955).
- [4] L. FOX, *The Numerical Solution of Elliptic Differential Equations when the Boundary Conditions Involve a Derivative*, Philos. Trans. Roy. Soc. London [A] 242, 345–378 (1950).
- [5] G. SHORTLEY, R. WELLER, P. DARBY, and E. H. GAMBLE, *Numerical Solution of Axisymmetrical Problems, with Applications to Electrostatics and Torsion*, J. appl. Phys. 18, 116–129 (1947).

#### Summary

The paper describes a method for numerically solving an elliptic type differential equation connected with a diffusion problem with superimposed convection. The method consists in replacing the differential equation by a set of simultaneous difference equations which are solved exactly, thus avoiding difficulties inherent to the relaxation method. An example is treated in detail and the truncation error is discussed.

(Eingegangen: 17. März 1955.)

<sup>11)</sup> Darauf ist mehrfach hingewiesen worden, vgl. L. COLLATZ [3], S. 354, und L. FOX [4], S. 351.

# Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung

VON ADOLF GIGER, Zürich<sup>1)</sup>

## Einleitung

### Die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin \Theta = \beta \quad (1)$$

spielt bei verschiedenen Problemen der Technik eine grosse Rolle. So gehorcht die Auslenkung ( $\Theta$ ) eines Pendels, das durch flüssige Reibung ( $\alpha$ ) gedämpft ist und auf das ein konstantes Drehmoment ( $\beta$ ) wirkt, dieser Gleichung ( $\tau$  ist eine dimensionslose Zeitgrösse) [1<sup>2)</sup>]. Normalerweise führt das Pendel gedämpfte Schwingungen um seine Gleichgewichtslage  $\Theta_0 = \arcsin \beta$  aus. Ist aber das Drehmoment zu gross, nämlich  $\beta > 1$ , so findet das Pendel keine Ruhelage mehr. Es dreht sich dann dauernd um seinen Aufhängepunkt. Es kann aber auch vorkommen, dass das Pendel bei gewissen Anfangsbedingungen trotz  $|\beta| < 1$  nicht in seine Gleichgewichtslage zurückkehrt, sondern sich fortwährend dreht. Je grösser die Dämpfung  $\alpha$ , desto weniger wahrscheinlich wird dieses Verfehlen der Ruhelage sein. Es gibt nun für jedes  $|\beta| < 1$  einen Wert  $\alpha_0$ , so dass für  $\alpha > \alpha_0$  das Pendel unabhängig von den Anfangsbedingungen stets in die stabile Gleichgewichtslage zurückkehrt. Diese wird aber unter Umständen erst nach etlichen Pendelumläufen, also erst nach längerer Zeit, erreicht. Es ist der Zweck dieser Arbeit, die Werte  $\alpha_0(\beta)$  analytisch zu berechnen.

Aus der Theorie der elektrischen Maschinen ist des weiteren bekannt, dass die Phasenverschiebung zwischen dem Rotor eines Synchronmotors und seinem Drehfeld obiger Gleichung gehorcht [2], [3]. Dann rührt  $\alpha$  von der Dämpferwicklung des Rotors her, und  $\beta$  stellt das angehängte Lastmoment dar. Das Rückstellmoment (synchronisierendes Moment), das durch das Drehfeld auf den Rotor ausgeübt wird, ist auch hier wieder sinusförmig. Wenn die Belastung des Motors zu gross wird, kann er ausser Tritt fallen, und  $\Theta(\tau)$  wird periodisch.

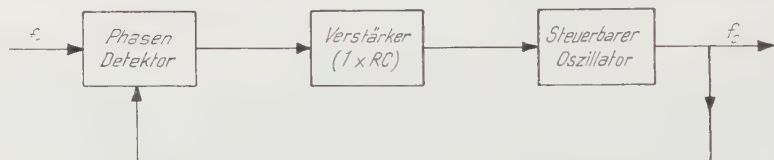
Auch auf dem Gebiete der Hochfrequenztechnik ist die angegebene Differentialgleichung von Bedeutung. Sie tritt beim Problem der Synchronisation eines Hochfrequenzgenerators durch eine fremde Frequenz auf. Dabei wird die

<sup>1)</sup> Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 129.

Synchronisation aber nicht durch direkte Einwirkung des Fremdsignals auf den Oszillator bewirkt, sondern mit Hilfe einer Gegenkopplung (Figur 1).

In einem Phasendetektor wird die gesteuerte Frequenz  $f_c$  mit der Steuerfrequenz  $f_s$  verglichen. Der Detektor liefert eine Spannung proportional dem Sinus der Phasendifferenz zwischen den beiden Signalen. Die Spannung wird in einem einstufigen Verstärker, der nur ein einziges RC-Tiefpass-Glied enthält, verstärkt und steuert darauf die Frequenz des Oszillators auf lineare Art und Weise. Ist die Frequenzdifferenz zwischen den beiden Signalen nicht zu gross ( $|\beta| < 1$ ), so kann der Oszillator durch  $f_s$  synchronisiert werden. Ob er wirklich synchronisiert wird, hängt von den Anfangsbedingungen ab. Befindet sich das System zum Beispiel anfänglich schon in Synchronismus und wird  $f_s$  langsam



Figur 1

Synchronisation eines Oszillators durch Phasensteuerung.

verschoben, so kann der Oszillator bis auf  $|\beta| = 1$  in Trritt bleiben. Dieses Gebiet  $|\beta| < 1$  wird mit «Halte-Bereich» (Hold-in range) bezeichnet. Bei genügend grosser Bandbreite (prop.  $\alpha^2$ ) des Tiefpasses, für  $\alpha > \alpha_0$ , wird nun aber unabhängig von den Anfangsbedingungen stets nach einiger Zeit der synchronisierte Zustand erreicht. Dieses Gebiet nennt man «Fang-Bereich» (Pull-in oder Lock-in range).

Das Regelsystem nach Figur 1 wird in neuerer Zeit in Empfängern für Farbfernsehsendungen nach dem Punktsprungverfahren (dot interlaced colour television) verwendet. Der kontrollierte Oszillator liefert dabei die Farbumschaltfrequenz (colour subcarrier) von 3,89 MHz, deren Phase möglichst wenig von derjenigen eines vom Sender gelieferten Synchronisiersignales abweichen soll [4].

Auch in guten Schwarz-Weiss-Fernsehempfängern wird zur Synchronisation des Zeilenablenkgenerators (15625 Hz) die Anordnung mit automatischer Phasenregelung angewendet. Nur haben wir es hier nicht mehr mit sinusförmigen Schwingungen zu tun, sondern mit Rechteckimpulsen und sägezahnförmigen Spannungen [5].

Bei dem mit Impulsen synchronisierten Oszillator (Impulse governed oscillator, IGO) [6] wird die sinusförmige Oszillatorschwingung im Phasendetektor mit einer frequenzstabilen Folge von schmalen Rechteckimpulsen verglichen. Der Vorteil dieses Systems besteht darin, dass der Oszillator dabei auch auf Oberwellen der Impulsfolgefrequenz synchronisiert werden kann.

Zur Mittelfrequenzstabilisierung von frequenzmodulierten Sendern dient eine Methode, bei der vorerst die Sendefrequenz stark unternetzt wird (um die durch die Modulation verursachten Phasenänderungen genügend klein zu machen). Alsdann wird diese geteilte Frequenz in einem Phasendetektor mit einer quarzstabilisierten Referenzfrequenz verglichen. Der Phasendetektor gibt dann die (nichtlineare) Steuergrösse zur Regelung des Sendeoszillators ab 7.

Da die Amplitudenmodulation bei Magnetron-Oszillatoren stets von einer unerwünschten Frequenzmodulation begleitet ist, wurde ein in der Frequenz steuerbares Magnetron entwickelt, dessen Mittelfrequenz durch eine Regelung nach Figur 1 konstant gehalten werden kann [8].

Am Institut für Hochfrequenztechnik an der ETH. ist die beschriebene Methode verwendet worden, um ein Reflexklystron durch ein frequenzmoduliertes Signal zu synchronisieren. Der Wert  $\beta$  ist in diesem Fall noch zeitlich veränderlich.

Die Aufgabe, die Werte  $\alpha_0$  in Funktion von  $\beta$  zu finden, ist bis jetzt noch nicht mit der gewünschten Vollständigkeit und Genauigkeit gelöst worden. Es wird nun im folgenden eine analytische Methode angegeben, mit welcher  $\alpha_0$  beliebig genau berechnet werden kann.

### Die mathematische Lösung des Problems

Wir führen vorerst an unserer Differentialgleichung (1) die Transformation  $\vartheta = \vartheta + \pi - \arcsin \beta$  durch und erhalten die neue Gleichung

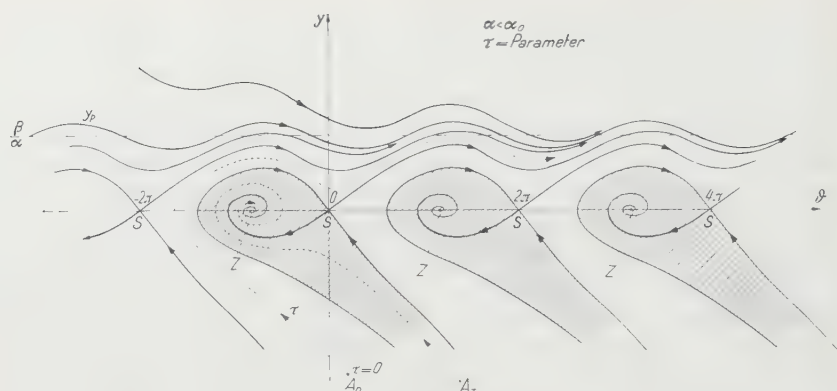
$$\frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\vartheta}{d\tau} - \sin(\vartheta - \arcsin \beta) = \beta. \quad (2)$$

Mit  $d\vartheta/d\tau = y$  wird alsdann (2) von erster Ordnung in  $y$ , nämlich:

$$y \frac{dy}{d\vartheta} + \alpha y - \sin(\vartheta - \arcsin \beta) = \beta. \quad (3)$$

Mit Hilfe des Isoklinenverfahrens ( $dy/d\vartheta$  konstant aufzeichnen!) können wir Lösungen der Gleichung in der sogenannten Phasenebene ( $y$  gegen  $\vartheta$ ) auf graphischem Weg erhalten. Figur 2 zeigt einige Lösungen bei  $\alpha < \alpha_0$  für verschiedene Anfangsbedingungen.  $\beta$  ist dabei, wie auch im folgenden, eine positive Zahl.

Auf der  $\vartheta$ -Achse befinden sich in periodischen Abständen von  $2\pi$  Sattelpunkte  $S(-2\pi, 0, 2\pi$  usw.) und Zentrumspunkte  $Z(\pi + 2\arcsin \beta)$ . Von den Sattelpunkten strahlen nach 4 Richtungen besondere Lösungskurven aus, sogenannte Separatrizes. Beginnt die Lösungskurve beispielsweise im Punkt  $A_s$ , so verläuft sie in dem durch zwei Separatrizes eingerahmten und schraffierten Gebiet, so endet sie nach einiger Zeit in der stabilen Gleichgewichtslage in  $Z$ . Bei anderen Anfangsbedingungen jedoch (Punkt  $A_p$ ), so geht die Lösungskurve nach und nach in die sogenannte periodische Lösung zweiter Art  $y_p$  über.



Figur 2

Lösungskurven in der Phasenebene.

Diese Kurve  $y_p$  mit der Periode  $2\pi$  kann durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden. Setzen wir diese in (3) ein und integrieren über die Periodenlänge, so liefert nur das konstante Glied der Reihe einen Anteil an das Integral (nebst  $\beta$ ). Als Resultat folgt für den Mittelwert der periodischen Lösung:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} y_p(\vartheta) d\vartheta = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (4)$$

Wenn wir nun den Wert von  $\alpha$  grösser machen als in Figur 2, so rückt die Lösung  $y_p$  mehr und mehr gegen die Abszisse hinunter, sie schmiegt sich aber auch mehr und mehr an die aus den Sattelpunkten nach oben laufenden Separatrizes an. Im Grenzfall, für den Wert  $\alpha = \alpha_0$ , verläuft  $y_p$  von einem Sattelpunkt in den andern. Bei  $\alpha > \alpha_0$  ist schliesslich keine periodische Lösung mehr möglich, und alle Lösungskurven bewegen sich unabhängig von den Anfangsbedingungen in die Zentrumsunkte  $Z$ .

Für die Bestimmung von  $\alpha_0$  verwenden wir nun die Tatsache, dass die nach oben gehenden Separatrizes zusammenfallen und von einem Sattelpunkt in den andern laufen müssen. Diese Lösungskurve  $y_{p_0}$ , die zum Beispiel von  $\vartheta = 0$  nach  $\vartheta = 2\pi$  läuft, hat einen durch (4) gegebenen Mittelwert. Zudem lassen sich aus (3) die Ableitungen der Separatrizes in den Sattelpunkten berechnen.

Wir können dann  $y_{p_0}$  durch eine Potenzreihe  $\bar{y}_{p_0}$  approximieren, wobei die Näherung stets durch die Punkte  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = 2\pi$  gehen und in diesen Punkten in  $n$  Ableitungen mit  $y_{p_0}$  übereinstimmen soll. Schliesslich gelte entsprechend (4) das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{y}_{p_0} d\vartheta = \frac{\beta}{\alpha_0},$$

das uns die Bestimmungsgleichung für  $\alpha_0(\beta)$  liefert.



Je mehr Ableitungen in der Rechnung mitgenommen werden, desto genauer wird der Wert von  $x_0$ . Eine gute Konvergenz von  $x_0$  für alle  $\beta < 1$  wird aber nur bei Beachtung gewisser Vorsichtsmassnahmen erreicht. So zeigt es sich, dass die höheren Ableitungen der nach rechts oben laufenden Separatrix für grössere  $\beta$ -Werte divergenten Charakter haben. Das ist bei der nach links oben gehenden Separatrix nicht der Fall, obschon auch hier die Konvergenz nicht allzu gut ist. Aus diesem Grunde wird in  $y_{p_0}$  nur die erste Ableitung bei  $\vartheta \geq 0$  der Differentialgleichung angepasst. Hingegen werden bei  $\vartheta \leq 2\pi$  beliebige Ableitungen aus der Differentialgleichung entnommen und in die Näherung eingesetzt.

Vorerst wollen wir nun die Ableitungen der Separatrizes in den Sattelpunkten berechnen. Die Separatrix in dem sich bei  $\vartheta = 0$  befindenden Sattelpunkt wird dazu durch eine Potenzreihe  $\eta = \sum_{n=1}^n k_n \vartheta^n$  dargestellt und in (3) eingesetzt. Nachdem der Sinus ebenfalls in eine Reihe entwickelt worden ist, wird der Koeffizientenvergleich durchgeführt. Er liefert vorerst:

$$k_1 = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1 - \beta^2}$$

und

$$k_1 = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1 - \beta^2},$$

wobei die Indizes  $+$  bzw.  $-$  andeuten sollen, dass  $k_1$  zu der nach rechts oben bzw. links oben laufenden Separatrix gehört. Für die weiteren Koeffizienten  $k_n$  erhalten wir die folgenden Rekursionsformeln:

$$k_n = (-1)^{n/2+1} \frac{\beta/n! + (-1)^{n/2} (n+1) [k_2 k_{n-1} + k_3 k_{n-2} + \dots + k_{n/2+1} k_{n/2}]}{(n+1) k_1 + \alpha} \quad (n = \text{gerade}), \quad (6a)$$

$$k_n = (-1)^{(n-1)/2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}/n! + (-1)^{(n-1)/2} (n+1) [k_2 k_{n-1} + k_3 k_{n-2} + \dots + k_{(n+1)/2} k_{(n+1)/2}]}{(n+1) k_1 + \alpha} \quad (n = \text{ungerade}). \quad (6b)$$

$k_n$  erhält entsprechend der betrachteten Separatrix den Index  $+$  oder  $-$ . Und schliesslich berechnen sich die Ableitungen im Sattelpunkt aus den obigen Koeffizienten gemäss  $d^n \eta / d\vartheta^n = n! k_n$ .

Für  $\bar{y}_{p_0}$  setzen wir die Reihe  $\sum_{v=1}^{n+2} a_v \vartheta^v$  an. An der Stelle  $\vartheta = 0$  ist  $\bar{y}_{p_0}$  von selbst gleich Null. Eine erste Gleichung macht den Koeffizienten  $a_1$  gleich der

ersten Ableitung im Nullpunkt, also  $a_1 = k_1$ . Eine zweite Gleichung setzt  $\bar{y}_{p_0}$  bei  $\vartheta = 2\pi$  gleich Null. Dann folgen  $n$  weitere lineare Gleichungen, die die  $n$  ersten Ableitungen  $(-n! k_n)$  im Punkt  $\vartheta \leq 2\pi$  festlegen. Somit haben wir  $n+2$  lineare Gleichungen für die  $n+2$  Koeffizienten  $a_r$ . Für die  $n+1$  Unbekannten  $a_2$  bis  $a_{n+2}$  erhalten wir nach einigen Umformungen das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -(2\pi) k_1^+ &= a_2 (2\pi)^2 + a_3 (2\pi)^3 + a_4 (2\pi)^4 + a_5 (2\pi)^5 \\ + (2\pi) k_1^+ + (2\pi) k_1^- &= a_3 (2\pi)^3 + 2 a_4 (2\pi)^4 + 3 a_5 (2\pi)^5 \\ - (2\pi) k_1^+ - 2 (2\pi) k_1^- + (2\pi)^2 k_2^- &= a_4 (2\pi)^4 + 3 a_5 (2\pi)^5 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die  $m$ -te der insgesamt  $n+1$  Zeilen ist dabei allgemein von der Form:

$$(-1)^m 2\pi k_1^+ + \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu+1} \mu (2\pi)^{m-\mu} k_{m-\mu}^- = \sum_{\mu=1}^{n+2-m} a_{m+\mu} (2\pi)^{m+\mu} \binom{m+\mu-2}{m-1}.$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems lassen sich durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$(2\pi)^v a_v = (-1)^{v+1} \binom{n+1}{v-1} 2\pi k_1^+ + \sum_{\kappa=1}^n (-1)^{v-\kappa} (2\pi)^\kappa k_\kappa^- \sum_{l=1}^{n+1-\kappa} l \binom{l+\kappa-1}{v-2}, \quad (7)$$

wo  $v = 2$  bis  $n+2$  und  $a_1 = k_1^+$ .

Die  $n+2$  Koeffizienten  $a_v$  sind also durch  $k_1^+$  und die  $n$  Koeffizienten  $k_\kappa^-$  eindeutig bestimmt. Da in den  $k_\kappa^-$  nur die beiden Grössen  $\alpha$  und  $\beta$  stecken, sind auch die  $a_v$  nur von diesen Konstanten abhängig, also  $a_v = a_v(\alpha; \beta)$ . Nunnemann liefert uns (5) die Gleichung zur Bestimmung von  $\alpha_0(\beta)$ , nämlich:

$$\frac{\beta}{\alpha_0} = \sum_{v=1}^{n+2} \frac{a_v}{v+1} (2\pi)^v. \quad (8)$$

Setzen wir nun (7) in (8) ein, summieren und ordnen nach  $k_\kappa^-$ , so erhalten wir schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\beta}{\alpha_0} + \frac{2\pi k_1^+}{(n+2)(n+3)} \\ + \sum_{\kappa=1}^n \left[ \frac{1}{\kappa+1} + \frac{\kappa}{(n+2)(n+3)} - \frac{2}{n+3} \right] (-2\pi)^\kappa k_\kappa^- = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es wäre viel zu kompliziert, in (9) die  $k_x$  durch die Größen  $x$  und  $\beta$  zu ersetzen. Wenn wir zum Beispiel bis  $n = 5$  gehen, so lautet (9):

$$-\frac{\beta}{\alpha_0} + 0,11220 k_1^+ - 1,68299 k_1^- + 4,6998 k_2^- - 13,2883 k_3^- \\ + 33,397 k_4^- - 58,28 k_5^- = 0.$$

Zur Berechnung von  $\alpha_0$  bei festem Wert  $\beta$  nehmen wir vorerst eine Näherung für  $\alpha_0$ , berechnen daraus die Werte  $k_x$  nach (6) und setzen diese in (9) ein. Erhalten wir dabei nicht den Wert Null, so muss ein neuer Wert für  $\alpha_0$  gesucht werden. Meist genügen zwei Versuche, um mit Hilfe der Regula falsi den Wert  $\alpha_0$  auf genügend viele Stellen zu erhalten. Für  $n = 5$  wurde  $\alpha_0$  für  $0 \leq \beta \leq 1$  in Schritten des Wertes  $\beta$  von 0,1 mit einer Handrechenmaschine berechnet. Durch Vergleich mit noch höheren Approximationen lässt sich erkennen, dass der für  $n = 5$  erhaltene Wert  $\alpha_0$  höchstens um 1 Promille vom richtigen Grenzwert abweicht. In der folgenden Tabelle sind die berechneten Werte aufgetragen, wobei die letzte Ziffer einen Fehler von ungefähr einer Einheit aufweisen kann.

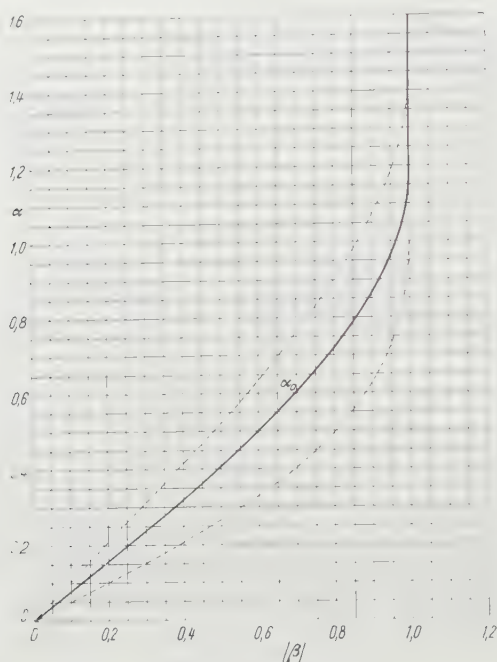
$\beta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	1,0
$\alpha_0$	0	0,0787	0,158	0,239	0,323	0,410	0,503	0,605	0,720	0,865	0,964	1,050	1,193

Zur Kontrolle der Konvergenz des Verfahrens wurde für  $\beta \rightarrow 0$  und  $\alpha_0 \rightarrow 0$  der Quotient  $\beta/\alpha_0$  und für  $\beta = 1$  der entsprechende Wert  $\alpha_0$  noch höher approximiert. Die folgende Tabelle zeigt das Verhalten der Werte bei zunehmender Höhe der Näherung bis  $n = 8$ . Für  $\beta/\alpha_0$  kann übrigens aus der Differentialgleichung exakt der Wert  $4/\pi$  gefunden werden.

$n$	$\frac{\beta}{\alpha_0} \left  \begin{array}{l} \beta \rightarrow 0 \\ \alpha_0 \rightarrow 0 \end{array} \right.$	$\alpha_0 \left  \begin{array}{l} \beta = 1 \end{array} \right.$
1	1,05	1,38
2	1,26	1,11
3	1,29	1,190
4	1,276	1,195
5	1,272	1,194
6	1,2729	1,1936
7	1,27331	1,19314
8	1,27326	1,19318
exakt	1,27324	

Die angegebenen Werte zeigen, dass das Verfahren konvergent ist. In Fig. 3 ist der Verlauf  $\alpha_0(\beta)$  aufgetragen. Das Gebiet zwischen der  $\alpha_0$ -Kurve

und der  $x$ -Achse ist der Fangbereich, wo keine periodischen Lösungen möglich sind, also stets Synchronismus eintritt. Zwischen der Kurve  $\alpha_0$  und  $\beta = 1$  liegt ein Teil des Haltebereiches, wo die Frage der Synchronisation stark von den Anfangsbedingungen abhängt. Für  $\alpha > 1,931$  ist stets für  $\beta < 1$  Synchronisation gewährleistet. Die Abszisse von Figur 3 gilt aus physikalisch leicht



Figur 3

Verlauf von  $\alpha_0$  für die Differentialgleichung  $d^2\Theta/d\tau^2 + \alpha d\Theta/d\tau + \sin\Theta = \beta$ .

ersichtlichen Gründen auch für negative Werte von  $\beta$ , weshalb sie mit dem Absolutwert von  $\beta$  angeschrieben ist.

In Figur 3 sind noch die von HAYES [9] angegebenen beiden Kurven eingezeichnet, welche die (damals noch unbekannten) richtigen Werte eingrenzen sollen. Auch SEIFERT [10], TRICOMI [11] und AMERIO [12] haben Grenzen angegeben, die aber sehr weit entfernt von der exakten Kurve verlaufen. PRESTON und TELLIER [4] fanden mit Hilfe der graphischen Isoklinenmethode für  $\beta < 0,5$  die approximative Beziehung  $\beta/\alpha_0 = 1,25$ . Auch in einer andern Arbeit [13] wird  $\alpha_0$  nach der Isoklinenmethode bestimmt, und zudem werden Messresultate angegeben. Nur ist die erzielte Genauigkeit gering.

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil einer theoretischen und experimentellen Untersuchung über die Frequenzmodulation eines Reflexklystrons mittels

Phasengegenkopplung. Sie entstand am Institut für Hochfrequenztechnik an der ETH unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. F. TANK.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. A. ANDRONOW und C. E. CHAIKIN, *Theory of Oscillations* (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949), S. 287–300.
- [2] N. W. Mc LACHLAN, *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences* (Oxford University Press, London 1950), S. 160–170.
- [3] J. J. STOKER, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems* (Interscience Publishers, N. Y. 1950), S. 66–80.
- [4] G. W. PRESTON und J. C. TELLIER, *The Lock-In Performance of an AFC Circuit*, Proc. I. R. E. 41, Februar, 249–251 (1953).
- [5] F. KERKHOF und W. WERNER, *Fernsehen*, Philips Techn. Bibl. 1957, 188–193.
- [6] E. G. HUGENHOLTZ, *Der mit Impulsen synchronisierte Oszillator, ein System für Frequenzstabilisierung*, Philips Techn. Rdsch. 13, Mai, 338–350 (1952).
- [7] E. M. OSTLUND et al., *Center Frequency Stabilized Frequency Modulated System*, Proc. I. R. E. 35, Oktober, 1144–1149 (1947).
- [8] J. S. DONALD jr., *Modulation of Continuous Wave Magnetrons*, Adv. Electronics 4, 187–256 (1952).
- [9] W. D. HAYES, *On the Equations for a Damped Pendulum Under Constant Torque*, ZAMP 4, 398–401, H. 5 (1953).
- [10] G. SEIFERT, *On the Existence of Certain Solutions of a Nonlinear Differential Equation*, ZAMP 3, 468–471, H. 6 (1952).
- [11] F. TRICOMI, *Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica*, Ann. R. Scuola norm. Sup. Pisa, 1933, 1–20.
- [12] L. AMERIO, *Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di un'equazione interessante d'elettrotecnica*, Ann. Mat. pura appl. 1949, 75–90.
- [13] Z. JELONEK et al., *Pulling Effect in Synchronized Systems*, Proc. I. E. E., Part III, 101, Januar, 50–52 (1954).

### Summary

The nonlinear differential equation

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin \Theta = \beta$$

is encountered in the treatment of several technical problems, e.g. the oscillations of a synchronous motor or the synchronization of a high frequency oscillator. The equation has two types of solutions  $\Theta(\tau)$ , one of them periodic with period  $2\pi$  in  $\Theta$  and the other one with a constant final value  $\Theta_0$ . The periodic solution is usually not desired in practice because it means the system has fallen out of synchronism. Therefore it exists a need for knowing the boundary between these two kinds of solutions. For  $|\beta| > 1$  a periodic solution does always exist and for  $0 < |\beta| < 1$  there exists an  $\alpha_0(\beta)$  such that the condition  $\alpha > \alpha_0$  implies the nonexistence of periodic solutions independent of initial conditions. In this paper the values  $\alpha_0(\beta)$  are calculated with the aid of an analytical approximation method. The accuracy of the approximation can be increased to any desired degree. This is shown in two particular cases.

(Eingegangen: 15. Februar 1955.)



# Stress Distributions Within Solids Bounded by One or Two Cones

By ANTONY J. A. MORGAN<sup>1)</sup>, Pasadena, California

## Abstract

The Mellin transform is used to obtain a formal solution for the state of stress, under quite general (e.g., piece-wise continuous) loading conditions, within solids bounded by one or two cones. For certain ranges of the cone semi-vertex angles, these solids, all of linearly varying thickness and semi-infinite in extent, may be *descriptively* classified as: (I) circular plates, (II) conical 'shells', and (III) solid cones. Under case III are subsumed: (a) the semi-infinite solid, (b) the semi-infinite solid with conical depression, and (c) the infinite solid with conical exclusion. As an example the solution for case IIIa, where a normal loading is uniformly applied over a circular area, is worked out in detail and shown to check with previously known results.

## 1. Introduction

By making use of the Mellin transform formal solutions of the governing partial differential equation for the stress function are obtained in the case where the solid is bounded by one or two co-axial cones and is subjected to axially symmetric external loadings. If  $\beta > \alpha$  are the semi-vertex angles of the two bounding cones, then the solids (Figure 1) under consideration may be descriptively classified as follows:

- (I)  $\beta > \pi/2 > \alpha$  circular plate of infinite radius and linearly varying thickness;
- (II)  $\pi/2 > \beta > \alpha$  semi-infinite conical 'shell';
- (III)  $\pi > \beta > \alpha$ , one bounding cone: semi-infinite solid cone;
  - (a)  $\beta = \pi/2$  semi-infinite solid;
  - (b)  $\beta > \pi/2$  semi-infinite solid with conical depression;
  - (c)  $\beta = \pi$  infinite solid with conical exclusion.

It is emphasized that the word 'shell' in case II is not used in the usual sense since it does not carry its common connotation of 'small' thickness.

The work given in this paper constitutes an extension of, and complements that reported upon in [1]<sup>2)</sup>, where polynomial load distributions were con-

<sup>1)</sup> AER, Inc.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 145.

sidered<sup>3)</sup>, since the present solutions cover loading cases (e.g., discontinuities, which were excluded from those given in [1]. However, the investigation in [1] is not entirely unconnected with (and, in fact, motivates) that given herein since in the former and latter instances, respectively, the stress function  $\Phi$  and its Mellin transform  $\Phi$  satisfy fourth order ordinary differential equations which are very closely related. Also, as mentioned, in [1], a further motivation for pursuing the present work was provided by TRANTER'S [2] success in using

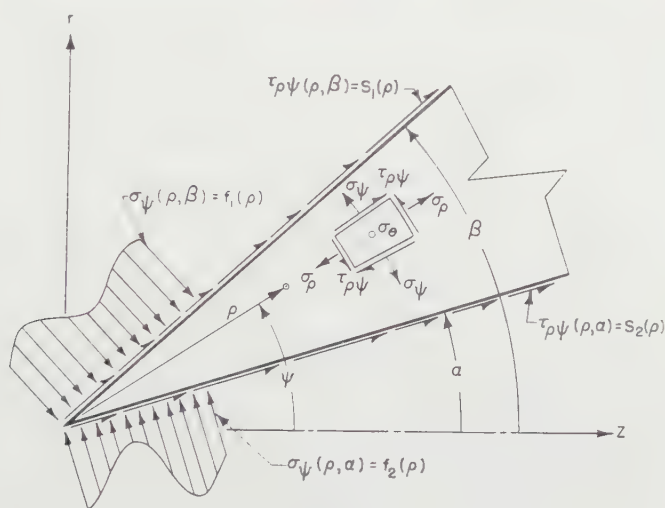


Figure 1

The semi-infinite conical shell of linearly varying thickness.

the Mellin transform for the determination of the state of stress within semi-infinite two-dimensional wedges.

The title problems are formulated in section 3 and their formal solution by use of the Mellin transform is given in section 4. The method of specializing the solutions for cases I and II so that they will be applicable to case III is discussed in section 5 and, in section 6, is applied to obtain solutions for case IIIa. The advantage of the method becomes evident in section 6, where it appears to give a more direct result than could be obtained by an extension of the methods elucidated upon by TIMOSHENKO [3, p. 333]. As an example, in section 7, theory is applied for a particular loading-type to case IIIa, the results are found to correspond to those given by TIMOSHENKO [3, p. 335].

<sup>3)</sup> Precisely speaking, normal and shear loadings proportional to an arbitrary real number power (positive or negative) of the distance from the common apex of the two co-axial bounding cones.

## 2. Notation

$a$	radius of circle over which uniform load is applied to face of semi-infinite solid;
$C_1, \dots, C_4$	constants of integration;
$c$	parameter locating path of line integral in Mellin inversion formula;
$D$	differential operator $d/d\zeta$ ;
$F_1(p), F_2(p)$	Mellin transforms of $q^3 f_1(q)$ and $q^3 f_2(q)$ respectively;
$f_1(q), f_2(q)$	normal loading (force/unit area) distributions applied to conical surfaces at $\psi = \beta$ and $\psi = \alpha$ respectively;
$H_1, \dots, H_4$	functions of $p$ and $\zeta$ defined by equations (40) to (43) respectively;
$\mathcal{I}$	integrand of integral in equation (64);
$i$	$\sqrt{-1}$ ;
$K_1, \dots, K_4$	functions of $p$ and $\zeta$ defined by equations (36) to (39) respectively;
$n$	variable ranging over positive integers: 0, 1, 2, 3, ...;
$P$	magnitude of normal loading over circle of radius $a$ on the face of semi-infinite solid, a constant;
$P_\mu(\zeta)$	Legendre function of first kind of order $\mu$ and argument $\zeta$ ;
$p$	complex parameter associated with Mellin transform;
$Q_\mu(\zeta)$	Legendre function of the second kind of order $\mu$ and argument $\zeta$ ;
$r, z, \theta$	cylindrical coordinates;
$S_1(p), S_2(p)$	Mellin transforms of $q^3 s_1(q)$ and $q^3 s_2(q)$ respectively;
$s_1(q)$	shear loading distribution applied to conical surface at $\psi = \beta$ ;
$s_2(q)$	shear loading distribution applied to conical surface at $\psi = \alpha$ ;
$\alpha$	semi-vertex angle of inner bounding conical surface;
$\beta$	semi-vertex angle of outer bounding conical surface;
$\Gamma(p)$	Gamma function of complex variable $p$ ;
$\gamma$	$p + 1$ ;
$A$	$\cos \beta$ ;
$\zeta$	$\cos \psi$ ;
$A$	$\cos \alpha$ ;
$\mu$	$p - 1$ ;
$\nu$	POISSON'S ratio;
$\varrho, \psi, \theta$	spherical coordinates;
$\sigma$	arbitrary order for Legendre function $P_\sigma(\zeta)$ ;
$\sigma_\varrho, \sigma_\psi, \sigma_\theta, \tau_{\varrho\psi}$	stresses in spherical coordinates, axial symmetry imposed;
$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$	stresses in cylindrical coordinates, axial symmetry imposed;
$\Phi(\varrho, \psi)$	stress function in spherical coordinates;
Bar over variable(s)	Mellin transform of indicated variable(s);
Letter subscripts	partial differentiation with respect to indicated letters, unless otherwise indicated by context.

### 3. Formulation of the Problem

Both of the title problems are axially symmetric. Taking spherical coordinates  $(\varrho, \psi, \theta)$  the required stress distributions are determined, under the assumptions of classical elasticity, by a stress function  $\Phi(\varrho, \psi)$  satisfying the partial differential equation [3], [4]

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cot \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)^2 \Phi = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (0 \leq \varrho \leq \infty, \quad \alpha \leq \psi \leq \beta), \end{array} \right\} \quad (1)$$

and the boundary conditions

$$\sigma_\psi = f_1(\varrho) \quad (\psi = \beta), \quad (2)$$

$$= f_2(\varrho) \quad (\psi = \alpha), \quad (3)$$

and

$$\tau_{\varrho\psi} = s_1(\varrho) \quad (\psi = \beta), \quad (4)$$

$$= s_2(\varrho) \quad (\psi = \alpha), \quad (5)$$

where  $f_1(\varrho)$ ,  $f_2(\varrho)$  are the normal stresses and  $s_1(\varrho)$ ,  $s_2(\varrho)$  the shear stresses applied to the faces of the conical 'shell' (Figure 1), all supposed given functions of  $\varrho$  and such that their Mellin transform exists. Once  $\Phi$  has been determined, the stress components in cylindrical coordinates  $(r, z, \theta)$  are given by:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right], \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right], \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (8)$$

and

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (9)$$

where  $\nu$  is POISSON'S ratio.

The stress components in spherical coordinates are then given by the transformation relations:

$$\sigma_\varrho = \sigma_r \sin^2 \psi + \tau_{rz} \sin 2\psi + \sigma_z \cos^2 \psi, \quad (10)$$

$$\sigma_\psi = \sigma_r \cos^2 \psi + \tau_{rz} \sin 2\psi + \sigma_z \sin^2 \psi, \quad (11)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta, \quad (12)$$

and

$$\tau_{\varrho\psi} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\psi + \tau_{rz} \cos 2\psi. \quad (13)$$

#### 4. Solution of the Problem

Let

$$\zeta = \cos \psi, \quad (14)$$

then equation (1) can be written as:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varrho^4} + \frac{2}{\varrho^2} \left\{ -2\zeta \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varrho^2 \partial \zeta} + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varrho^2 \partial \zeta^2} \right\} + \frac{4}{\varrho} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varrho^3} + \frac{1}{\varrho^4} \left\{ 4(3\zeta^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} - 8\zeta(1 - \zeta^2) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \zeta^3} + (1 - \zeta^2)^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \zeta^4} \right\} = 0. \quad (15)$$

Assume now that  $\Phi$  is such that

$$\varrho^{p+n} \frac{\partial^n \Phi}{\partial \varrho^n} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4), \quad \varrho^p \frac{\partial^n \Phi}{\partial \zeta^n} \quad (n = 1, \dots, 4),$$

$$\varrho^{p+1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varrho^2 \partial \zeta}, \quad \text{and} \quad \varrho^{p+1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varrho^2 \partial \zeta^2}$$

all vanish as  $\varrho \rightarrow \infty$ . Then, on denoting the Mellin transform of  $\Phi$  by  $\Phi$ , that is:

$$\Phi(p, \zeta) = \int_0^\infty \tilde{\Phi}(\varrho, \zeta) \varrho^{p-1} d\varrho, \quad (16)$$

integration by parts gives:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \varrho^2 \frac{\partial^{n+2} \Phi}{\partial \varrho^2 \partial \zeta^n} \varrho^{p-1} d\varrho &= p(p+1) \frac{d^n \Phi}{d\zeta^n}, \quad \int_0^\infty \frac{\partial^n \Phi}{\partial \zeta^n} \varrho^{p-1} d\varrho = \frac{d^n \Phi}{d\zeta^n}, \\ \int_0^\infty \varrho^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varrho^3} \varrho^{p-1} d\varrho &= -p(p+1)(p+2) \Phi, \\ \text{and} \quad \int_0^\infty \varrho^4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varrho^4} \varrho^{p-1} d\varrho &= p(p+1)(p+2)(p+3) \bar{\Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

On multiplying equation (15) by  $\varrho^{p-3}$  and integrating it with respect to  $\varrho$  from 0 to  $\infty$  the use of relations (17) gives the ordinary differential equation:

$$\left. \begin{aligned} [(\zeta^2 - 1) D^2 + 2\zeta D - (p-1)p] \\ [(\zeta^2 - 1) D^2 + 2\zeta D - (p+1)(p+2)] \Phi(\zeta; p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

where the operator notation  $D \equiv d/d\zeta$  has been used. As shown in [1], the



solution of equation (18) is given by:

$$\Phi(\zeta; p) = C_1 P_\mu(\zeta) + C_2 Q_\mu(\zeta) + C_3 P(\zeta) + C_4 Q_\gamma(\zeta), \quad (19)$$

where

$$\mu = p - 1, \quad \gamma = p + 1,$$

$P_\mu(\zeta)$  = Legendre function of the first kind of order  $\mu$  with argument  $\zeta$ ,  
and

$Q_\mu(\zeta)$  = Legendre function of the second kind of order  $\mu$  with argument  $\zeta$ .

The stress components are expressible in terms of  $\Phi$  and its partial derivatives with respect to  $\varrho$  and  $\zeta$ . The substitution of equations (6) to (9) in equations (10) to (13) and the use of the transformation (14) indicates that:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varrho = (1-\nu)\zeta \Phi_{\varrho\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} 2(2-\nu)\zeta \Phi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} 2(2-\nu)\zeta \Phi_\varrho \\ - \frac{1}{\varrho} (1-\nu)(1-\zeta^2) \Phi_{\varrho\varrho\zeta} + \frac{1}{\varrho^2} 2(1+\nu-3\zeta^2) \Phi_{\varrho\zeta} \\ + \frac{1}{\varrho^2} (2-\nu)\zeta(1-\zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta\zeta} - \frac{1}{\varrho^3} 2[1+\nu-(5-\nu)\zeta^2] \Phi_\zeta \\ - \frac{1}{\varrho^3} 2(2+\nu)\zeta(1-\zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\varrho^3} \nu(1-\zeta^2)^2 \Phi_{\zeta\zeta\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\nu = \nu\zeta \Phi_{\varrho\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} (1+2\nu)\zeta \Phi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} (1-2\nu)\zeta \Phi_\varrho \\ - \frac{1}{\varrho} (2+\nu)(1-\zeta^2) \Phi_{\varrho\varrho\zeta} + \frac{1}{\varrho^2} (1-2\nu) \Phi_{\varrho\zeta} \\ - \frac{1}{\varrho^2} (1-\nu)\zeta(1-\zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta\zeta} - \frac{1}{\varrho^3} (1-2\nu)(1+\zeta^2) \Phi_\zeta \\ - \frac{1}{\varrho^3} (3-2\nu)\zeta(1-\zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\varrho^3} (1-\nu)(1-\zeta^2)^2 \Phi_{\zeta\zeta\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta = \nu\zeta \Phi_{\varrho\varrho\varrho} - \frac{1}{\varrho} (1-2\nu)\zeta \Phi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} (1-2\nu)\zeta \Phi_\varrho \\ + \frac{1}{\varrho} \nu(1-\zeta^2) \Phi_{\varrho\varrho\zeta} - \frac{1}{\varrho^2} (1-2\nu)(1-\zeta^2) \Phi_{\varrho\zeta} \\ + \frac{1}{\varrho^2} \nu\zeta(1-\zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta\zeta} + \frac{1}{\varrho^3} (1-2\nu)(1-3\zeta^2) \Phi_\zeta \\ + \frac{1}{\varrho^3} (1-6\nu)\zeta(1-\zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\varrho^3} \nu(1-\zeta^2)^2 \Phi_{\zeta\zeta\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

and

$$\left. \begin{aligned} (1 - \zeta^2)^{-1/2} \tau_{\varrho\psi} = & -(1 - \nu) \Phi_{\varrho\varrho\varrho} - \frac{1}{\varrho} (1 - 2\nu) \Phi_{\varrho\varrho} \\ & - \frac{1}{\varrho^2} (1 - 2\nu) \Phi_{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \nu \zeta \Phi_{\varrho\varrho\zeta} - \frac{3}{\varrho^2} \zeta \Phi_{\varrho\zeta} \\ & + \frac{1}{\varrho^2} \nu (1 - \zeta^2) \Phi_{\varrho\zeta\zeta} + \frac{1}{\varrho^3} 2(1 + \nu) \zeta \Phi_{\zeta} \\ & + \frac{1}{\varrho^3} 2[2\zeta^2 - \nu(1 + \zeta^2)] \Phi_{\zeta\zeta} \\ & - \frac{1}{\varrho^3} (1 - \nu) \zeta (1 - \zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

where the subscripts on  $\Phi$  denote partial differentiation with respect to the indicated variables.

Denoting the Mellin transform by a superimposed 'bar', the following relations are obtained:

$$\left. \begin{aligned} (\overline{\varrho^3 \sigma_{\varrho}}) &= \int_0^{\infty} \varrho^3 \sigma_{\varrho} \varrho^{p-1} d\varrho, \quad (\overline{\varrho^3 \sigma})_{\psi} = \int_0^{\infty} \varrho^3 \sigma_{\psi} \varrho^{p-1} d\varrho, \\ (\varrho^3 \sigma_{\theta}) &= \int_0^{\infty} \varrho^3 \sigma_{\theta} \varrho^{p-1} d\varrho, \quad \text{and} \quad (\overline{\varrho^3 \tau_{\varrho\psi}}) = \int_0^{\infty} \varrho^3 \tau_{\varrho\psi} \varrho^{p-1} d\varrho; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

furthermore, let

$$F_n(p) = \int_0^{\infty} \varrho^3 f_n(\varrho) \varrho^{p-1} d\varrho, \quad \text{and} \quad S_n(p) = \int_0^{\infty} \varrho^3 s_n(\varrho) \varrho^{p-1} d\varrho \quad (n = 1, 2). \quad (25)$$

Then, from equations (20) to (23), the following results are obtained:

$$\left. \begin{aligned} (\overline{\varrho^3 \sigma_{\varrho}}) &= \nu (1 - \zeta^2)^2 \Phi_{\zeta\zeta\zeta} - [(2 - \nu)p + 2(2 + \nu)] \zeta (1 - \zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta} \\ &+ [6\{p + (1 - \nu)\} - \{(1 - \nu)p^2 + (7 - \nu)p + 2(5 - \nu)\}(1 - \zeta^2)] \Phi_{\zeta} \\ &- [(1 - \nu)(p + 1)(p + 2) - 2(2 - \nu)p] p \zeta \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} (\overline{\varrho^3 \sigma_{\psi}}) &= (1 - \nu) (1 - \zeta^2)^2 \bar{\Phi}_{\zeta\zeta\zeta} + [(1 - \nu)p - (3 - 2\nu)] \zeta (1 - \zeta^2) \bar{\Phi}_{\zeta\zeta} \\ &+ [(2 - \nu)p(p + 1)(1 - \zeta^2) - (1 - 2\nu)(p + 1 + \zeta^2)] \bar{\Phi}_{\zeta} \\ &+ [p - \nu(p + 1)(p + 2)] p \zeta \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} (\varrho^3 \sigma_\theta) &= \nu (1 - \zeta^2)^2 \Phi_{\zeta \zeta \zeta} + [1 - \nu (\rho + 6)] \zeta (1 - \zeta^2) \Phi_{\zeta \zeta} \\ &+ [\nu \rho (\rho + 1) (1 - \zeta^2) + (1 - 2\nu) \rho (1 - 2\zeta^2) + (1 - 2\nu) (1 - 3\zeta^2)] \Phi_{\zeta} \\ &- [\nu \rho + (1 - \nu)] \rho (\rho + 2) \zeta \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

and

$$\left. \begin{aligned} (1 - \zeta^2)^{-1/2} (\varrho^3 \tau_{\varrho\varphi}) &= -(1 - \nu) \zeta (1 - \zeta^2) \Phi_{\zeta \zeta \zeta} \\ &+ [\{4 - \nu (\rho + 2)\} \zeta^2 - \nu (\rho + 2)] \Phi_{\zeta \zeta} \\ &+ [3 \rho + 2 + \nu \{\rho (\rho + 1) + 2\}] \zeta \Phi_{\zeta} \\ &- [(\rho + 2) - 2\nu] \rho (\rho + 2) \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

where now the subscripts on the  $\Phi$  denote ordinary differentiation with respect to  $\zeta$ .

By use of equations (25) to (29), and the Legendre differential equation to express the second and higher derivatives of the functions  $P_{\mu,\gamma}(\zeta)$  and  $Q_{\mu,\gamma}(\zeta)$  in terms of these functions and their first derivatives, the boundary conditions (2) to (5) can be expressed as:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\rho) &= [K_1(\rho; A) P'_\mu(A) + K_2(\rho; A) P_\mu(A)] C_1 \\ &+ [K_1(\rho; A) Q'_\mu(A) + K_2(\rho; A) Q_\mu(A)] C_2 \\ &+ [K_3(\rho; A) P'_\gamma(A) + K_4(\rho; A) P_\gamma(A)] C_3 \\ &+ [K_3(\rho; A) Q'_\gamma(A) + K_4(\rho; A) Q_\gamma(A)] C_4, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} F_2(\rho) &= [K_1(\rho; A) P'_\mu(A) + K_2(\rho; A) P_\mu(A)] C_1 \\ &+ [K_1(\rho; A) Q'_\mu(A) + K_2(\rho; A) Q_\mu(A)] C_2 \\ &+ [K_3(\rho; A) P'_\gamma(A) + K_4(\rho; A) P_\gamma(A)] C_3 \\ &+ [K_3(\rho; A) Q'_\gamma(A) + K_4(\rho; A) Q_\gamma(A)] C_4, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 - A^2)^{1/2} S_1(\rho) &= [H_1(\rho; A) P'_\mu(A) + H_2(\rho; A) P_\mu(A)] C_1 \\ &+ [H_1(\rho; A) Q'_\mu(A) + H_2(\rho; A) Q_\mu(A)] C_2 \\ &+ [H_3(\rho; A) P'_\gamma(A) + H_4(\rho; A) P_\gamma(A)] C_3 \\ &+ [H_3(\rho; A) Q'_\gamma(A) + H_4(\rho; A) Q_\gamma(A)] C_4, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

and

$$(1 - A^2)^{1/2} S_2(p) = \left. \begin{aligned} &[H_1(p; A) P'_\mu(A) + H_2(p; A) P_\mu(A)] C_1 \\ &+ [H_1(p; A) Q'_\mu(A) + H_2(p; A) Q_\mu(A)] C_2 \\ &+ [H_3(p; A) P'_\gamma(A) + H_4(p; A) P_\gamma(A)] C_3 \\ &+ [H_3(p; A) Q'_\gamma(A) + H_4(p; A) Q_\gamma(A)] C_4, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

where

$$A = \cos \alpha, \quad (34)$$

$$A = \cos \beta, \quad (35)$$

$$K_1(p; \zeta) = (p + 1)^2 - [p(p + 1) + 1] \zeta^2, \quad (36)$$

$$K_2(p; \zeta) = -(p^2 - p - 1) p \zeta, \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} K_3(p; \zeta) = & -[p - 2(1 - \nu)][p - (1 - 2\nu)] \zeta^2 - (1 - 2\nu)(3 - 2\nu) \zeta^2 \\ & + [p - (1 - 2\nu)]^2 - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$K_4(p; \zeta) = [p^2(p + 1) - (1 - 2\nu)(p + 2)(2p + 1)] \zeta, \quad (39)$$

$$H_1(p; \zeta) = -4\nu(p + 2) \zeta^3 + p(p + 2) \zeta(1 - \zeta^2), \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} H_2(p; \zeta) = & 2\nu(p)(p - 1)(p - 2) + \nu p(p + 1)(p + 2)(1 - \zeta^2) \\ & - p(p + 2)^2(1 - \zeta^2), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$H_3(p; \zeta) = 10\nu \zeta^3 - 2\nu(2p + 1) \zeta + (p^2 + 6p + 2) \zeta(1 - \zeta^2), \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} H_4(p; \zeta) = & 2\nu(p - 2)(p + 1)(p + 2) - \nu(p + 2)(p^2 - 7p - 6) \\ & \times (1 - \zeta^2) - p(p + 2)^2(1 - \zeta^2), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

and, for instance:

$$P'_\mu(A) = \left[ \frac{dP_\mu(\zeta)}{d\zeta} \right]_{\zeta=A}. \quad (44)$$

The Mellin transform  $\Phi$  of the stress function  $\Phi$  is thus, in principle completely known since the arbitrary constants  $C_1, \dots, C_4$  can be determined by use of equations (30) to (33). Once this is done the stress function  $\Phi$  is determined by use of MELLIN's inversion formula [5]:

$$\Phi(p, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\Phi}(p; \zeta) \varrho^{-p} dp. \quad (45)$$

Since more interest, however, is attached to the stress components themselves, a further application of MELLIN'S inversion formula yields the following expressions:

$$\begin{aligned} \varrho^3 \sigma_\varrho &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\overline{\varrho^3 \sigma_\varrho}) \varrho^{-p} dp, & \varrho^3 \sigma_\psi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\overline{\varrho^3 \sigma_\psi}) \varrho^{-p} dp, \\ \varrho^3 \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\overline{\varrho^3 \sigma_\theta}) \varrho^{-p} dp, & \text{and} & \quad \varrho^3 \tau_{\varrho\psi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\overline{\varrho^3 \tau_{\varrho\psi}}) \varrho^{-p} dp, \end{aligned} \quad (46)$$

where it is understood the barred quantities in equations (46) are to be replaced by their corresponding expressions from equations (26) to (29). This completes the formal solution of the problem.

### 5. The Stress Distributions Within Semi-Infinite Cones

On a cone only the two quantities  $\sigma_\psi = f_1(\varrho)$  and  $\tau_{\varrho\psi} = s_1(\varrho)$  can be prescribed on its surface. The general solution (19) has four constants of integration, two of which must then be disposed of. To do this note [6] that the functions  $P_{\mu,\nu}(\zeta)$  and their derivatives are regular while, on the other hand, the functions  $Q_{\mu,\nu}(\zeta)$  and their derivatives are singular at  $\zeta = 1$  ( $\psi = 0$ ). Thus, the physically reasonable 'over-all' restriction that the stresses must remain finite on the cone's axis ( $\zeta = 1$ ) can only be realized by setting  $C_2 = C_4 = 0$  in equation (19)<sup>4</sup>. The applicable boundary conditions are then given by equations (30) and (32).

### 6. Stress Distributions Within Semi-Infinite Solids Subjected to Mellin Transformable Axially Symmetric Loadings

In this case the cone's semi-vertex angle  $\beta$  is taken to be  $\pi/2$ . As indicated in section 5 the Mellin transform of the stress function must be given by:

$$\Phi(\zeta; p) = C_1 P_\mu(\zeta) + C_3 P_\nu P(\zeta). \quad (47)$$

It is simpler to work with the stress components  $\sigma_z$  and  $\tau_{rz}$ , when expressed in terms of the spherical coordinates  $(\varrho, \zeta = \cos \psi)$ . The expressions for  $\sigma_z(\varrho, \zeta)$  and  $\tau_{rz}(\varrho, \zeta)$  are obtained by applying the following transformation operators

$$\frac{\partial}{\partial z} = \zeta \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} (1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

to equations (8) and (9). On taking the Mellin transform of  $\varrho^3 \sigma_z(\varrho, \zeta)$  and

<sup>4</sup>) However, some initial stress situations would be amenable to analysis by adopting the opposite point of view and setting  $C_1 = C_3 = 0$ .

$\varrho^3 \tau_{rz}(\varrho, \zeta)$  in the manner indicated by equations (24) and using the relations (17), it is possible to write

$$\left. \begin{aligned} & \varrho^3 \sigma_z(\zeta; p) \\ & - (2 - \nu) \left[ - \zeta (p - 1) p (p + 2) \Phi \right. \\ & \quad \left. - \{ (1 - \zeta^2) (p - 2) (p + 1) - 2 \zeta^2 (p - 2) \} \Phi_{\zeta} \right. \\ & \quad \left. - \zeta (1 - \zeta^2) (p + 6) \Phi_{\zeta\zeta} - (1 - \zeta^2)^2 \Phi_{\zeta\zeta\zeta} \right] \\ & + [\zeta^2 (p + 1) - 3 (1 - \zeta^2)] \zeta p (p + 2) \Phi \\ & - 3 (1 - \zeta^2) [\zeta^2 (p + 2)^2 - (1 - \zeta^2) (p + 1)] \Phi_{\zeta} \\ & + 3 \zeta (1 - \zeta^2)^2 (p + 3) \Phi_{\zeta\zeta} - (1 - \zeta^2)^3 \Phi_{\zeta\zeta\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

and

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\sin \psi} \overline{\varrho^3 \tau_{rz}(\zeta; p)} \\ & = (1 - \nu) \left[ - (p - 1) p (p + 2) \Phi - 2 \zeta (p^2 - p - 3) \Phi_{\zeta} \right. \\ & \quad \left[ - \{ (1 - \zeta^2) (p + 2) - 4 \zeta^2 \} \Phi_{\zeta\zeta} - \zeta (1 - \zeta^2) \Phi_{\zeta\zeta\zeta} \right] \\ & \quad [(1 - \zeta^2) - \zeta^2 (p + 3)] p (p + 2) \Phi \\ & - \zeta [(1 - \zeta^2) \{ 2 p (p + 5) + 9 \} - \zeta^2 (p + 2) (p + 3)] \Phi_{\zeta} \\ & + (1 - \zeta^2) [(1 - \zeta^2) (p + 2) - \zeta^2 (2 p + 7)] \Phi_{\zeta\zeta} + \zeta (1 - \zeta^2)^2 \Phi_{\zeta\zeta\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Now, equations (47) to (49) when evaluated at  $\zeta = \cos \psi = 0$  ( $\psi = \pi/2$ ) the face of the semi-infinite solid, will yield the two required boundary conditions:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\varrho^3 \sigma_z(0; p)} &= [2 \nu (2 p + 1) + p^2] C_3 \frac{dP_\gamma}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} + (p + 1)^2 C_1 \frac{dP_\mu}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} \\ &- (2 p + 1) C_3 \frac{dP_\gamma}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = F_1(p), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

and

$$\varrho^3 \tau_{rz}(0; p) = [2 \nu (2 p + 1) + p^2] C_3 P_\gamma(0) + p^2 C_1 P_\mu(0) - S_1(p), \quad (51)$$

where  $F_1(p)$  and  $S_1(p)$  are as defined by equation (25). The values of a Legendre function  $P_\sigma(\zeta)$  and its first derivative at  $\zeta = 0$  can be expressed as [5, p. 63] or [6, p. 144]:

$$P_\sigma(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma[(2 + \sigma)/2] \Gamma[(1 - \sigma)/2]}, \quad (52)$$



and

$$\left. \frac{dP_\sigma(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\Gamma[(1+\sigma)/2] \Gamma[-\sigma/2]}, \quad (53)$$

where  $\sigma$  can be either a real or complex quantity. On substituting equations (52) and (53) in equations (50) and (51) (remembering that in one case  $\sigma = \mu - p - 1$  and in the other  $\sigma = p - 1$ ) and using the property of the Gamma function  $\Gamma(1 - \sigma) = \sigma \Gamma(\sigma)$ , the two boundary conditions can be written as:

$$\left. \begin{aligned} [2\nu(2p+1) + p^2] C_3 - p(p+1) C_1 - (2p+1) C_3 \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p}{p+1} \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) F_1(p), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

and

$$\left. \begin{aligned} [2\nu(2p-1) - p^2] C_3 - p(p-1) C_1 \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (p+1) \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2}\right) S_1(p). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

The constants  $C_1$  and  $C_3$ , parametrically dependent on  $p$ , can now be determined from equations (54) and (55); they are given by the expressions:

$$\left. \begin{aligned} C_3 = -\frac{1}{2(p-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ \times \left[ \frac{p}{p-1} \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) F_1(p) - (p-1) \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2}\right) S_1(p) \right], \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

and, in terms of  $C_3$ ,

$$C_1 = \frac{1}{p(p-1)} [2\nu(2p-1) - p^2] C_3 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2}\right) S_1(p). \quad (57)$$

Thus, the constants  $C_1$  and  $C_3$  have been determined for the case where (arbitrary) Mellin transformable axially symmetric normal and shear loadings are applied to the face of the semi-infinite solid.

Focusing attention on the stress  $\sigma_z$  at the symmetry axis ( $\psi = 0$  or  $\zeta = \cos\psi = 1$ ) of the external loadings and within the semi-infinite solid, equations (47) and (48), with the aid of the relations

$$P_\sigma(1) = 1,$$

and

$$\left. \frac{dP_\sigma(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = \frac{1}{2} \sigma(\sigma+1),$$

yield the following expression for  $\overline{\varrho^3 \sigma_z(1; p)}$ :

$$\overline{\varrho^3 \sigma_z(1; p)} = - (p+2) \left[ \{ 2\nu(2p+1) + p^2 \} C_3 - p(p+1) C_1 \right] + (p+2)(p+4)(2p+1) C_3. \quad (58)$$

By equations (55) and (56), equation (58) can finally be written as:

$$\varrho^3 \sigma_z(1; p) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{(p+2)(p+4)}{(p-1)} p \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) F_1(p) - (p+1)(p+2)(p-3) \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2}\right) S_1(p) \right]. \quad (59)$$

The stress  $\sigma_z(\varrho, \zeta = \cos\psi)$  on the axis ( $\psi = 0$ ) is then given by applying the Mellin inversion formula to equation (59), that is:

$$\varrho^3 \sigma_z(\varrho, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\varrho^3 \sigma_z(1; p)} \varrho^{-p} dp, \quad (60)$$

where  $\varrho^3 \sigma_z(1; p)$  is given by equation (59).

Thus, equations (59) and (60) give a general relation connecting  $\sigma_z(\varrho, 1)$  with the arbitrary external loadings, which are characterized by  $F_1(p)$  and  $S_1(p)$ . Of course, as previously mentioned, the external loadings are arbitrary to the extent that their Mellin transform exists. In the following section equations (59) and (60) are used to determine  $\sigma_z(\varrho, 1)$  in a particular case.

### 7. Example: Semi-Infinite Solid

#### Subjected to a Uniform Normal Loading Applied Over a Circular Area

In this case, equations (2) and (4) specialize to:

$$f_1(\varrho) = \begin{cases} P, & 0 \leq \varrho \leq a, \\ 0, & a \leq \varrho \leq \infty, \end{cases} \quad (61)$$

and

$$S_1(\varrho) = 0, \quad 0 \leq \varrho \leq \infty, \quad (62)$$

where  $a$  is the radius of the circle over which the uniform load per unit area  $P$  is applied. The quantities  $F_1(p)$  and  $S_1(p)$  are determined by equation (25) that is:

$$F_1(p) = \frac{P a^{p+3}}{p+3} \quad \text{and} \quad S_1(p) = 0. \quad (63)$$

Hence, on using the results (63) in equations (59) and (60),

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{q}{a}\right)^3 \sigma_z(q, 1) = -\frac{P}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)} p^{\frac{1}{2}} \\ \times \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \left(\frac{q}{a}\right)^{-p} dp. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

The line integral in equation (64), taken in the complex  $p$ -plane, can be evaluated by application of CAUCHY'S theorem of residues. The only singularities of the Gamma function  $\Gamma(z)$  are simple poles at the points  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Since [7, p. 207]

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) = \Psi\left(\frac{p}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (p+2n)}, \quad (65)$$

where  $\Psi(p/2)$  is an integral function, it is seen that the singularities of  $\Gamma(p/2)$  at  $p = 0, -2$ , and  $-4$  in the integrand  $\mathcal{F}$  of equation (64) are only apparent and, therefore, removable. Thus,  $\mathcal{F}$  has simple poles at  $p = -1, -3, -(2n+6)$ , and  $(2n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . For  $-3 < c < -1$  and  $q/a < 1$ , the line integral of  $\mathcal{F}$  taken over a path composed of a circular arc of radius  $R$  to the left of (and including) the vertical line with end points at  $c - iR$  and  $c + iR$  will vanish on the circular arc as  $R \rightarrow \infty$ . Therefore, the sum of the residues of  $\mathcal{F}$  at the points  $p = -3$  and  $-(2n+6)$ , gives:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{F} dp = -2\sqrt{\pi} \left(\frac{q}{a}\right)^3 \left[1 - \frac{(q/a)^3}{\{1 + (q/a)^2\}^{3/2}}\right], \quad \frac{q}{a} < 1. \quad (66)$$

The same expression will be obtained for  $q/a > 1$  by evaluating the line integral of  $\mathcal{F}$  over a path composed of a circular arc to the right of (and including) the vertical line with end points  $c - iR$  and  $c + iR$  and letting  $R \rightarrow \infty$ . On substituting equation (66) in equation (64) one finally obtains:

$$\sigma_z(q, 1) = -P \left[ -1 + \frac{q^3}{(a^2 + q^2)^{3/2}} \right] \quad (67)$$

which, except for a change in the sign of  $P$  due to the difference in the direction of the applied load, is exactly the same expression obtained by TIMOSHENKO [3, p. 335] on using an entirely different method.

## 8. Discussion and Conjectures

It has been shown that by use of the Mellin transform, it is possible to determine the stress distributions within conical 'shells' of linearly varying

thickness, cones, and semi-infinite solids under quite general conditions of surface loading. Once the stress distributions within the aforementioned solids are known, it is of course possible to determine the corresponding displacements by use of the stress-strain relationships [4]. The generality of the method of solution is evidenced by the number of cases (see section 1) which can be subsumed thereunder.

Attention should be directed to the fact that all of the solids considered are semi-infinite in extent so that boundary conditions need not be specified at the surfaces produced by cutting these solids by a plane perpendicular to their axes of symmetry or by a spherical surface centered at the origin. Such surfaces will, for convenience, be called 'cross-wise'. The solids obtained as indicated above would be the 'finite' counterparts of those considered in this paper. To determine the stress distributions within such finite cones or 'shells' additional axially-symmetric boundary conditions, in static equilibrium with those specified on the bounding cones, would have to be given at the 'cross-wise' surfaces. It may be possible to obtain solutions for such 'finite' problems by using superposition methods. That is, the stress function would be decomposed into two terms:  $\Phi_1$  (corresponding to the solutions given in this paper) satisfying the boundary conditions imposed on the conical surfaces, and  $\Phi_2$  a correction term which satisfies homogeneous boundary conditions at the conical surfaces and the boundary conditions at the cross-wise surface of the finite conical solid. The stress function  $\Phi_2$  may in some cases be obtained by superposing an infinite number of 'eigen' functions determined by use of the solutions (16) of [1] or, possibly, by a variational method similar to that used by SILVERMAN [8] in working with the analogous two-dimensional finite wedge problems. However, an objective evaluation of the above-suggested methods must await further detailed analytical investigations.

A problem of technical importance to which the theory developed in this paper might be applied is that of the determination of the state of stress within conical pivots. Related to this problem are the stress concentrations produced by applied loads over the faces of conical depressions in semi-infinite solids (case IIIb, section 1). In this instance, a limiting situation is that of the stresses concentrations produced in an infinite solid by loadings over the surface of a conical exclusion (case IIIc, section 1). Such investigations might find applications in determinations of the stress distribution within the material surrounding conical pivot-seats or certain types of lubrication passages within machine elements.

## 9. Acknowledgments

The author is indebted to Dr. Y. T. Wu, at the California Institute of Technology, for having generously given of his time in the discussion of certain aspects of the problems considered in this paper.

## REFERENCES

- 1 A. J. A. MORGAN, *Stress Distributions in Semi-Infinite Solids of Revolution*, ZAMP 5, No. 4, 330-341 (1954).
- 2 C. J. TRANIER, *The Use of the Mellin Transform in Finding the Stress Distribution in an Infinite Wedge*, Quart. J. Mech. appl. Math. 1, Part 2, 125-130 (1948).
- [3] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Co., Inc., New York 1934).
- 4 A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth revised edition (Dover Publications, New York 1944), pp. 274-276.
- 5 W. MAGNUS and F. OBERHETTINGER, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics* (Chelsea Publishing Co., New York 1954).
- 6 A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, and F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology 1 (McGraw-Hill Book Co., Inc., New York 1953).
- 7 E. T. COPSON, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford University Press, London 1946).
- [8] I. K. SILVERMAN, *Approximate Stress Functions for Triangular Wedges*, J. appl. Mech. 22, No. 1, 123-128 (1955).

## Résumé

L'intégrale Mellin de transformation est utilisée pour obtenir une solution du problème de distribution des tensions dans les solides délimités par un ou deux cônes et dans des conditions tout à fait générales comme, par exemple, en cas de tension continue mais sporadique. Pour certaines limites des demi-sommets des angles des cônes, ces solides, tous d'épaisseur à variation linéaire et semi-infinis, peuvent être classés *descriptivement* comme suit:

I° plaques circulaires, II° enveloppes coniques et III° cônes solides. Dans le troisième cas, il y a lieu de subdiviser en a) solides semi-infinis, b) solides semi-infinis à dépression conique et c) solides semi-infinis, à exclusion conique. A titre d'exemple, dans le troisième cas, où une tension normale est appliquée uniformément à une surface circulaire, la solution est détaillée ici et il est prouvé qu'elle est vérifiée par d'autres résultats déjà connus.

(Received: May 9, 1955.)

# Sur l'intégration approchée d'équations du type parabolique

Par CHARLES BLANC, Lausanne<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

Le but de ce travail est l'étude au point de vue stochastique de l'erreur commise dans l'intégration approchée d'équations du type parabolique; la méthode mise en œuvre est celle qui a été utilisée pour des problèmes semblables<sup>2)</sup>.

Pour ne pas alourdir inutilement les calculs, on supposera que l'équation a la forme

$$L X \equiv \frac{\partial X}{\partial t} - q \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (1.1)$$

et que l'on se propose de déterminer d'une façon approchée une intégrale satisfaisant à une condition initiale

$$X(x, 0) = G(x); \quad (1.2)$$

les méthodes approchées seront des méthodes de différences finies. On se limitera du reste à l'étude de l'erreur sur un pas à partir de valeurs supposées exactes.

## 2. Méthode du petit opérateur

Désignons par  $X(x, t)$  une solution exacte du problème constitué par (1.1) et (1.2)<sup>3)</sup>; nous cherchons une valeur (approchée)  $X^0$  de cette solution, pour  $t = k$  ( $> 0$ ), cette valeur étant calculée à partir de valeurs de  $G(x)$  pour  $t = 0$ ; pour cela, nous commençons par le procédé le plus simple, qui consiste à remplacer dans l'opérateur  $L$  de (1.1) les dérivées par des quotients de différences; nous choisissons

$$\begin{aligned} L^0 X &= \frac{1}{k} [X(x, t) - X(x, t - k)] \\ &\quad - \frac{q}{h^2} [X(x + h, t - k) - 2X(x, t - k) + X(x - h, t - k)] \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Institut de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. Etude subventionnée en partie par le Fonds national de la recherche scientifique. M. W. LINIGER, math. dipl., a contribué dans une importante mesure à l'élaboration de ce travail et aux calculs numériques.

<sup>2)</sup> Voir CH. BLANC, *Etude stochastique de l'erreur dans un calcul numérique approché*, Comment. math. helvet. 26, 225–241 (1952); *Sur les formules d'intégration approchée d'équations différentielles*, Arch. Math. 5, 301–308 (1954).

Voir également: CH. BLANC und W. LINIGER, *Stochastische Fehlerauswertung bei numerischen Methoden*, Z. angew. Meth. Mech. 35, 121–130 (1955).

<sup>3)</sup> Il n'importe pas, dans ce qui suit, que les données initiales soient relatives à toute valeur de  $x$ , ou seulement à un intervalle  $(a, b)$ , avec conditions pour  $x = a$  et  $x = b$ ,  $t > 0$ . On suppose simplement que les données sont telles que le problème a au moins une solution, et que les valeurs considérées de  $(x, t)$  sont dans le domaine de définition de cette solution.



soit

$$L^0 X = \frac{1}{h} [X(x, t) - p X(x - h, t - k) + (2p - 1) X(x, t - k) - p X(x + h, t - k)]$$

(2.1)

avec

$$p = \frac{q k}{h^2};$$

la solution approchée satisfait à la relation

$$L^0 X^0 = F$$

(2.2)

avec

$$X^0(x, 0) = G(x),$$

d'où une erreur (*erreur de méthode*, car nous négligerons ici celles qui résultent de l'abandon de décimales)

$$Y = X^0 - X$$

(2.3)

avec

$$L^0 Y = (L - L^0) X \text{ pour } t = k, \quad Y = 0 \text{ pour } t = 0.$$

(2.4)

Considérons maintenant  $X(x, t)$  comme une fonction aléatoire, stationnaire d'ordre deux; supposons de plus que

$$E X(x, t) = 0$$

et que le spectre  $s(\alpha, \beta)$  de  $X(x, t)$  est de la forme

$$s(\alpha, \beta) = s_1(\alpha) s_2(\beta)$$

(2.5)

(cette hypothèse a pour unique but de simplifier les calculs numériques qui suivront; elle n'est pas nécessaire pour une étude générale); en d'autres termes, on a

$$\left. \begin{aligned} E X(x_1, t_1) X(x_2, t_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} s_1(\alpha) s_2(\beta) e^{i[(x_1 - x_2)\alpha + (t_1 - t_2)\beta]} d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\alpha) e^{i(x_1 - x_2)\alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\beta) e^{i(t_1 - t_2)\beta} d\beta; \end{aligned} \right\}$$

(2.6)

comme  $X$  est aléatoire,  $F, G, X^0$  et  $Y$  le sont aussi; puisque  $X^0$  est une combinaison linéaire de valeurs de  $X$ , on a  $EX^0 = 0$ , d'où, par (2.3),  $EY = 0$ .

Soient maintenant deux points  $P(x_1, t_1)$  et  $Q(x_2, t_2)$ ; posons

$$u(P, Q) = E Y(P) Y(Q);$$

*l'étude stochastique de l'erreur consiste en premier lieu (et nous nous bornerons à cela) à déterminer la variance de l'erreur, donc cette fonction  $u$  pour  $P = Q$ ; or on a*

$$L_P^0 L_Q^0 u(P, Q) = (L^0 - L)_P (L^0 - L)_Q E X(P) X(Q)^4$$

(2.7)

avec

$$u(P, Q) = 0$$

(2.8)

si  $P$  ou  $Q$  sont sur  $t = 0$ .

<sup>4</sup> Nous supposons pour cela que les opérateurs  $L$  et  $E$  sont permutables, ce qui implique certaines conditions de régularité pour  $s_1$  et  $s_2$ , conditions remplies par les fonctions qui seront choisies plus loin.

Posons encore

$$w(P, Q) = (L^0 - L)_P (L^0 - L)_Q E X(P) X(Q), \quad (2.9)$$

d'où

$$L_P^0 L_Q^0 u(P, Q) = w(P, Q); \quad (2.10)$$

remarquons que si une fonction  $z(P)$  est nulle pour  $t = 0$ , l'équation  $L^0 z = w$  a la solution  $z = k w$  pour  $t = k$ ; il en résulte immédiatement que l'on a

$$u(P, P) = k^2 w(P, P) \quad (2.11)$$

si  $t = k$  au point  $P$ .

Calculons alors  $w(P, Q)$ ; par (2.9), on a

$$w(P, Q) = \iint_{\sim} s_1(\alpha) s_2(\beta) (L^0 - L)_P e^{i(x_1 \alpha + t_1 \beta)} (L^0 - L)_Q e^{-i(x_2 \alpha + t_2 \beta)} d\alpha d\beta;$$

posons

$$1 - e^{-i k \beta} (p e^{i h \alpha} + p e^{-i h \alpha} + 1 - 2 p) - p h^2 \alpha^2 - i k \beta = \varphi(\alpha, \beta); \quad (2.12)$$

alors

$$(L^0 - L)_P e^{i(x_1 \alpha + t_1 \beta)} = \frac{1}{k} e^{i(x_1 \alpha + t_1 \beta)} \varphi(\alpha, \beta),$$

$$(L^0 - L)_Q e^{-i(x_2 \alpha + t_2 \beta)} = \frac{1}{k} e^{-i(x_2 \alpha + t_2 \beta)} \bar{\varphi}(\alpha, \beta),$$

donc, si  $x_2 - x_1 = m h$ ,  $t_2 - t_1 = n k$ ,

$$w(P, Q) = \frac{1}{k^2} \iint_{\sim} s_1(\alpha) s_2(\beta) e^{i(m h \alpha + n k \beta)} |\varphi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta,$$

et, si  $P = Q$ ,

$$w(P, P) = \frac{1}{k^2} \iint_{-\infty}^{\infty} s_1(\alpha) s_2(\beta) |\varphi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta, \quad (2.13)$$

donc, par (2.11) et (2.13),

$$E Y^2(x, k) = \iint_{-\infty}^{\infty} s_1(\alpha) s_2(\beta) |\varphi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta. \quad (2.14)$$

Choisissons maintenant le spectre particulier<sup>5)</sup>

$$s_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2 \omega_1} & \text{pour } |\alpha| \leq \omega_1, \\ 0 & \text{pour } |\alpha| > \omega_1, \end{cases} \quad s_2(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2 \omega_2} & \text{pour } |\beta| \leq \omega_2, \\ 0 & \text{pour } |\beta| > \omega_2. \end{cases}$$

<sup>5)</sup> Ce choix conduit évidemment aux calculs les plus simples possibles; il a en outre l'avantage de correspondre à l'hypothèse que fait en général le calculateur, à savoir que des variations très rapides de la solution sont très improbables. On pourrait poursuivre les calculs avec un autre choix pour le spectre, mais l'information que l'on retire dans ce cas est déjà suffisante pour une comparaison des diverses méthodes.

On a alors simplement

$$E\,Y^2(x, k) = \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_0^{\omega_1} d\alpha \int_0^{\omega_2} |\varphi(\alpha, \beta)|^2 d\beta \tag{2.15}$$

(en tenant compte du fait que la fonction  $\varphi$  est paire dans les deux variables).  
Nous reviendrons sur la mise en œuvre de cette formule.

**3. Emploi d'un grand opérateur**

On peut évidemment substituer aux dérivées des opérateurs aux différences plus fins que ceux qui ont été considérés au § 2; cela conduit à tenir compte d'un plus grand nombre de valeurs de la fonction (d'où l'expression de «grand» opérateur). Il est utile de rechercher dans quelle mesure la solution ainsi obtenue est meilleure que celle que donne le «petit» opérateur.

Choisissons par exemple l'opérateur défini par

$$L^0 X = \frac{1}{k} \left[ \frac{3}{2} X(x, t) - 2(p-1) X(x, t-k) - p X(x-h, t-k) \right. \\ \left. - p X(x+h, t-k) + \frac{1}{2} X(x, t-2k) \right] \tag{3.1}$$

qui suppose donc connue la solution exacte sur les *deux* lignes  $t-k$  et  $t-2k$ . Les considérations précédentes s'appliquent presque sans modification. On a ici, à la place de (2.11),

$$u(P, P) = \frac{4k^2}{9} w(P, P), \tag{3.2}$$

puis, en posant

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{3}{2} - e^{-ik\beta} (p e^{ih\alpha} + p e^{-ih\alpha} + 2 - 2p) + \frac{1}{2} e^{-2ik\beta} - p h^2 \alpha^2 - i k \beta, \tag{3.3}$$

il vient

$$w(P, P) = \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\alpha) s_2(\beta) |\varphi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta \tag{3.4}$$

puis  $E\,Y^2(x, k)$ .

**4. Méthode plurilocale**

Considérons maintenant un procédé plurilocal<sup>6)</sup>; remplaçons l'équation (1.1) par

$$S^0 X^0 = T^0 F \tag{4.1}$$

avec

$$S^0 X = \frac{5}{2} X(x, t) - (3p + \varepsilon) [X(x-h, t-k) + X(x+h, t-k)] \\ + 2(3p - 1 + \varepsilon) X(x, t-k) - \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right) X(x, t-2k) \\ + \varepsilon [X(x-h, t-2k) + X(x+h, t-2k)] \tag{4.2}$$

<sup>6)</sup> Mehrstellenverfahren; voir L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* Springer-Verlag, Berlin 1951), p. 235 et suiv.

et

$$\left. \begin{aligned} T^0 F = F(x, t) - (\varepsilon - p) [F(x - h, t - k) + F(x + h, t - k)] \\ - 2(p - 1 - \varepsilon) F(x, t - k), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$\varepsilon$  étant un paramètre qui peut être choisi arbitrairement; la solution approchée  $X^0$  introduit une erreur  $Y = X^0 - X$ ; ici, pour la ligne calculée,

$$S^0 Y = (T^0 L - S^0) X, \quad (4.4)$$

$Y$  étant nulle sur les lignes où  $X$  est connu exactement (lignes de départ).

Ici, nous poserons

$$w(P, Q) = (T^0 L - S^0)_P (T^0 L - S^0)_Q E X(P) X(Q), \quad (4.5)$$

et

$$u(P, Q) = E Y(P) Y(Q);$$

on a alors

$$S_P^0 S_Q^0 u(P, Q) = w(P, Q); \quad (4.6)$$

pour la première ligne de calcul (en supposant donc exactes les valeurs de départ). On a simplement

$$u(P, P) = \frac{4k^2}{25} w(P, P); \quad (4.7)$$

on a ici encore

$$w(P, P) = \frac{1}{k^2} \int_{\tilde{\alpha}}^{\infty} s_1(\alpha) s_2(\beta) |\varphi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta \quad (4.8)$$

mais avec (si  $\varepsilon = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta) = \frac{5}{2} - p h^2 \alpha - i k \beta \\ + 2[3p(1 - \cosh \alpha) - 1 + (p h^2 \alpha^2 + i k \beta)(p - p \cosh \alpha - 2)] e^{-i k \beta} \\ - \frac{1}{2} e^{-2i k \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

## 5. Résultats numériques

La mise en œuvre des formules développées ici permet de répondre à quelques questions d'intérêt pratique. Considérons par exemple la question suivante: *une équation étant donnée, avec des conditions initiales fixant la solution, quelle est l'influence du choix de la méthode, ainsi que de  $h$  et  $k$ , sur la précision du résultat*. Nous pouvons pour cela fixer  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ce qui ne restreint pas la généralité (puisque cela ne fait qu'impliquer un choix d'unités pour  $x$  et  $t$ ). Faisons également (ce qui est restrictif)  $q = 1$ ; on verrait que l'allure générale des résultats reste la même pour d'autres valeurs de ce paramètre. Cela étant, on calcule  $u(P, P)$  pour chacune des trois méthodes, pour  $h = 0,0$  (0,2) 1,0,  $k = 0,2$  (0,2) 1,0. Remarquons en passant que la valeur  $h = 0$  correspond en fait à un cas limite, obtenu en faisant tendre vers zéro le pas selon  $O x$ . On obtient ainsi les valeurs reportées sur les tableaux ci-dessous.

Valeurs de  $\sqrt{u} \cdot 10^4$ 

$h$	$k = 0,2$	0,4	0,6	0,8	1,0
I. Petit opérateur					
0,0	135	534	1184	2071	3176
0,2	134	532	1181	2067	3168
0,4	132	527	1173	2055	3155
0,6	130	520	1161	2036	3130
0,8	128	512	1145	2011	3095
1,0	128	503	1126	1942	3044
II. Grand opérateur					
0,0	64	241	511	861	1291
0,2	64	241	510	860	1286
0,4	64	240	508	855	1282
0,6	65	239	505	850	1273
0,8	67	240	503	843	1261
1,0	72	243	502	838	1248
III. Méthode plurilocale					
0,0	56	231	538	986	1584
0,2	53	224	526	969	1561
0,4	44	208	501	935	1516
0,6	31	178	458	861	1433
0,8	12	138	393	783	1318
1,0	34	88	313	639	1174

Ces tableaux montrent tout d'abord que la précision des résultats est plus grande avec les méthodes II et III qu'avec I; ce fait pouvait être prévu qualitativement; par contre, on remarque aussi, et c'est plus inattendu, que l'erreur (au sens où nous la considérons ici) ne diminue pas nécessairement lorsque  $h$  diminue; au contraire, si  $h \rightarrow 0$ , et cela surtout dans la méthode plurilocale, cette erreur augmente sensiblement; on voit ainsi que si l'on veut accroître la précision des calculs (pour une méthode donnée), il faut, ayant choisi  $k$ , choisir judicieusement la valeur de  $h$ . D'autre part, la précision augmente évidemment si  $h$  diminue, à vrai dire pas dans une mesure aussi grande que semblent l'indiquer les résultats ci-dessus; en effet, en diminuant  $h$  de moitié (par exemple), on double le nombre de pas nécessaires pour atteindre une valeur donnée de  $t$ ; l'étude de l'erreur pour une valeur donnée de  $t$  ( $> 0$ ), en fonction de  $h$  et  $k$ , exige l'étude de l'erreur commise sur plusieurs pas de calcul; cette question sera abordée dans un autre travail.

## Zusammenfassung

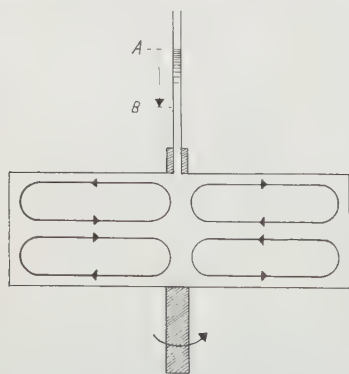
Es wird in dieser Arbeit die stochastische Methode der Fehlerauswertung auf Näherungslösungen durch Differenzenmethoden für die Wärmeleitungsgleichung behandelt. Die Methode erlaubt die Genauigkeit der verschiedenen Differenzenmethoden zu vergleichen sowie den Einfluss der Schrittlängen in den beiden Variablen abzuschätzen.

(Reçu: le 27 septembre 1955.)

## Über den Druck in Ultrazentrifugen

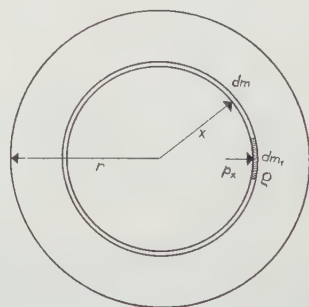
VON HEINRICH GREINACHER, Bern<sup>1)</sup>

Die Druckverhältnisse lassen sich am einfachsten an einem mit Flüssigkeit gefüllten Hohlzylinder übersehen. Wird ein solcher in Rotation versetzt, so entstehen durch Wandreibung und innere Reibung der Flüssigkeit die in Figur 1 angedeuteten Strömungen, die übrigens infolge der Coriolis-Kräfte nicht, wie gezeichnet, in radialer Ebene verlaufen, sondern aus ihr heraustreten. Sie haben bekanntlich ihre Anwendung in der hydraulischen Kupplung gefunden. In dem Masse, wie die Flüssigkeit allmählich in Mitrotation versetzt wird, nehmen diese Strömungen ab und müssten im Idealfall verschwinden. Das heisst die Flüssigkeit würde in allen Teilen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Hohlzylinders rotieren.



Figur 1

Strömung und Kompression in rotierender Flüssigkeit.



Figur 2

Berechnung des Druckes in rotierenden Flüssigkeiten und Gasen.

In diesem Falle lässt sich der durch die Zentrifugalkräfte bewirkte Flüssigkeitsdruck angeben.

Bezeichnen wir den Druck im Abstand  $x$  von der Achse mit  $p_x$  (Figur 2), so haben wir für seine Zunahme auf der Strecke  $dx$

$$dp_x = dm_1 \omega^2 x,$$

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität.



wo  $dm_1$  das Massenelement der Flächeneinheit bedeutet. Da  $dm_1 = \varrho \, dx$  ( $\varrho$  = Dichte), so ist

$$d p_x = \varrho \, \omega^2 \, x \, dx \quad (1)$$

und daher

$$p_x = \frac{\varrho \, \omega^2}{2} \, x^2. \quad (2)$$

Für den Wanddruck erhält man entsprechend

$$p_r = \frac{\varrho \, \omega^2}{2} \, r^2. \quad (3)$$

Dieser Wanddruck entspricht übrigens durchaus nicht etwa der gesamten, der Flüssigkeit innewohnenden Zentrifugalkraft, bezogen auf die Flächeneinheit der Wandung. Hierfür ergibt sich der kleinere Wert  $\varrho \, \omega^2 \, r^2/3$ .

Die Kenntnis der Druckverteilung kann nun offenbar dazu benützt werden, um die Kompression der Flüssigkeit zu berechnen. Insoweit eine lineare Abhängigkeit der Dichte vom Druck angenommen werden darf, das heisst unter Ansetzung von

$$\varrho = \varrho_0 (1 + k \, p_x) \quad (4)$$

( $\varrho_0$  = Dichte bei Atmosphärendruck,  $k$  = Kompressibilitätskoeffizient), haben wir zunächst

$$\varrho = \varrho_0 \left( 1 + k \, \frac{\varrho \, \omega^2}{2} \, x^2 \right).$$

Die im Zylinder enthaltene Masse  $m$  ergibt sich aus

$$dm = 2 \, \pi \, x \, h \, dx \, \varrho$$

( $dm$  = Masse in einem Hohlzylinder der Dicke  $dx$  und der Länge  $h$ ) zu

$$m = 2 \, \pi \, h \int_0^r \varrho \, x \, dx,$$

das heisst

$$m = 2 \, \pi \, h \, \varrho_0 \int_0^r x \, dx \left( 1 + k \, \frac{\varrho \, \omega^2}{2} \, x^2 \right). \quad (5)$$

Indem man im Klammerausdruck unter Vernachlässigung höherer Glieder  $\varrho = \varrho_0$  setzt, ergibt sich

$$m = \pi \, h \, \varrho_0 \, r^2 + \pi \, h \, \varrho_0 \, \frac{k}{4} \, \varrho_0 \, \omega^2 \, r^4.$$

Da  $\pi \, r^2 \, h \, \varrho_0$  die Flüssigkeitsmasse  $m_0$  vor der Rotation bedeutet, so ist

$$m = m_0 + m_0 \, \frac{k}{4} \, \varrho_0 \, \omega^2 \, r^2.$$

Das heisst die Massenzunahme infolge Kompression ist

$$m - m_0 = \frac{k}{4} \, m_0 \, \varrho_0 \, \omega^2 \, r^2. \quad (6)$$

Da sich  $m - m_0$  experimentell bestimmen lässt, bietet sich auf Grund von (6) eine einfache *Methode zur Bestimmung des Kompressibilitätskoeffizienten*. Indem man auf die Achse des Rotors eine Kapillare aufsetzt (Figur 1), lässt sich die Volumverminderung  $\Delta V$  aus der Senkung des Meniskus von  $A$  auf  $B$  entnehmen. Da  $m - m_0 = \varrho_0 \Delta V$ , so folgt aus (6)

$$\Delta V = \frac{k}{4} m_0 \omega^2 r^2. \quad (7)$$

Beispielsweise ergibt sich bei Wasserfüllung mit  $k = 50 \cdot 10^{-12} \text{ dyn}^{-1} \text{ cm}^2$  und den Werten  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $r = 5 \text{ cm}$  und  $\omega \doteq 2\pi \cdot 100 \text{ s}^{-1}$ :  $\Delta V = 0,019 \text{ cm}^3$ . Dies entspricht bei einem Kapillardurchmesser von 1 mm einer Senkung  $A \rightarrow B$  von 24 mm. Der Wanddruck beträgt in diesem Falle  $5 \text{ kp/cm}^2$ , immer unter der Voraussetzung, dass sich in der Flüssigkeit völlig statische Verhältnisse ausgebildet haben und dass nicht durch restliche Strömungen ein teilweiser Druckausgleich erfolgt. Ob dies zutrifft, lässt sich im Prinzip mit Hilfe von (6) prüfen. Man verwendet eine Flüssigkeit mit bekanntem  $k$  und prüft experimentell, ob die gemessene Volumdifferenz  $\Delta V$  den Wert der aus (6) berechneten erreicht. In Wirklichkeit wird man eine etwaige Ausdehnung des Rotors mitberücksichtigen müssen, was durch Ausführung einer Differenzmessung mit zwei Flüssigkeiten geschehen könnte.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Prüfung der Druckverhältnisse bei den *Gas-Ultrazentrifugen*. Hier werden auch tatsächlich hohlzylindrische Rotoren verwendet, während in der Praxis für Flüssigkeiten Ultrazentrifugen mit zylindrischen Aussparungen in einem Vollzylinder benützt werden, bei denen zum vorneherein statische Druckverhältnisse angenommen werden dürfen. Die Druckverteilung in Gas-Ultrazentrifugen erhält man analog wie im früheren Fall aus Beziehung (1), indem man jetzt für  $\varrho$  nicht einen konstanten Wert, sondern den aus der Gasgleichung entnommenen einsetzt. Es ist  $\varrho = M p_x / RT$  ( $M$  = Molekulargewicht) und somit

$$dp_x = \omega^2 \frac{M}{RT} p_x r dr.$$

Hieraus folgt

$$p_x = p_0 e^{M \omega^2 r^2 / 2 RT} \quad (8)$$

( $p_0$  = Druck in der Achse). Diese Beziehung lässt sich bei Gasgemischen auch auf die einzelnen Partialdrucke anwenden. Demgemäss ist für die Trennung von isotopen Gasen mit den Molekulargewichten  $M$  und  $M'$  der Quotient

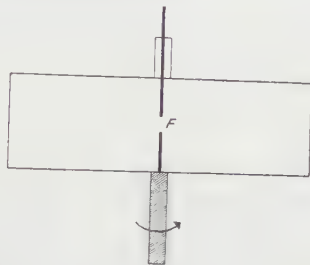
$$\frac{e^{M \omega^2 r^2 / 2 RT}}{e^{M' \omega^2 r^2 / 2 RT}} = e^{(M - M') \omega^2 r^2 / 2 RT}$$

massgebend. Bei solchen Versuchen hat sich nun das Auftreten von unkontrollierbaren Gasströmungen herausgestellt. Es gelang zwar, solche durch Beimischung von  $\text{H}_2$  herabzusetzen<sup>2)</sup>. Doch scheint es angezeigt, einmal zu prüfen, ob die für statische Verhältnisse gültige Beziehung (8) überhaupt erfüllt ist.

Es sei daher im folgenden eine einfache Methode angegeben, welche die Prüfung der Zulässigkeit von (8) erlaubt. In den Rotor wird ein einheitliches Gas von beliebigem Druck  $p_A$  bzw. der Dichte  $\varrho_A$  eingefüllt. Man misst nun die Druckerniedrigung, die in der Achse bei der Rotation entsteht. Dies geschieht selbst

<sup>2)</sup> G. HERTZ und E. NANN, Z. Elektrochem. 58, 612 (1954).

einfach durch Anbringen einer axialen kleinen Funkenstrecke  $F$  (Figur 3). Insoweit das Funkenpotential  $I^*$  proportional dem Druck verläuft, hat man einfach  $p_0/p_A = I_0^*/I_A^*$ . Besser noch wird man  $I^*$  für das verwendete Gas in Funktion des Gasdruckes bestimmen und  $p_0/p_A$  dann aus einer Eichkurve entnehmen.  $p_0/p_A$  ergibt sich folgendermassen: Es ist die Gasmenge im ruhenden



Figur 3

Prüfung und Anwendung der Druckformel für rotierende Gase mit Hilfe des Funkenpotentials.

und im rotierenden Zustand dieselbe. Im ersten Falle ist

$$m = \pi r^2 h \rho_A = \pi r^2 h \frac{M}{RT} p_A, \quad (9)$$

im zweiten

$$m = \int_0^r 2\pi x h dx \rho = \int_0^r 2\pi x h dx \frac{M}{RT} p_x.$$

Setzt man für  $p_x$  seinen Wert aus (8) ein, so ergibt sich

$$m = \frac{2\pi h}{\omega^2} p_0 (e^{M\omega^2 r^2 / 2RT} - 1). \quad (10)$$

Durch Gleichsetzen von (9) und (10) erhält man unter Verwendung der Abkürzung  $a = M\omega^2 r^2 / 2RT$

$$\frac{p_A}{p_0} = \frac{e^a - 1}{a}. \quad (11)$$

Für kleine Werte von  $a$  kann man in erster Näherung schreiben

$$\frac{p_A}{p_0} = 1 + \frac{a}{2}. \quad (11a)$$

Wählt man beispielsweise als Füllung  $N_2$  ( $M = 28$ ,  $T = 300^\circ$ ,  $r = 5$  cm und  $\omega = 2\pi \cdot 500 \text{ s}^{-1}$  [also fünfmal grösser als oben]), so erhält man für  $a = 0,139$ , und nach (11) wird  $p_A/p_0 = 1,073$ . Das heisst, es entsteht eine Druckerniedrigung von 6,8%. Es ist also bereits bei Tourenzahlen, die noch wesentlich unter den bei Ultrazentrifugen angewendeten liegen, ein gut messbarer Druckeffekt zu erwarten. Gleichung (11) lässt sich somit leicht experimentell prüfen, zumal hier nicht, wie bei Flüssigkeitsfüllung, eine Deformation des Rotors berücksichtigt zu werden braucht. Sofern sich die Anwendbarkeit der Formel (11) ergibt, kann diese auch zur Bestimmung des Molekulargewichtes von Gasen verwendet werden. Ausser der Tourenzahl wären nur noch Spannungen zu messen.

Auf alle Fälle lässt sich die Anordnung von Figur 3 dazu verwenden, um die Gaszentrifugierung bzw. die Druckabnahme in der Achse des Rotors zu demonstrieren. Hierzu kann irgendein transparentes Gefäß von drehrunder Form mit einer axialen Funkenstrecke dienen. An diese wird man zum Beispiel eine Induktorspannung anlegen, die zur Zündung des Funkens gerade noch nicht ausreicht. Tritt nun bei zunehmender Rotationsgeschwindigkeit eine Druckabnahme ein, so wird man dies unmittelbar am Einsetzen der Entladung erkennen. Zur Erzielung eines Effektes bei kleinerer Tourenzahl kann man statt Luft ein schweres Gas, zum Beispiel Xenon, verwenden.

### Résumé

La répartition de la pression et la compression sont calculées pour un liquide enfermé dans un vase cylindrique en rotation. Pour la diminution du volume on trouve  $\Delta V = k/4 m_0 \omega^2 r^2$ , supposé que toute la masse possède une vitesse angulaire uniforme. Cette condition se vérifie en comparant le  $\Delta V$  calculé avec le  $\Delta V$  mesuré. D'autre part le coefficient de compressibilité  $k$  se détermine en mesurant  $\Delta V$ . De suite la répartition de la pression dans un centrifugeur à gaz est envisagée. La formule déduite sous la supposition d'un mouvement purement rotatoire, vérifiée par l'expérience, peut servir à déterminer le poids moléculaire des gaz. Pour ce but on introduit à l'axe du centrifugeur deux électrodes qui permettent à mesurer le potentiel explosif. Il suffit d'exécuter deux mesures, une pour le gaz en repos et une pour le gaz en rotation.

(Eingegangen: 10. September 1955.)

## Zur Theorie der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten

Von GÜNTHER HÄMMERLIN, Karlsruhe<sup>1)</sup>

### Einleitung

In dieser Arbeit soll über den Einfluss einer Vernachlässigung berichtet werden, die bei der Aufstellung der Störungsdifferentialgleichungen der dreidimensionalen Instabilität laminarer, inkompressibler Grenzschichten gemacht wurde. Wir sprechen dabei von den Störungen längs gekrümmten Wänden, die GÖRTLER [1]<sup>2)</sup> im Jahre 1940 ansetzte. Es handelt sich dabei um Wirbel, deren Achsen in Richtung der Grundströmung verlaufen; im Gegensatz zu den in Strömungsrichtung fortschreitenden Tollmien-Schlichtingschen zweidimensionalen Schwingungen sind dies stehende Wirbel, ähnlich den bekannten Taylorschen Wirbeln die zwischen zwei rotierenden koaxialen Zylindern auftreten.

Der mathematischen Formulierung des Problems liegen die Navier-Stokeschen Differentialgleichungen für eine Strömung längs gekrümmter Wand zugrunde, in die der Ansatz dreidimensionaler Störungen eingeführt wird. Diese Gleichungen vereinfachen sich zunächst durch die Voraussetzung, dass sich die

<sup>1)</sup> Diese Mitteilung ist im wesentlichen während der Arbeit des Verfassers am Mathematisches Institut der Universität Freiburg i. Br. entstanden.

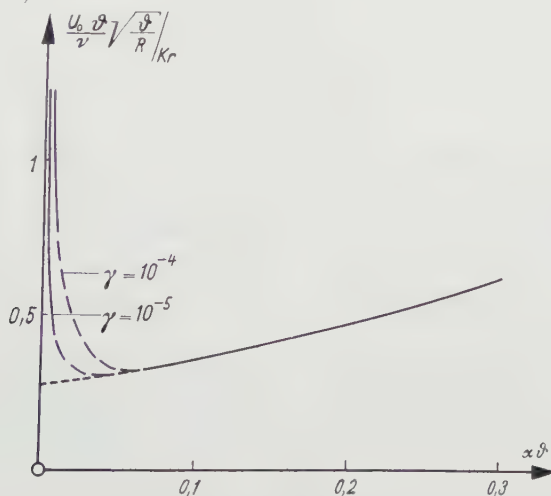
<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 163.

ungestörte laminare Grundströmung nur wenig längs eines betrachteten Wandstücks ändern soll und dass die Instabilität ebenfalls als von der Wandbogenlänge unabhängig angenommen werden darf. Einige Vernachlässigungen, die man neben dem Linearisieren des Problems vornehmen kann, beruhen darauf, dass nur solche Wände betrachtet werden, deren Krümmungsradius gross gegenüber der Grenzschichtdicke ist, und auf der Annahme, dass die angesetzten Störungen sich nicht wesentlich über die Grenzschicht hinaus erstrecken sollen.

Das so entstehende System von Differentialgleichungen stellt unter den dem Problem gemässen Randbedingungen eine Eigenwertaufgabe dar. Darin haben die Eigenwerte die Bedeutung einer Zahl  $Re(\delta/R)^{1/2}$ , wobei  $\delta$  die Grenzschichtdicke,  $R$  den Krümmungsradius der angeströmten Wand ( $R$  wird positiv für konkave Wände gewählt) und  $Re$  die mit der Grenzschichtdicke  $\delta$  gebildete Reynoldssche Zahl bezeichnen. Es interessieren insbesondere die kleinsten Eigenwerte in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$  der angesetzten Instabilität und unter diesen vor allem diejenigen neutraler Störungen – das heisst solcher Störungen, die weder gedämpft noch angefacht werden –, welche die «kritische» Kurve liefern. Jede Störung der angesetzten Art wird gedämpft, wenn der ihr zugehörige kleinste Eigenwert  $Re(\delta/R)^{1/2}$  unterhalb des kritischen Werts liegt; liegt er darüber, so wird sie angefacht und kann schliesslich zum laminar-turbulenten Umschlag führen.

Nachdem man mit Hilfe von Sätzen aus der Theorie der Integralgleichungen nachgewiesen hat, dass ein kleinster, positiver Eigenwert des Problems existiert – das heisst, dass die dreidimensionale Instabilität an konkaven Wänden auftritt –, kann man auf verschiedenen Wegen eine strenge Lösung finden [2]. Diese Lösung liefert die kleinsten Eigenwerte neutraler und angefachter Störungen wie auch die zugehörigen Eigenfunktionen.

Es zeigt sich, dass die kritische Kurve  $Re(\delta/R)^{1/2}$ , aufgetragen über  $\sigma = \alpha \delta$  ( $\alpha = 2\pi/\lambda$ ), einen endlichen Grenzwert für  $\sigma \rightarrow 0$  und einen für grösser werdende  $\sigma$  monoton wachsenden Verlauf hat (vgl. in Figur 1 die Kurve mit kurz gestricheltem Ast).



Figur 1

Die verbesserte kritische Kurve.



Bei der Berechnung der zum kleinsten Eigenwert neutraler Störungen gehörenden Eigenfunktionen stellt sich nun heraus, dass die als Störung in Richtung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand angesetzte Instabilität mit kleiner werdendem  $\sigma$  immer weiter über die Grenzschicht hinausgreift; damit wird im Bereich kleiner  $\sigma$  der Rahmen gesprengt, der durch die Annahmen gesteckt worden war, die der Theorie zugrunde liegen (vgl. [2], Figuren 3 und 4). Die damalige Fragestellung zielte ausschliesslich auf eine konsequente und vollständige mathematische Behandlung der aufgestellten Störungsdifferentialgleichungen hin, und in der Folge taucht nun die Frage nach einer Ergänzung jener Ergebnisse durch Einschränkung gewisser Annahmen im Hinblick auf die Berücksichtigung der oben genannten Tatsache auf. Es soll das Ziel dieser Arbeit sein, eine verfeinerte Betrachtung für den Bereich kleiner Werte des Parameters  $\sigma$  vorzunehmen.

### Die Störungsdifferentialgleichungen

Vorgelegt sind die Navier-Stokesschen Gleichungen für eine Strömung längs einer gekrümmten Wand, deren Krümmungsradius  $R$  ( $R > 0$  für zur Strömung konkave Wände) konstant sei. Auf Grund der schon genannten Annahme, dass sowohl Grundströmung als auch Störglieder unabhängig von der Wandbogenlänge  $x$  sein sollen, werden die Ableitungen nach  $x$  von vornherein gestrichen.  $y$  sei die Koordinate senkrecht zur Wand,  $z$  die zu  $x$  und  $y$  senkrechte Koordinate. Da sich die uns interessierenden Strömungsvorgänge nur so weit über die Grenzschicht hinaus erstrecken sollen, dass  $y/R$  gegen 1 vernachlässigt werden darf<sup>3)</sup>, ergeben sich die entsprechenden Vereinfachungen bei geometrischer Entwicklung der Ausdrücke  $1/(R - y)$  und  $R/(R - y)$ . Wir kommen damit zu diesen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u_t + v \left( u_y - \frac{u}{R} \right) + w u_z &= v \left( u_{yy} + u_{zz} - \frac{u_y}{R} \right), \\ v_t + v v_y + \frac{u^2}{R} + w v_z &= -\frac{p_y}{\rho} + v \left( v_{yy} + v_{zz} - \frac{v_y}{R} \right), \\ w_t + v w_y + w w_z &= -\frac{p_z}{\rho} + v \left( w_{yy} + w_{zz} - \frac{w_y}{R} \right), \\ v_y - \frac{v}{R} + w_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Mit der Grundströmung  $u = u_0(y)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ ,  $p = p_0(y)$  setzen wir an  $u = u_0(y) + u^*(y, z, t)$ ,  $v = v^*(y, z, t)$ ,  $w = w^*(y, z, t)$ ,  $p = p_0(y) + p^*(y, z, t)$ ; (2) da auch die ungestörte Grundströmung den Gleichungen (1) genügt, entsteht bei Einführen des Ansatzes (2)

$$\left. \begin{aligned} u_t^* + v^* \left( \frac{du_0}{dy} + u_y^* - \frac{u_0}{R} - \frac{u^*}{R} \right) + w^* u_z^* &= v \left( u_{yy}^* + u_{zz}^* - \frac{u_y^*}{R} \right), \\ v_t^* + v^* v_y^* + \frac{2 u_0 u^* + u^{*2}}{R} + w^* v_z^* &= -\frac{p_y^*}{\rho} + v \left( v_{yy}^* + v_{zz}^* - \frac{v_y^*}{R} \right), \\ w_t^* + v^* w_y^* + w^* w_z^* &= -\frac{p_z^*}{\rho} + v \left( w_{yy}^* + w_{zz}^* - \frac{w_y^*}{R} \right), \\ v_y^* - \frac{v^*}{R} + w_z^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>3)</sup> Dabei wird ausdrücklich gesagt, dass  $y$  ein Vielfaches von  $\delta$  sein darf.



Es ist  $u_y^* \sim u^*/y$ ,  $u_{yy}^* \sim u^*/y^2$ , und damit verhält sich  $u_y^*/R$  zu  $u_{yy}^*$  wie  $y/R$  zu 1. Auf unserer vorhin gemachten Annahme darf also  $u_y^*/R$  gegenüber  $u_{yy}^*$  vernachlässigt werden. Ebenso verfahren wir auf der linken Seite der ersten der Gleichungen (3) mit  $u^*/R$  gegenüber  $u_y^*$ . Nachdem man in allen Gleichungen (3) in dieser Weise vorgegangen ist und gleichzeitig linearisiert hat, bleibt das System

$$\left. \begin{aligned} u_t^* + v^* \left( \frac{du_0}{dy} - \frac{u_0}{R} \right) &= \nu (u_{yy}^* + u_{zz}^*), \\ v_t^* + 2 \frac{u_0}{R} u^* &= -\frac{p_y^*}{\varrho} + \nu (v_{yy}^* + v_{zz}^*), \\ w^* &= -\frac{p_z^*}{\varrho} + \nu (w_{yy}^* + w_{zz}^*), \\ v_y^* + w_z^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die anzunehmenden Grenzschichtgrundprofile  $u_0(y)$  der ungestörten Laminarströmung sollen so beschaffen sein, dass der Anstieg vom Wert Null an der Wand bis zum vollen Wert der Aussenströmung innerhalb der Grenzschicht erfolgt. Damit ist  $du_0/dy \sim u_0/\delta$  in  $y \leq \delta$  und  $du_0/dy \equiv 0$  für  $y > \delta$ . Greift die angesetzte Störung  $v^*$  nicht wesentlich über die Grenzschicht hinaus, spielen sich also die Störungsvorgänge in  $y \leq \delta$  und damit in dem Gebiet ab, wo  $du_0/dy$  gegenüber  $u_0/R$  weitaus überwiegt, kann man  $u_0/R$  vernachlässigen. Das so entstehende System wurde bisher behandelt und ist die Grundlage der Theorie in [2]. Wie sich aber dort zeigt, erfüllt  $v^*$  für kleine Parameterwerte  $\sigma$  diese Forderung nicht mehr. Wir werden im folgenden diesen Parameterbereich unter Beibehaltung des Glieds  $u_0/R$  untersuchen.

Der Störungsansatz

$$\begin{aligned} u &= u_1(y) \cos \alpha z e^{\beta t}, \\ v &= v_1(y) \cos \alpha z e^{\beta t}, \\ w &= w_1(y) \sin \alpha z e^{\beta t}, \\ p &= p_1(y) \cos \alpha z e^{\beta t}, \\ \alpha &= 2\pi/\lambda \quad (\lambda \text{ die Wellenlänge der Störung}), \\ \beta &= \text{Dämpfungskonstante} \end{aligned}$$

führt nach Eliminieren von  $p_1$  und  $w_1$  und nach Einführen der dimensionslosen Größen

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad U = \frac{u_0}{U_0}, \quad \sigma = \alpha \delta, \quad \tau = \left( \frac{a^2 \delta^2 + \beta \delta^2}{\nu} \right)^{1/2}, \quad \mu = 2 \left( \frac{U_0 \delta}{\nu} \right)^2 \frac{\delta}{R},$$

$$u = \left( \frac{U_0 \delta}{\nu} \right)^{-1} u_1, \quad v = v_1, \quad ' = \frac{d}{d\eta}, \quad \gamma = \frac{\delta}{R}$$

auf

$$\mu'' - \tau^2 u = \left( \frac{dU}{d\eta} - \gamma U \right) v, \quad v^{\text{IV}} - 2(\tau^2 + \sigma^2) v'' + \tau^2 \sigma^2 v = -\mu \sigma^2 U u \quad (5)$$

mit den bekannten Randbedingungen

$$u(0) = v(0) = v'(0) = 0, \quad u(\infty) = v(\infty) = v'(\infty) = 0.$$

Für neutrale Störungen wird daraus ( $\beta = 0$ ,  $\tau = \sigma$ ):

$$u'' - \sigma^2 u = \left( \frac{dU}{d\eta} - \gamma U \right) v, \quad v^{\text{IV}} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v = -\mu \sigma^2 U u. \quad (6)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den entsprechenden früher behandelten dadurch, dass das Glied  $-\gamma U v$  hinzugekommen ist.

### Bestimmung des kleinsten Eigenwerts für kleine $\sigma$

Die folgenden Betrachtungen zur Lösung des Systems (6) haben von vornherein das eng begrenzte Ziel, den kleinsten Eigenwert  $\mu_1$  in Abhängigkeit von kleinen Werten des Parameters  $\sigma$  und insbesondere sein Verhalten für  $\sigma \rightarrow 0$  zu ermitteln. Die Idee liegt nahe, hier einen Versuch mit Potenzreihenansätzen für  $u(\eta)$  und  $v(\eta)$  zu machen, wobei in den Koeffizienten dieser Potenzreihen der Parameter  $\sigma$  erscheinen wird. Im Bereich  $0 \leq \eta \leq 1$ , wo sich eine exakte Lösung von (6) nicht angeben lässt, soll dieser Weg beschritten werden. Anders liegen die Verhältnisse für  $1 < \eta$ , wo eine exakte Lösung von (6) bestimmt werden kann. Wir werden von den Potenzreihen der Innenlösungen zu verlangen haben, dass sie die Randbedingungen bei  $\eta = 0$  erfüllen und bei  $\eta = 1$  mit der exakten Aussenlösung übereinstimmen sollen. Diese Zusammenschlussbedingung wird uns eine Bestimmungsgleichung für  $\mu(\sigma)$  liefern.

Für  $\eta \geq 1$  wird aus dem System (6) [ $U(\eta) \equiv 1$ ]:

$$\left. \begin{aligned} L[u] &= -\gamma v, \quad L^2[v] = -\mu \sigma^2 u, \quad L = \frac{d^2}{d\eta^2} - \sigma^2 \\ u(\infty) &= 0, \quad v(\infty) = 0, \quad v'(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Also ist

$$L^3[v] = \gamma \mu \sigma^2 v$$

mit den Fundamentallösungen  $e^{q\nu\eta}$

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= \pm (\sigma^2 + \sqrt[3]{\gamma \mu \sigma^2})^{1/2}, \quad q_{3,4} = \pm (\sigma^2 + e^{2\pi i/3} \sqrt[3]{\gamma \mu \sigma^2})^{1/2}, \\ q_{5,6} &= \pm (\sigma^2 + e^{4\pi i/3} \sqrt[3]{\gamma \mu \sigma^2})^{1/2}. \end{aligned}$$

Da die Randbedingung  $v(\infty) = 0$  zu erfüllen ist, setzt sich die gesuchte Lösung aus denjenigen Fundamentallösungen zusammen, deren Realteil kleiner als Null ist. Das ist wegen  $\mu > 0^4$ ) zunächst für  $q_2$  der Fall.

Die Wurzeln  $q_3$  bis  $q_6$  sind zu je zweien konjugiert komplex. Nach einfacher Umformung ergeben sich als Fundamentallösungen mit abklingendem Exponentialfaktor

$$\left. \begin{aligned} v_1(\eta) &= e^{\lambda_1 \eta}, \quad v_2(\eta) = e^{-\lambda_2 \eta} \cos \lambda_2^* \eta, \quad v_3(\eta) = e^{-\lambda_2 \eta} \sin \lambda_2^* \eta, \\ \lambda_1 &= + (\sigma^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \quad (\varepsilon^2 = \sqrt[3]{\gamma \sigma^2 \mu}), \\ \lambda_2 &= - \left[ \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma^2 - \varepsilon^2)^2 - \sigma^2 \varepsilon^2} - \frac{1}{2} \left( \sigma^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]^{1/2}, \\ \lambda_2^* &= - \left[ \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma^2 - \varepsilon^2)^2 - \sigma^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left( \sigma^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Selbstverständlich erfüllt die Lösung  $v_a(\eta)$ , die sich aus den Fundamentallösungen (8) zusammensetzt, auch die Randbedingung  $v'(\infty) = 0$ . Man kann nun, etwa mit Hilfe der zweiten der Gleichungen (7),  $u_a(\eta)$  aus  $v_a(\eta)$  berechnen und man erkennt ohne weiteres, dass diese Lösung  $u_a(\eta)$  die Randbedingung  $u(\infty) = 0$  befriedigt. Die drei im Unendlichen zu erfüllenden Randbedingungen

<sup>4)</sup> In [2] wurde  $\mu > 0$  gezeigt;  $\mu = 0$  kann nicht eintreten, das bringt nur die triviale Lösung, also auch hier  $\mu > 0$ .

lassen also von den sechs ursprünglich verfügbaren Konstanten noch drei unbestimmt.

Die Lösung  $v_a(\eta)$  genügt den Differentialgleichungen

$$v''' + a_2 v'' + a_1 v' + a_0 v = 0, \quad v^{IV} + a_2 v''' + a_1 v'' + a_0 v' = 0,$$

$$v^V + a_2 v^{IV} + a_1 v''' + a_0 v'' = 0$$

mit

$$a_0 = \lambda_1 (\lambda_2^2 + \lambda_2^{*2}) = \varepsilon^3 \sqrt{1 + \frac{\sigma^6}{\varepsilon^6}},$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_2^2 + \lambda_2^{*2} + 2 \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \varepsilon^2 \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}} + \sqrt{2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)} \right\} \left[ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right]^{1/2} + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$a_2 = \lambda_1 + 2 \lambda_2 = \varepsilon \left\{ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}} + \sqrt{2} \sqrt{\left[\left(1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right]^{1/2} + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}} \right\}.$$

Unter Zuhilfenahme des Systems (7) lassen sich daraus folgende Gleichungen herleiten, in denen nur  $u_a(\eta)$ ,  $u'_a(\eta)$ ,  $v_a(\eta)$ , ...,  $v'''_a(\eta)$  auftreten:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - a_2^2 + 2 \sigma^2) v'' + (a_0 - a_1 a_2) v' - (a_0 a_2 + \sigma^4) v - \mu \sigma^2 u &= 0, \\ (a_1 - a_2^2 + 2 \sigma^2) v''' + (a_0 - a_1 a_2) v'' - (a_0 a_2 + \sigma^4) v' - \mu \sigma^2 u' &= 0, \\ v''' + a_2 v'' + a_1 v' + a_0 v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Von den noch unbekannten Innenlösungen  $u_i(\eta)$  und  $v_i(\eta)$  fordern wir nun als Zusammenschlussbedingung, dass sie bei  $\eta = 1$  diesen Differentialgleichungen genügen sollen. Im Hinblick darauf, dass wir uns nur für die Lösungen bei kleinen Werten des Parameters  $\sigma$  interessieren, werden die Koeffizienten von (9) in dieser Form geschrieben:

$$a_0 = \varepsilon^3 \left\{ 1 + f_0 \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \quad [f_0(0) = 0],$$

$$a_1 = \varepsilon^2 \left\{ 2 + f_1 \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \quad [f_1(0) = 0],$$

$$a_2 = \varepsilon \left\{ 2 + f_2 \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \quad [f_2(0) = 0],$$

$$a_1 - a_2^2 + 2 \sigma^2 = \varepsilon^2 \left\{ -2 + \varphi_2 \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \quad [\varphi_2(0) = 0],$$

$$a_0 - a_1 a_2 = \varepsilon^3 \left\{ -3 + \varphi_1 \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \quad [\varphi_1(0) = 0],$$

$$a_0 a_2 + \sigma^4 = \varepsilon^4 \left\{ -2 + \varphi_0 \left( \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) \right\} \quad [\varphi_0(0) = 0].$$

Mit diesen Bezeichnungen wird aus (9)

$$\left. \begin{aligned} (2 - q_2) v'' - \varepsilon (3 - q_1) v' - \varepsilon^2 (2 - q_0) v - \frac{\varepsilon^4}{\gamma} u &= 0, \\ (2 - q_2) v''' + \varepsilon (3 - q_1) v'' + \varepsilon^2 (2 - q_0) v' + \frac{\varepsilon^4}{\gamma} u' &= 0, \\ v''' + \varepsilon (2 + f_2) v'' + \varepsilon^2 (1 + f_1) v' + \varepsilon^3 (1 + f_0) v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Von den Betrachtungen in [2] her ist bekannt, dass die spezielle Wahl der Grenzschichtgrundprofile keinen wesentlichen Einfluss auf den Verlauf der kritischen Kurve hat, wenn wir alle Profile auf gleiche Impulsverlustdicken beziehen ([2], S. 314). Wir können das auch hier annehmen und uns darauf beschränken, mit dem Streckenprofil

$$U(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{für } 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < \eta \end{cases}$$

zu arbeiten. Dann lauten die Differentialgleichungen (6) in  $0 \leq \eta \leq 1$ , aus denen die Innenlösungen hervorgehen:

$$\left. \begin{aligned} u'' - \sigma^2 u &= (1 - \gamma \eta) v, \quad v^{IV} - 2\sigma^2 v'' + \sigma^4 v = -\mu \sigma^2 \eta u \\ [u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Potenzreihensatz:

$$u(\eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \eta + \frac{\alpha_2}{2} \eta^2 + \dots, \quad v(\eta) = \beta_0 + \beta_1 \eta + \frac{\beta_2}{2} \eta^2 + \dots \quad (12)$$

Die Randbedingungen werden erfüllt durch  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ .

Lässt man  $\alpha_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  noch unbestimmt, so sind die übrigen Koeffizienten der Potenzreihen in Abhängigkeit von diesen auszudrücken. Die Forderung, dass die Lösungen (12) bei  $\eta = 1$  das Gleichungssystem (10) erfüllen sollen, führt auf ein homogenes Gleichungssystem für die Koeffizienten  $\alpha_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$ ; die Determinante dieses Systems muss also Null werden. Diese Determinante errechnet sich zu

$$\Delta = \frac{\varepsilon^4}{\gamma} \Delta^*,$$

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{3!} \varepsilon^2 + g_{11} & 2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{1}{4!} \cdot \frac{\varepsilon^4}{\gamma} + g_{12} & 2 + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\varepsilon^4}{\gamma} + g_{13} \\ 1 - \frac{4}{3!} \varepsilon^2 + g_{21} & 3\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\varepsilon^4}{\gamma} + g_{22} & 2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{1}{4!} \cdot \frac{\varepsilon^4}{\gamma} + g_{23} \\ -\frac{2}{3!} \varepsilon^2 + g_{31} & 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + g_{32} & 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 + g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{ik} = P_{ik} \left( \sigma^2, \frac{\varepsilon^6}{\gamma}, \gamma \right), \text{ Polynome. } P_{ik}(0, 0, 0) = 0.$$

$\Delta = 0$  ist zunächst erfüllt für  $\varepsilon^4/\gamma = 0$ , das heisst für  $\mu = 0$ . Dieser Wert scheidet aus, da er nur die trivialen Lösungen  $u \equiv 0$  und  $v \equiv 0$  mit sich bringt.

Zur Berechnung möglicher Eigenwerte sind also die Nullstellen von  $I^*$  aufzusuchen.

$$I^* = 2(1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2) \frac{\varepsilon^4}{\gamma} \left( \frac{3}{4!} - \frac{22}{5!} \varepsilon + \frac{101}{3 \cdot 5!} \varepsilon^2 \right) - \frac{1}{3! 4! 5!} \left( \frac{\varepsilon^4}{\gamma} \right)^2 \varepsilon^2 \left( 2 + \varepsilon + \frac{1}{5} \varepsilon^2 \right) + \Phi \left( \sigma^2, \frac{\varepsilon^6}{\gamma}, \gamma \right) = 0.$$

Man findet die kleinste Nullstelle unter der Voraussetzung  $\sigma \ll 1$  angenähert zu  $\varepsilon = 2\gamma^{1/4}$ ;  $\Phi$  bleibt unberücksichtigt, da es nur die höheren Potenzen von  $\sigma$  und  $\varepsilon^2$  enthält, während  $\gamma$  von der Grössenordnung  $10^{-4}$  ist<sup>5)</sup>.

Also ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varepsilon = 2\gamma^{1/4},$$

das bedeutet

$$\sqrt{\frac{\mu}{2}} = Re \left( \frac{\delta}{R} \right)^{1/2} \approx \frac{\sqrt{32} \gamma^{1/4}}{\sigma} \{1 + o(1)\};$$

bezogen auf die Impulsverlustdicke  $\vartheta$  ( $\delta/\vartheta = 6$  beim Streckenprofil):

$$\frac{U_0 \vartheta}{\nu} \sqrt{\frac{\vartheta}{R}} \approx 0,064 \frac{\gamma^{1/4}}{a \vartheta} \{1 + o(1)\}.$$

Von der kritischen Kurve können wir uns also dieses Bild machen: Die hier gewonnene asymptotische Darstellung ist sicher brauchbar für  $\sigma < 0,05$ , während der Einfluss des in (6) neu hinzugenommenen Glieds für etwa  $\sigma > 0,4$  keine Rolle mehr spielt. Verbinden wir diese Kurvenäste wie in Figur 1, so besitzt die damit gewonnene kritische Kurve ein Minimum bei  $\sigma = 0,33$ ; das entspricht einer Störungswellenlänge  $\lambda = 19 \vartheta$ . Die Daten in Figur 1 beziehen sich auf die Impulsverlustdicke  $\vartheta$ , das Minimum der kritischen Kurve liegt bei  $\alpha \vartheta = 0,055$  ( $\gamma = 10^{-4}$ ). Für kleinere Werte von  $\gamma$  liegen die Minima entsprechend weiter links.

Diese Ergebnisse ergänzen die Theorie der dreidimensionalen Instabilität. Die kritischen Werte werden bestätigt, ebenso die Tatsache, dass die kritischen Wellenlängen ausserordentlich gross sind; das ergab sich in [2] aus der Betrachtung der Kurven geringer Anfachung. Der Einfluss des hier mitberücksichtigten Glieds macht sich nur für sehr kleine  $\sigma$  bemerkbar und ändert nichts Wesentliches in dem Gesamtbild, das sich in [2] ergab.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. GÜRTLER, *Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgr. I [N. F.] 2, 1–26 (1940).
- [2] G. HÄMMERLIN, *Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, J. Rat. Mech. Anal. 4, 279–321 (1955).

<sup>5)</sup> Vgl. die in [2], S. 317, zitierten Versuchsdaten von H. W. LIEPMANN.

## Summary

In the case of large wave lengths a refined treatment of the three-dimensional instability of laminar boundary layers is made possible by taking into account a further term of the differential equations of the instability. The improved curve of the Görtler-Parameter  $Re(\theta/R)^{1.2}$  for neutral disturbances has a minimum with an instability wave length approximately equal to  $19\delta$ ,  $\delta$  the boundary layer thickness. The results of [2] are not changed essentially, especially the critical values of the Görtler parameter are confirmed and also the fact, that the critical wave length is large.

(Eingegangen: 7. Oktober 1955.)

## Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus

VON HEINZ RUTISHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

In einer früheren Arbeit ([3], Abschnitt 6) hat der Verfasser gezeigt, wie man die Nullstellen eines Polynoms  $N(z)$  (vom Grade  $n$ ) mit Hilfe des QD-Algorithmus bestimmen kann. Man baut dabei das QD-Schema einer rationalen Funktion  $f(z) = N_1(z)/N(z)$  [mit einem beliebigen Polynom  $(n-1)$ -ten Grades als Zähler] von oben nach unten auf, wobei man die für den Beginn des Prozesses notwendige oberste Schrägreihe, das heisst die Werte  $q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, e_{n-1}^{(0)}, q_n^{(0)}$  aus dem S-Kettenbruchentwicklung von  $f(z)$  entnehmen kann. Es ist natürlich ein Nachteil des Verfahrens, dass zuerst eine Funktion  $f(z)$  in einen Kettenbruch entwickelt werden muss.

*Es dürfte daher von Interesse sein, dass man die Kettenbruchentwicklung vermeiden kann, indem sich das QD-Schema der Funktion  $z^{n-1}/N(z)$  auf Grund einer Formel von WRONSKI in besonders einfacher Weise aufstellen lässt.*

Zu dieser Vereinfachung wurde der Verfasser durch eine Arbeit von A. C. AITKEN [1] angeregt, in der eine entsprechende Vereinfachung des Aitkenschen Algorithmus behandelt wird. Den Hinweis auf die Formel von WRONSKI verdanke ich Herrn Dr. F. L. BAUER, Technische Hochschule München.

### 2. Die Wronskische Formel

Sei  $f(x) = \sum_0^\infty a_\kappa x^\kappa$  eine Funktion, die in einer gewissen Umgebung des Nullpunkts regulär sei. Dann ist (falls  $a_0 \neq 0$ ) die Potenzreihe der reziproken Funktion  $1/f(x)$  durch folgende Reihe gegeben (siehe WRONSKI [6]; WHITTAKER [4], Abschnitt 60):

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} x - \frac{a_0 a_1}{a_1 a_2} \frac{x^2}{a_0^3} + \left| \begin{array}{cc} 0 & a_0 a_1 \\ a_0 & a_1 a_2 \end{array} \right| \frac{x^3}{a_0^4} + \dots \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.



mit dem allgemeinen Glied

$$(-1)^{\binom{\kappa+1}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_0 & & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{\kappa-2} & a_{\kappa-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\kappa-1} & a_{\kappa} \end{vmatrix} \frac{x^{\kappa}}{a_0^{\kappa+1}} \quad (2)$$

Dies erlaubt die Berechnung der kleinsten Nullstelle von  $f(x)$  als Grenzwert des Quotienten aufeinanderfolgender Koeffizienten der Wronskischen Reihe (vgl. hierzu WHITTAKER [4] oder [5], Abschnitt 60).

Wir wollen nun aber die Formel (1) zum Aufbau des QD-Schemas der rationalen Funktion

$$\frac{1}{N(z)} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \dots + \frac{s_{n-1}}{z^n} + \dots \quad (3)$$

mit  $N(z) = \sum_0^n c_{\kappa} z^{\kappa}$  verwenden. Dabei wird natürlich  $s_0 = s_1 = s_2 = \dots = s_{n-2} = 0$ , so dass der Anfang des QD-Schemas von  $1/N(z)$  zunächst gar nicht definiert ist. Im allgemeinen wird es aber von der mit  $\nu = n - 1$  numerierten Schrägzeile an abwärts existieren<sup>2)</sup> und kann auch noch ein Stück weit nach oben fortgesetzt werden.

Substituiert man in (3)  $z = 1/x$ , so resultiert

$$\frac{1}{N(1/x)} = \underbrace{\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \dots + \frac{s_{n-2}}{x^{n-1}}}_{= 0} + \frac{s_{n-1}}{x^n} + \frac{s_n}{x^{n+1}} + \dots \quad (4a)$$

oder

$$\frac{1}{x^n N(1/x)} = s_{n-1} + s_n x + s_{n+1} x^2 + \dots, \quad (4b)$$

oder

$$x^n N(1/x) = c_n + c_{n-1} x + \dots + c_0 x^n = \frac{1}{s_{n-1} + s_n x + s_{n+1} x^2 + \dots}. \quad (5)$$

Da nun die rechte Seite von (5) nach (1) in der Form

$$\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{s_n}{s_{n-1}^2} x - \left| \frac{s_{n-1}}{s_n} \frac{s_n}{s_{n+1}} \right| \frac{x^2}{s_{n-1}^3} + \frac{0}{s_{n-1}} \frac{s_{n-1}}{s_n} \frac{s_n}{s_{n+1}} \left| \frac{x^3}{s_{n-1}^4} - \dots \right.$$

<sup>2)</sup> Das QD-Schema von  $1/N(z)$  ist von dieser Stelle an nichts anderes als das QD-Schema von  $z^{n-1}/N(z)$ .

geschrieben werden kann, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\left. \begin{aligned} c_{n-\kappa} &= (-1)^{\binom{\kappa-1}{2}} H_{\kappa}^{(n+1-\kappa)} \frac{1}{s_{n-1}^{\kappa+1}} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots, n), \\ \text{wobei für alle } \nu \\ H_0^{(\nu)} &= 1, \\ H_{\kappa}^{(\nu)} &= \begin{vmatrix} s_{\nu} & s_{\nu+1} & s_{\nu+\kappa-1} \\ s_{\nu+1} & s_{\nu+2} & s_{\nu+\kappa} \\ s_{\nu+\kappa-1} & s_{\nu+\kappa} & s_{\nu+2\kappa-2} \end{vmatrix} \quad (\kappa > 0, \text{ mit } s_0 = s_1 = \dots = s_{n-2} = 0). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Damit haben wir ein Mittel gefunden, um die mit dem QD-Algorithmus zusammenhängenden Hankel-Determinanten  $H_{\kappa}^{(n+1-\kappa)}$  der  $s$ , explizite anzugeben. Ausserdem haben wir ja

$$H_{\kappa}^{(n-\kappa)} = \begin{vmatrix} s_{n-\kappa} & s_{n-\kappa+1} & \dots & s_{n-1} \\ s_{n-\kappa+1} & s_{n-\kappa+2} & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{n+\kappa-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_{n-1} & \dots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{n+\kappa-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\binom{\kappa}{2}} s_{n-1}^{\kappa} \quad (7)$$

und entsprechend

$$H_{\kappa}^{(n-\kappa-1)} = \begin{vmatrix} s_{n-\kappa-1} & s_{n-\kappa} & \dots & s_{n-2} \\ s_{n-\kappa} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-2} & \dots & s_{n+\kappa-3} \end{vmatrix} = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8)$$

### 3. Der Aufbau des QD-Schemas von $1/N(z)$

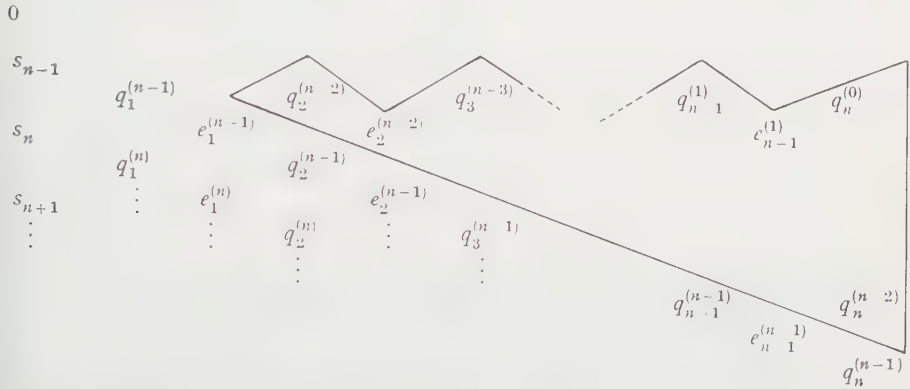
Für das Weitere benützen wir die Tatsache, dass sämtliche im QD-Schema (komprimierte Form, siehe [3], Abschnitt 1) auftretenden Grössen  $q_{\sigma}^{(\nu)}$  und  $e_{\sigma}^{(\nu)}$  durch die mit den Koeffizienten  $s_{\nu}$  gebildeten Hankel-Determinanten  $H_{\kappa}^{(\nu)}$  ausgedrückt werden können. Es gilt nämlich mit den gleichen Bezeichnungen wie in (6) (vgl. hierzu auch [2], Abschnitt 5):

$$q_{\kappa}^{(\nu)} = \frac{H_{\kappa}^{(\nu+1)} H_{\kappa-1}^{(\nu)}}{H_{\kappa}^{(\nu)} H_{\kappa-1}^{(\nu+1)}}, \quad e_{\kappa}^{(\nu)} = \frac{H_{\kappa+1}^{(\nu)} H_{\kappa-1}^{(\nu+1)}}{H_{\kappa}^{(\nu)} H_{\kappa}^{(\nu+1)}}. \quad (9)$$

In unserem Fall gelten diese Formeln zunächst nur für  $\nu \geq n-1$ , wo das QD-Schema von  $1/N$  in normaler Weise definiert ist. Nun ist aber  $N(z)$  ein Polynom vom Grade  $n$  und daher  $e_n^{(\nu)} = 0$  für alle  $\nu$  (vgl. [2], Satz 2), so dass sich das QD-Schema von  $1/N(z)$  auf Grund der Formeln (4) in [3] auch rückwärts fortsetzen lässt, soweit die Grössen  $q_{\kappa}^{(\nu)}$ ,  $e_{\kappa}^{(\nu)}$  aus den Formeln (9) sinnvoll berechnet werden können (keine Nullen im Nenner). Dies ist offenbar der Fall, solange in den im

Nenner auftretenden  $H$  die Summe von oberem und unterem Index  $\geq n$  ist; das heisst für  $\nu \geq n - \kappa$ .

Somit lässt sich der im untenstehenden QD-Schema von  $1/N(z)$  eingerahmte Teil durch Fortsetzung von der mit  $\nu = n - 1$  numerierten Schrägzeile aus nach oben sinnvoll ergänzen:



Es zeigt sich nun, dass die am Kopf des so ergänzten QD-Schemas stehenden Werte  $q_{\kappa}^{(n-\kappa)}$  und  $e_{\kappa}^{(n-\kappa)}$  auf Grund der Formeln (6) bis (9) leicht berechnet werden können; es ist nämlich:

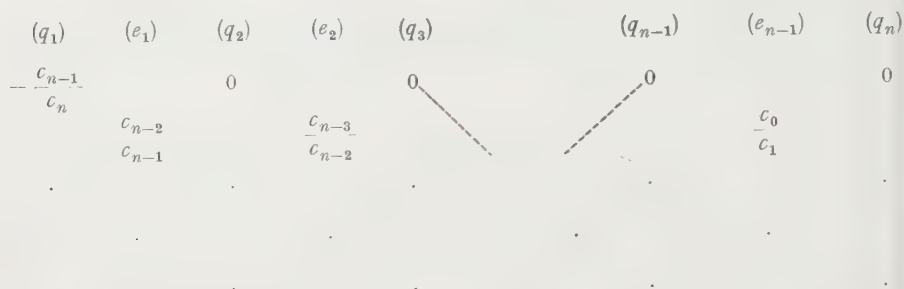
$$\left. \begin{aligned} q_1^{(n-1)} &= \frac{H_1^{(n)}}{H_1^{(n-1)}} = \frac{(-1)^1 c_{n-1} s_{n-1}^2}{(-1)^0 s_{n-1}} = -c_{n-1} s_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{c_n}, \\ q_{\kappa}^{(n-\kappa)} &= \frac{H_{\kappa}^{(n+1-\kappa)} H_{\kappa-1}^{(n-\kappa)}}{H_{\kappa}^{(n-\kappa)} H_{\kappa-1}^{(n+1-\kappa)}} = 0 \quad \text{wegen} \quad H_{\kappa-1}^{(n-\kappa)} = 0 \quad (\kappa = 2, 3, \dots, n), \\ e_{\kappa}^{(n-\kappa)} &= \frac{H_{\kappa+1}^{(n-\kappa)} H_{\kappa-1}^{(n+1-\kappa)}}{H_{\kappa}^{(n-\kappa)} H_{\kappa}^{(n+1-\kappa)}} = \frac{(-1)^{\binom{\kappa+2}{2}} c_{n-\kappa-1} s_{n-1}^{\kappa+2} (-1)^{\binom{\kappa-1}{2}} s_{n-1}^{\kappa-1}}{(-1)^{\binom{\kappa}{2}} s_{n-1}^{\kappa} (-1)^{\binom{\kappa+1}{2}} s_{n-1}^{\kappa+1} c_{n-\kappa}} = \frac{c_{n-\kappa-1}}{c_{n-\kappa}} \\ & \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

#### 4. Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Nullstellen des Polynoms  $N(z) = \sum_0^n c_{\kappa} z^{\kappa}$  stellen wir das QD-Schema der Funktion  $1/N(z)$  auf, indem wir mit den in einer *horizontalen Zickzacklinie* stehenden Werten

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(n-1)} &= -\frac{c_{n-1}}{c_n}, \\ q_{\kappa}^{(n-\kappa)} &= 0 \quad (\kappa = 2, 3, \dots, n), \\ e_{\kappa}^{(n-\kappa)} &= -\frac{c_{n-\kappa-1}}{c_{n-\kappa}} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

oder schematisch:



beginnen und dann unter Beachtung von  $e_0^{(v)} = e_n^{(v)} = 0$  in der üblichen Weise nach unten fortsetzen; die Formeln hierzu lauten (siehe [3], Abschnitt 5):

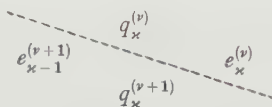
$$q_{\kappa}^{(v+1)} = q_{\kappa}^{(v)} + e_{\kappa}^{(v)} - e_{\kappa-1}^{(v)}, \quad (12)$$

$$e_{\kappa}^{(v+1)} = \frac{e_{\kappa}^{(v)} q_{\kappa+1}^{(v)}}{q_{\kappa}^{(v+1)}}. \quad (13)$$

Dabei ist es mnemotechnisch vorteilhaft, die Formeln (12) und (13) als sogenannte **Rhombenregeln** zu formulieren<sup>3)</sup>:

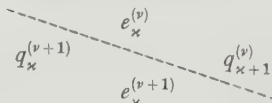
Die Formeln (12) und (13) verknüpfen immer je vier in einem Rhombus angeordnete Werte des QD-Schemas (in komprimierter Form), und zwar unterscheidet man  $q$ - und  $e$ -Rhomben.

**Für die  $q$ -Rhomben:**



Die Summe der über der Trennungslinie stehenden Werte ist gleich der Summe der beiden unteren Werte [entsprechend der Formel (12)].

**Für die  $e$ -Rhomben:**



Das Produkt der über der Trennungslinie stehenden Werte ist gleich dem Produkt der beiden unteren Werte [entspricht Formel (13)]. Die Nullstellen ergeben sich dann in der in [3], Abschnitte 6 und 7, angegebenen Weise.

<sup>3)</sup> Nach einem Vorschlag von Prof. Dr. E. STIEFEL, ETH.

*Numerisches Beispiel:*  $x^3 - 9x^2 - 8x + 2 = 0$  (wie in [3]).

$q_1$	$e_1$	$q_2$	$e_2$	$q_3$
9		0		0
9,8889	+ 0,8889	- 1,1389	- 0,25	0,25
9,7865	- 0,1024	- 0,9816	+ 0,0549	0,1951
9,7968	+ 0,0103	- 1,0028	- 0,0109	0,2060
9,7958	- 0,0010	- 0,9996	+ 0,0022	0,2038
9,7959	+ 0,0001	- 1,0001	- 0,0004	0,2042

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. C. AITKEN, *Further Numerical Studies in Algebraic Equations and Matrices*, Proc. roy. Soc. Edinburgh 51, 80–90 (1931).
- [2] H. RUTISHAUSER, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, Fasc. 3, 233–251 (1954).
- [3] H. RUTISHAUSER, *Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, Fasc. 6, 496–508 (1954).
- [4] E. T. WHITTAKER, *A Formula for the Solution of Algebraic or Transcendental Equations*, Proc. Edinburgh. math. Soc. 36, 103–106 (1918).
- [5] E. T. WHITTAKER and G. ROBINSON, *Calculus of Observations* (Blackie and Son, London 1924).
- [6] WRONSKI, *Introduction à la philosophie des mathématiques* (Paris 1811).

### Summary

In [3], paragraph 6, the author showed how to find the zeros of a polynomial with the aid of the QD-Algorithm. The method required a certain rational function to be developed into a continued fraction of Stieltjes type to give the starting values for the QD-Algorithm. In the present paper the author shows how starting values can be obtained *without* computing a continued fraction.

Eingegangen: 11. Juni 1955.)

---

 Varia – Miscellaneous – Divers
 

---

### Meeting of the Association for Computing Machinery, Los Angeles, August 27–29, 1956

Annual meeting of the Association for Computing Machinery will be held on the University of California, Westwood Campus, Los Angeles, August 27–29, 1956. For information write G. W. King, Box 3251, Olympic Station, Beverly Hills, California. Submit papers (abstract and four page manuscript in triplicate) by May 15 to J. P. Nash, University of Illinois, Urbana, Illinois. (See January issue Journal of Association for Computing Machinery for further details.)

E. L. BROWN

---

### Congrès international de cybernétique

La Province de Namur organise, sous le Haut Patronage du Ministère de l'instruction publique et de l'U.N.E.S.C.O., et sous la Présidence d'Honneur de Monsieur le Gouverneur de la Province de Namur, un congrès international de cybernétique qui se tiendra à Namur (Belgique), du 26 au 29 juin 1956.

Les personnes qui auraient l'intention de participer au congrès au titre d'auditeur, d'auteur de communication ou d'exposant de matériel, sont priées de se faire connaître en écrivant au Secrétariat du congrès international de cybernétique, 13, rue Basse-Marcelle, Namur (Belgique). Des informations détaillées leur seront envoyées.

E. STIEFEL

---

### Erratum

Corrections to the paper **On Conditions for Stability of Solutions of Pendulum-Type Equations** by JAMES C. LILLO and GEORGE SEIFERT, ZAMP 6, fasc. 3, 239–243 (1955).

On page 240 in the third sentence of the section entitled *The Lower Bound* the inequalities restricting  $b$  should obviously be reversed.

On page 241 the inequality in (5) should be reversed.

On page 242, line 16, the second inequality should read:  $y_c(\theta) < h(\theta)$ ; i.e. a subscript  $c$  should be added to the function  $y(\theta)$ .

---

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Millimicrosecond Pulse Techniques.** Von I. A. D. LEWIS und F. H. WELLS (Pergamon Press Ltd., London 1954). 310 S., 150 Fig.; 40 s.

Die vorliegende Monographie befasst sich mit der Theorie und dem praktischen Entwurf von Schaltungen der modernen Impulstechnik. Der überwiegende Teil der Anwendungen ist der Kernphysik entnommen, doch dürften manche der untersuchten Probleme auch in anderen Gebieten der Messtechnik von Interesse sein. Insbesondere werden Impulstransformatoren, Breitbandverstärker, «distr



buted amplifier-, Impulsgeneratoren sowie Kathodenstrahloszillographen und Koinzidenzschaltungen mit extrem hohem zeitlichem Auflösungsvermögen eingehend behandelt. Zahlreiche Literaturhinweise erleichtern das Studium der Originalarbeiten.

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass Sekundäremissionspentoden zur Erzeugung von kurzzeitigen Rechteckimpulsen grosse Vorteile bieten. Es ist deshalb zu begrüßen, dass solche Schaltungen in dem vorliegenden Werke Aufnahme gefunden haben. Die beiden Verfasser sind in einem bekannten Entwicklungslaboratorium (A. E. R. E. HARWELL) tätig, und ihre grosse Erfahrung zeigt sich in der übersichtlichen und klaren Darstellung sowie in der sorgfältigen Berücksichtigung der jüngsten Entwicklungen in diesem Spezialgebiet der elektronischen Messtechnik. Das Buch entspricht einem Bedürfnis und darf Physikern und Ingenieuren sehr empfohlen werden.

E. Baldinger

**Advances in Geophysics**, Bd. 1. Herausgegeben von H. E. LANDSBERG (Academic Press Inc., New York 1952). 362 S., 65 Fig.; \$7.80.

Das Interesse an Geophysik hat in den letzten Jahren um ein Vielfaches zugenommen. Neue Zeitschriften sind erschienen und bekannte haben ihren Umfang beachtlich erhöht. Entsprechend wurde in relativ kurzer Zeit eine ungeahnte Fülle von Tatsachenmaterial zusammengetragen. Auffallend wenig wurde aber bis heute getan, um dieses Material kritisch zu sichten und zu ordnen und damit eine konsequente Weiterentwicklung zu erleichtern. Der Gedanke von LANDSBERG, nun auch in der Geophysik von Zeit zu Zeit eine Reihe von zusammenfassenden Berichten, die den jeweiligen Stand der Erkenntnisse auf Teilgebieten darstellen, in Buchform herauszugeben, ist daher sehr zu begrüßen.

Der vorliegende Band enthält folgende Beiträge:

*Automatic Processing of Geophysical Data.* Von JOHN C. BELLAMY. In der Geophysik sind vorwiegend einmalige Vorgänge zu beobachten, die oft von zahlreichen Parametern abhängen, oder solche, bei denen zum Beispiel die äusseren Bedingungen dauernd geändert werden. Einwandfreie Schlüsse können daher nur aus einem umfangreichen Beobachtungsmaterial gezogen werden. In diesem Bericht wird nun dargelegt, wie die neuen Hilfsmittel, wie Tonbänder, Mikrofilme, Lochkartenmaschinen, Analogierechengeräte und elektronische Rechenmaschinen, mit Erfolg zur Verarbeitung eines umfangreichen Beobachtungsmaterials eingesetzt werden können. Die Darstellung ist insofern etwas einseitig, als nur Beispiele aus der Meteorologie und insbesondere die Messungen mit Radiosonden behandelt werden.

*Some New Statistical Techniques in Geophysics.* Von ARNOLD COURT. Dieser Beitrag behandelt vor allem einige neue Gesichtspunkte der Statistik, wie zum Beispiel die Kreisverteilungen unter besonderer Berücksichtigung der Belange der Geophysik. Die grundlegenden Theorien sowie Beweise oder illustrative Beispiele, die auch die Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten leichter erkennen lassen, sind weggelassen. Die Darstellung ist sehr klar, und vom Leser werden nur einige Vorkenntnisse verlangt, wie zum Beispiel die Methode der kleinsten Quadrate, einfache Korrelationen usw.

*Studies of the General Circulation of the Atmosphere.* Von BERT BOLIN. Hier wird das Verhalten der Atmosphäre im Grossen betrachtet. Es werden insbesondere folgende Fragen untersucht: Die mittlere Bewegung und ihre Störung infolge der unregelmässigen Erdoberfläche im Zusammenhang mit den physikalischen Ursachen, die Energiebilanz und die beiden bekannten Modelle der Atmosphäre.

*Exploration of the Upper Atmosphere by Meteoritic Techniques.* Von FRED L. WHIPPLE. In diesem Beitrag werden vorerst die verschiedenen Beobachtungsmethoden der Astrophysik erläutert und dann vier verschiedene Methoden zur Bestimmung der Dichte der höheren Schichten der Atmosphäre aus photographischen Beobachtungen von Meteoren dargelegt. Bemerkenswert ist, dass alle Methoden annähernd gleiche Resultate liefern.

*Unsolved Problems in Physics of the High Atmosphere.* Von N. C. GERSON. Dieser Bericht gibt vorweg eine Zusammenfassung der heute bekannten physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre. Die Messtechnik sowie Probleme im Zusammenhang mit der Nachrichtenübermittlung werden übergangen. Im ganzen gesehen, steht hier die Forschung noch im Anfangsstadium.

*Estuarine Hydrography.* Von D. W. PRITCHARD. Der Verfasser berichtet im wesentlichen über die neuen Untersuchungen, die in der Chesapeake Bay und im James River durchgeführt wurden. Ferner werden die Theorien von STOMMEL und CAMERON dargelegt.

*The Earth's Gravitational Field and Its Exploitation.* Von GEORGE PRIOR WOOLLARD. Nach einem historischen Überblick wird die Messung und Berechnung der Erdbeschleunigung kurz behandelt. Hierauf wird das Schwerfeld der Erde beschrieben und die Ursachen von Schwerstörungen und die Genauigkeit von Schweremessungen diskutiert. Weiter wird auf die praktische Bedeutung der gravimetrischen Messungen für die Geodäsie eingegangen, während die eigentliche angewandte Gravimetrik kaum gestreift wird. Es ist daher zu hoffen, dass dieses wichtige Teilgebiet, in dem in den letzten Jahren bedeutende Fortschritte erzielt wurden, in einem weiteren Beitrag ausführlich bearbeitet wird.

*Aeromagnetic Surveying.* Von JAMES R. BALSLEY. In diesem Aufsatz werden vorerst die heute gebräuchlichen Messgeräte, deren Empfindlichkeit und Genauigkeit besonders hervorzuheben ist, sowie die verschiedenen Hilfsgeräte, wie Spezialkameras für Luftaufnahmen, elektronische Navigationsgeräte, Altimeter usw. beschrieben. Dann folgt eine Darstellung der eigentlichen Messtechnik und der erzielten Ergebnisse, die ohne Zweifel, wie allein das beigegebene Kartenmaterial zeigt, als hervorragend bezeichnet werden müssen.

Allgemein ist noch zu sagen, dass allen Beiträgen ein ausführliches Literaturverzeichnis beigegeben ist.

M. Weber

**Höhere Mathematik, Teil V: Formelsammlung.** Von G. DOBRACK (Verlagsgesellschaft B. G. Teubner, Stuttgart 1954). 124 S., 74 Abb.; DM 4.80.

Nachdem die meisten Bände des Lehrwerks von R. ROTHE in neuer Auflage herausgekommen sind, erscheint nun auch die zu den drei ersten Bänden (im wesentlichen: Differential- und Integralrechnung, Elemente der Differentialgeometrie, gewöhnliche Differentialgleichungen reeller Veränderlicher) gehörende und diese zusammenfassende Formelsammlung zum dritten Male. Es sind eine Reihe von kleinern Änderungen vorgenommen worden, einerseits um die Zusätze der übrigen Teile zu berücksichtigen, andererseits um die Brauchbarkeit zu erhöhen. Es ist nicht zu bezweifeln, dass die Formelsammlung dem Studierenden wie auch dem Praktiker nützliche Dienste leisten wird.

E. Roth-Desmeules

**Berechnung magnetischer Felder.** Von FRANZ OLLENDORFF (Springer Verlag, Wien 1952). 432 S., 287 Abb.; Fr. 67.50.

Das Buch setzt die Kenntnis der Maxwell'schen Gleichungen sowie eine sehr gute mathematische Schulung voraus. Zweck des Buches ist die mathematische und zahlenmäßige Erfassung von magnetischen Feldern, soweit diese für die

Elektrotechnik von Interesse sind. So werden beispielsweise behandelt: Vollpol- und Schenkelpolmaschinen, auch mit genutetem Anker, die Ankerrückwirkung, die Stirnverbindungen, das Nutenproblem vermittelt der Schwarz-Christoffel'schen Differentialgleichung, der Wendepol, die Jochstreuung von Transformatoren, die Induktivität technischer Mehrfachleitersysteme, das Nutenstreuelfeld, die Streufelder von Scheiben- und Zylinderwicklungen bei Transformatoren, die Induktivität von Käfigringen, der Zugmagnet, der Drehmagnet, magnetische Abscheider, Messwerke und elektrodynamische Kräfte bei Sammelschienen, Trennern und Kontakten.

Zur Bewältigung dieser Aufgabe werden alle einschlägigen mathematischen Methoden herangezogen, wie skalare Potentiale und Vektorpotentiale, geradlinige und krummlinige Koordinaten, die durch analytische Funktionen vermittelten konformen Abbildungen für ebene Probleme, ferner die Kugel- und Zylinderfunktionen, Hankelsche und Besselsche Funktionen, Jakobische elliptische Funktionen, Fourier-Reihen usw. Es wird also eingehend Gebrauch gemacht von dem mathematischen Rüstzeug des Physikers. Die Berechnungen werden so weit durchgeführt, dass die zahlenmässige Auswertung möglich wird. Auch die graphische Darstellung wird eingehend gepflegt.

Das Buch ist ausgezeichnet geschrieben und behandelt die Probleme von hoher Warte aus. Es enthält die erstmalige Lösung verschiedener Probleme; auch der Druck ist hervorragend. Das Buch wendet sich an Mathematiker, Physiker und theoretische Elektroingenieure.

Ed. Gerecke

**Studies in Mathematics and Mechanics.** RICHARD VON MISES gewidmet, von Freunden, Kollegen und Schülern (Academic Press, Inc., Publishers, New York 1954). 353 S., 16 Fig.; \$9.00.

Am 19. April 1953 hat RICHARD VON MISES seinen 70. Geburtstag gefeiert; am 14. Juli 1953 hat ihn der Tod ereilt. So ist die als Ehrung des Siebzigjährigen gedachte, von G. BIRKHOFF, G. KUERTI und G. SZEGÖ veranlasste und zusammengestellte Sammlung von Arbeiten, welche die Vielseitigkeit des grossen Forschers und Lehrers aufs eindrucklichste dokumentiert, zum Gedenkband geworden.

Der Band enthält eine kurze Würdigung von RICHARD VON MISES' Persönlichkeit und Werk aus der Feder von PH. FRANK sowie ein vollständiges Verzeichnis seiner Publikationen mit ihren bekannten Höhepunkten in: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*; *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*; *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen in der Statistik und theoretischen Physik*; *Theory of Flight* und *Positivism*; *a Study in Human Understanding*. Als besonderes Charakteristikum dieses Verzeichnisses sei erwähnt, dass es auch eine Anzahl von Veröffentlichungen über RAINER MARIA RILKE enthält.

Die RICHARD VON MISES gewidmeten Arbeiten verteilen sich auf die Gebiete Algebra und Zahlentheorie, Geometrie, Analysis, Theoretische und Angewandte Mechanik, Wahrscheinlichkeit und Statistik.

Die Beiträge aus dem Gebiete der Mechanik sind: J. M. BURGERS, *Some considerations on Turbulent Flow with Shear*; P. R. GARABEDIAN, *An Example of Axially Symmetric Flow with a Free Surface*; G. KUERTI, *On a Class of Spherically Symmetric Flows*; C. C. LIN, *On Periodically Oscillating Wakes in the Oseen Approximation*; CH. LOEWNER, *Some Bounds for the Critical Free Stream Mach Number of a Compressible Flow Around an Obstacle*; G. S. S. LUDFORD, *Two Topics in One-Dimensional Gas Dynamics*; N. MINORSKY, *On the Stroboscopic Method*; L. PÓLYA, *Estimates for Eigenvalues*; W. PRAGER, *On Slow Visco-Plastic Flow*;



J. L. SYNGE, *Relativistically Rigid Surfaces*; P. W. BRIDGMAN, *Certain Aspects of Plastic Flow Under High Stresses*; H. W. EMMONS, *Natural Convection Heat Transfer Correlation*; K. FEDERHOFFER, *Der senkrecht zu seiner Ebene belastete, elastisch gebettete Kreisträger*; A. M. FREUDENTHAL, *On Inelastic Thermal Stresses*; H. and E. REISSNER, *Torsion of a Circular Cylindrical Body by Means of Traction*; *Exerted Upon the Cylindrical Boundary*; A. SIGNORINI, *Una espressiva applicazione della proprietà di media dello stress comuni a tutti i sistemi continui*.

Die Beiträge aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeit und Statistik sind: A. H. COPELAND, Sr., *A Finite Frequency Theory of Probability*; M. FRÉCHET, *Interdépendance du centre et du rayon empiriques de variation de  $n$  observations indépendantes*; F. N. FRENKIEL and J. W. FOLLIN, jr., *On Multivariate Normal Probability Distributions*; Y. GARTI et T. CONSOLI, *Sur la densité de probabilité du produit de variables aléatoires de Pearson du type III*; H. GEIRINGER, *On the Statistical Investigation of Transcendental Numbers*; C. GINI, *Estensioni e portate della teoria della dispersione*; J. NEYMAN and E. L. SCOTT, *On the Problem of Expansion of Clusters of Galaxies*; N. T. UZGÖREN, *The Asymptotic Development of the Distribution of the Extreme Values of a Sample*.  
H. Ziegler

**An Introduction to Power System Analysis.** Von FREDERIK S. ROTH (John Wiley and Sons, New York 1953), 187 S.; \$5.-.

Das Buch behandelt in sehr moderner Form das Verhalten der Ströme, Spannungen und Leistungen bei Einphasen- und Drehstromsystemen von Industriefrequenz im stationären und nichtstationären Zustand. Insbesondere werden der Transformator, der Synchrongenerator und die Freileitung besprochen. Die komplexe Rechnungsweise findet durchgehend Anwendung; Zeigerdiagramme sind jedoch selten. Jedem Kapitel sind am Schlusse zur Einübung des Stoffes Zahlenbeispiele beigegeben.

Nach der Theorie des Transformators werden die symmetrischen Komponenten bei Drehstrom besprochen und die unsymmetrische Belastung bei Stern- und Dreieckschaltung berechnet. Es folgt die Anwendung auf den unsymmetrisch belasteten Drehstromtransformator mit Berücksichtigung der Nullimpedanz. Die anschließende Behandlung der Synchronmaschine im nichtstationären Zustand ist ausserordentlich elegant und klar. Es werden zunächst die in Europa noch wenig bekannten Parkschen Gleichungen für die mit Dämpferwicklungen ausgerüstete Schenkelpolmaschine abgeleitet. Die Parkschen Gleichungen werden nur auf typische Belastungsfälle angewandt, wie zum Beispiel das plötzliche Zuschalten von symmetrischen und unsymmetrischen Belastungsimpedanzen und bei Kurzschlüssen. Es folgt die Beschreibung einer «A-C Network Analyzer installation». Für stark unsymmetrisch belastete Drehstromsysteme zeigen sich ferner die nun erläuterten «Clarke-Komponenten» als nützlich. Es folgt die Berechnung der Konstanten einer Freileitung, wobei auch die Hankelsche Funktion benötigt wird. Die letzten zwei Kapitel sind der elektrischen Stabilität von Freileitungen und den zugehörigen Generatoren gewidmet, unter Verwendung des «power circle diagram».

Der Text ist sehr klar und modern, die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet. Es kann allen Ingenieuren, die sich mit der Energieübertragung beschäftigen, aufs wärmste empfohlen werden.  
Ed. Gerec

**Analytische Geometrie.** Von W. BLASCHKE (Birkhäuser Verlag, Basel 1954) 190 S. mit 67 Abb., geb. sFr. 19.60, brosch. sFr. 16.65.

Der Verfasser hat sich zum Ziele gesetzt, eine Einführung in die rechnerische Behandlung der Geometrie zu schreiben. Während die klassischen Bücher üb-

analytische Geometrie in der Regel nicht über Fragen der affinen und projektiven Geometrie hinausgehen, trägt BLASCHKE im vorliegenden Werk eine Fülle von Problemstellungen aus allen Gebieten der Geometrie zusammen, um daran die Methoden der analytischen Geometrie auseinanderzusetzen. Die Grundlage bildet der Koordinatenbegriff; an Beispielen werden speziell besprochen: die kartesischen, die homogenen, die pentazyklischen und die elliptischen Koordinaten. Besondere Aufmerksamkeit gilt durch das ganze Werk hindurch dem Gruppenbegriff und den Invarianten bezüglich einer Gruppe. Ein längerer Abschnitt ist der Kreis- und Kugelgeometrie gewidmet, ein Gebiet, das dem Verfasser durch eigene Arbeiten besonders nahe liegt. Die Darstellung der Liniengeometrie und der Theorie der quadratischen Formen verdient speziell hervorgehoben zu werden, da diese beiden Gegenstände von Problemstellungen der Mechanik (Statik und Kinematik des starren Körpers) aus entwickelt werden. Das Problem der kürzesten Verbindungen auf Flächen 2. Ordnung bietet Gelegenheit zu einem Beispiel für die Anwendung der Infinitesimalrechnung in der Geometrie.

Das Werk gliedert sich in folgende Abschnitte: I. Grundbegriffe, Vektoren und Matrizen, II. Kugeln, III. Stäbe (Liniengeometrie), IV. Trägheitsmomente (quadratische Formen), V. Quadriken, VI. Konfokale Quadriken, VII. Formelsammlung. – Die Formelsammlung berührt in Form eines Anhangs ohne Beweise auch einige weiterreichende Fragen.

Das vorliegende Werk BLASCHKES breitet auf relativ engem Raum eine Fülle von bekannteren und weniger bekannten geometrischen Erkenntnissen aus und wird dadurch zu einer wahren Fundgrube. Die zahlreich eingeflochtenen historischen Bemerkungen lassen die Namen jener wieder hervortreten (CAYLEY, MÖBIUS, CHASLES u. a.), die mit der Entwicklung der analytischen Geometrie aufs engste verbunden sind. Das Buch ist vortrefflich abgefasst und kann zur Einführung und zur Vertiefung in die analytische Geometrie bestens empfohlen werden.

*M. Jeger*

**Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 71). Von J. MEIXNER und F. W. SCHÄFKE. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1954). 414 S., 29 Abb.; DM 49.–.

Besonders in den letzten Jahren haben die Mathieuschen Funktionen und Sphäroidfunktionen eine ganze Reihe von bemerkenswerten Anwendungen gefunden. Es ist daher zu begrüßen, dass die beiden Verfasser hier ein Werk mit weitgehend lehrbuchmäßigem Charakter vorlegen, das eine abgerundete und zusammenfassende Übersicht bietet über die wichtigsten bekannten Eigenschaften dieser und verwandter Funktionen. Zudem sind noch eine Anzahl bis dahin un veröffentlichter Ergebnisse aufgenommen worden. Die Darstellung ist in mathematischer Strenge durchgeführt worden, und zwar vom funktionentheoretischen Standpunkt aus, indem sowohl für die Variablen als auch für die Parameter beliebige komplexe Werte zugelassen werden.

Im ersten Kapitel sind die mathematischen Grundlagen kurz dargestellt: Überblick der Theorie ganzer Funktionen endlicher Ordnung, Eigenwerttheorie für Probleme mit einem und mit zwei Parametern, dreigliedrige Rekursionen. Das zweite Kapitel enthält die Theorie der Mathieuschen Funktionen, nämlich Eigenschaften der Lösungen, charakteristische Exponenten, Stabilitätskriterien, Additionstheoreme, Reihenentwicklungen, Integralrelationen, Asymptotik. Die entsprechende Theorie der Sphäroidfunktionen wird im folgenden Kapitel dargestellt. Endlich bietet das letzte Kapitel einen trefflichen Ausschnitt aus den man-

nigfachen Anwendungen dieser Funktionen auf mechanische, akustische und elektromagnetische Probleme, wie Schwingungen, Eigenschwingungen, Abstrahlung, Beugung und ferner auf wellenmechanische Probleme. – Methoden zur numerischen Berechnung der Lösungen von Eigenwerten oder charakteristischen Exponenten sind höchstens angedeutet; solche sind ja in andern Werken bereits ausführlich dargestellt. Den Abschluss des Buches bildet ein ziemlich vollständiges Literaturverzeichnis. – Das ausgezeichnete Werk, das in verschiedener Hinsicht eine Lücke in der Literatur ausfüllt, wird allen, die mit diesen Funktionen zu tun haben, sehr nützliche Dienste leisten.

E. Roth-Desmeules

**Introduction to Mathematical Statistics.** Von P. G. HOEL, 2. Aufl. (J. Wiley & Sons, New York 1954). 331 S., 57 Fig.; \$5.00.

Dieses Lehrbuch gibt trotz seines elementaren Charakters eine ausgezeichnete Einführung in die wichtigsten Methoden der modernen mathematischen Statistik. Vor allem sind die klaren Definitionen der benutzten statistischen Begriffe und die entsprechenden «tests» für die Schätzung statistischer Grössen und statistischer Hypothesen hervorzuheben. Ein umfangreiches Übungsmaterial und wichtige statistische Tabellen sorgen dafür, dass dieses Lehrbuch zweifellos von Praktikern und Studenten sehr viel benutzt wird.

W. Saxen

**Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.** Dritter Band *Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen.* Von A. OSTROWSKI (Birkhäuser Verlag, Basel 1954). 475 S., 36 Fig.; Fr. 78.–.

Mit dem nun erschienenen dritten Band, *Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen*, ist das bereits 1945 von A. OSTROWSKI begonnene Werk *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* abgeschlossen worden.

Dieser Band bringt zunächst noch einige Ergänzungen zur Technik des Integrierens, so die Partialbruchzerlegung und gewisse integrable Typen irrationaler und transzendenter Funktionen, samt einem Beweis der Transzendenz von  $e$ . Anschliessend folgt schrittweise eine sorgfältige Einführung des Begriffs des mehrfachen Integrals; seine Berechnung wird im nächsten Kapitel durchgeführt, wo auch die totalen Differentiale und die Variablensubstitution zur Sprache kommen. Das vierte Kapitel ist den Anwendungen mehrfacher Integrale gewidmet, speziell den Oberflächenintegralen, den Sätzen von OSTROGRADSKI und STOKES, diese auch in vektorieller Formulierung – ferner Volumenberechnungen und Schwerpunktsbestimmungen. Im folgenden Kapitel werden die verschiedenen Typen von einfachen uneigentlichen Integralen, deren Eigenschaften und Berechnung dargelegt, während das nächste Kapitel den mehrfachen uneigentlichen Integralen gewidmet ist; hier wird unter anderem auch die Paulische Unbestimmtheitsgleichung abgeleitet sowie die Gammafunktion und die Betafunktion eingeführt. Den Abschluss bildet ein Abschnitt über Fourier-Reihen und Fourierreintegrale. – Den einzelnen Kapiteln sind zahlreiche – im ganzen sind es über tausend – ausgewählte Aufgaben beigelegt, eine Fundgrube interessanter Probleme. Es ist nur zu begrüßen, dass der Verfasser beabsichtigt, die Lösungen der Aufgaben noch separat herauszugeben (das Buch soll ja auch zum Selbststudium geeignet sein).

Das Buch zeichnet sich durch eine grosse Sorgfalt, eine lebendige Darstellung sowie eine ausgesprochene Originalität aus. Die Beweise sind wohl durchdacht und das Ganze zeugt von der grossen Erfahrung des Verfassers. Damit liegt nun ein ausgezeichnetes Werk der Differential- und Integralrechnung vor, das wohl auf längere Zeit hinaus nicht so leicht übertroffen werden wird.

E. Roth-Desmeules



# Transonic Wind Tunnel Test Sections<sup>1)</sup>

By PAUL F. MAEDER and ALBERT D. WOOD, Providence, R. I., USA<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

Since it is generally impossible to predict the performance of an aircraft by purely theoretical means, the Aerodynamics Engineer is accustomed to relying on experimental data obtained in wind tunnels. Theoretical reasoning is then used to establish the laws of similarity between the flow about the model in the wind tunnel and that about the actual aircraft.

As long as the desired flight speeds are well below sonic speed, no particular difficulties are encountered by testing the models either in a closed channel or in a free jet of air. The significant similarity parameter then is the Reynolds number, which can be adjusted by varying either the speed or the density of the airstream.

However, at speeds close to or exceeding the speed of sound, a second similarity parameter, the Mach number, must be considered. Tests now must be performed at particular Mach and Reynolds numbers in order to obtain complete similarity.

With the present day emphasis on such high speed flight the wind tunnel, if it is to be of practical use, certainly must furnish correct aerodynamic data in the transonic speed range. It is particularly desirable to have such reliable experimental results in this range since, due to the nonlinearity of the theoretical problem, the design of transonic aircraft based on theoretical work alone is at this time practically impossible and, at best, will be extremely difficult in the future.

The principal difference between the flow about an aircraft flying in the atmosphere and the flow about its model in the wind tunnel, if the aerodynamic similarity parameters are the same, is caused by the finite extension of the tunnel airstream. It can be shown that in a conventional wind tunnel this difference increases as the speed of sound is approached. Moreover, if a test section with solid walls is used, at a certain subsonic Mach number the model will cause the same effect as the throat of a Laval nozzle. The speed of the upstream flow may be increased no further, and the tunnel is then said to be choked. Supersonic speeds in such a test section can only be attained by inserting a Laval nozzle upstream of the model which has a throat considerably

---

<sup>1)</sup> This work was sponsored by the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command of the United States Air Force.

<sup>2)</sup> Brown University.

smaller than the smallest cross-section at the location of the model. Thus for an appreciable section of the transonic speed range no testing is possible in a closed tunnel. Since the range of Mach numbers in which tests are impossible decreases with increasing tunnel size as  $1/(1 - M_\infty^2)$  for a given model, where  $M_\infty$  is the undisturbed Mach number, huge tunnels with tremendous power requirements would be necessary to obtain useful transonic data, if there were no special transonic test sections available to reduce the wall interference and eliminate choking.

In the following paragraphs the principles of various transonic test sections will be discussed.

## 2. The Influence of the Walls on Data Obtained in a Wind Tunnel

Consider the streamline pattern of the flow about some body in free flight. It consists of a parallel flow of infinite extension into which the body is placed. The body causes the streamlines of the parallel flow to be deflected in such a way that the mass flow inside a stream tube remains constant, and the centrifugal forces caused by the streamline curvature are in equilibrium with the pressure forces.

Assume now that the infinite parallel flow is replaced by a finite stream surrounded by some boundary, as will be the case in a wind tunnel. Then, in general, the streamline pattern about the body will not stay the same. If a solid straight wall is used as the wind tunnel boundary, the streamlines forming the flow about the body are squeezed together more than they would be in free flight. This wall interference introduces an error and leads in some instances to the phenomenon of choking as already mentioned. The calculation of such interference effects at high subsonic speeds is discussed in [1], [2], [3]<sup>3</sup>).

If the tunnel is of the open jet type, i. e. the boundary is essentially one of air at rest, which is unable to support pressure differences, then the curvature of the outside streamlines becomes greater than for an infinite free stream in order to balance the forces caused by the body, since there is no longer any outside flow to resist deformation. A flow pattern will be obtained in which the streamlines are further apart than for free flight. The interference for such a high-speed open jet has also been determined (see, for example [14]).

Thus, if interference is to be reduced or eliminated, some more complicated boundary which simulates the behavior of the free flight streamlines point for point must be found. However, a perusal of the situation shows that this ideal boundary may not always be required in order to obtain essentially interference-free data.

Consider the disturbance induced by the boundary at a point on the body to be tested. If the speed at this point is subsonic, then it will receive inter-

<sup>3</sup>) Numbers in brackets refer to References, page 209.

ference signals from a considerable portion, if not all, of the boundary. Thus the total interference effect for this point is an average of the signals produced by the various portions of the boundary, and therefore the boundary has only to simulate the free flight streamline in the mean.

If the speed at a point on the body is supersonic and the point cannot be reached from the wall along a characteristic line (i. e., the characteristic line extends only to the sonic line) the same averaging process takes place along the sonic line. The only time such averaging does not take place is when the speed at a point on the body is supersonic and it can be reached from the wall along a characteristic line. The wall then must simulate the free flight streamline exactly at the origin of the characteristic line in order to yield zero interference on the body. Even in this latter case it is conceivable that the point on the body is influenced by a great many characteristics originating at different parts of the boundary in such a way that no noticeable interference is produced. Whether or not this is true for a specific boundary will be discussed later in this paper. For the time being this case shall be excluded from the discussion.

If the body is not too large, it is usually sufficient to assume that the interference effects at any point on its surface are equal to the sum of the effects at some other point plus their linear variations in the  $x$ -direction between the two points. That is, the interference is approximated by the first two terms of its Taylor Series expansion. Letting  $u$  and  $v$  represent the velocity components parallel and perpendicular to the wall, respectively, this result may be expressed as:

$$(u_{in})_{x=l} = (u_{in})_{x=0} + l \left( \frac{\partial u_{in}}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad (v_{in})_{x=l} = (v_{in})_{x=0} + l \left( \frac{\partial v_{in}}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

This is the classical method of investigation and is based on determining, at only one point on the body, four types of interference; blockage interference,  $u_{in}$ ; angle of incidence interference,  $v_{in}$ ; buoyancy interference,  $\partial u_{in}/\partial x$ ; and streamline curvature interference,  $\partial v_{in}/\partial x$ . Experience has shown that if one accounts properly for these four types of interference, sufficient agreement between wind tunnel data and free flight data is obtained.

Blockage interference is caused by the effect of the boundary on the distance between streamlines. In subsonic flow one can usually compensate for this effect by applying a correction factor. The body behaves as if it were tested at a higher or lower speed than that measured in the tunnel, depending on the type of boundary used. In transonic flow, however, the tunnel may be either choked (solid wall), or a section of the desired speed range may be lost because of the change in character of the governing equations as the speed of sound is passed. This is, therefore, the type of interference which must receive the greatest amount of attention in the development of a boundary suitable for a transonic wind tunnel.

Angle of incidence interference is present if the slope of the streamlines is changed by the boundary due to its inability to counteract the lifting force of the body in the same manner as would the infinite airstream in free flight. For subsonic flow the well-known angle of attack correction can be applied to the test results to compensate for this type of interference. It is probably possible to apply a similar correction at transonic speeds.

Buoyancy interference appears due to the fact that the boundary may cause a pressure gradient in the flow direction. This pressure gradient causes an additional force in the axial direction which is not present in the free flight condition.

Streamline curvature interference will cause a symmetrical airfoil to behave as if it were cambered, if tested at an angle of attack. That is, the effect of the walls is to change the streamline curvature to that which would be found for a cambered airfoil in free flight.

Thus, except for points on the body which can be reached from the boundary directly along characteristic lines, it is sufficient to find a boundary which either eliminates or allows correction for these four types of interference at one point on the body throughout the transonic speed range.

Since solid wall and open jet boundaries influence the streamline pattern in opposite manners, the solution obviously lies in a combination of the two. Early in the history of wind tunnels it was suggested [4], [5] that a tunnel with two solid and two open walls could be used to eliminate certain types of interference. The next possibility to be investigated was the test section with one or two longitudinal slots [6], [7], [8]. PISTOLESI [9], [10] and the NACA [11] went a step further by using walls with several longitudinal slots. Subsequent investigations with slotted test sections of various shapes [12]–[23] have shown that acceptable results can be obtained at transonic speeds. The idea of using perforations to produce the partly open effect [23], [31]–[37] evolved gradually from the use of porous walls [24]–[30] which, because of viscous effects, yield a homogeneous boundary condition for which the pressure drop across the wall is proportional to the mass passing through it. Although each of these transonic test sections utilizes the idea of a partially open boundary, a clear understanding of how the various boundaries are connected in their physical and mathematical aspects has been attained only gradually.

### 3. The Boundary Condition Along Partly Open Walls

#### A. General Remarks

It will be helpful, before carrying out the mathematical analysis, to make a few general statements concerning partly open walls. As has already been mentioned, a satisfactory transonic test section must have some partly open



wall surface. The flow through the wall is controlled by varying the difference between the pressure  $P_p$  of the plenum chamber on one side of the wall and the pressure  $P$  at a point in the test section which is far from the wall relative to the spacing of the wall openings. If  $\Delta P = P - P_p = 0$  there is no flow through the wall, and the flow through the test section will have the undisturbed velocity  $U$ ; if  $\Delta P = 0$ , however, there will be a flow through the wall. The flow in the test section may then be found by superposition of a perturbation flow onto the undisturbed flow.

Without loss of generality this perturbation flow may be considered to be normal to the undisturbed flow at the openings. Thus the exact inhomogeneous boundary conditions become  $u' = 0$  at the openings and, since there is no flow normal to the solid portions of the walls,  $v' = 0$  elsewhere. These conditions, in turn, imply that the perturbation potential  $\phi'$  is constant across the openings and the perturbation stream function  $\psi'$  is constant elsewhere. Since for longitudinal and swept slots these perturbation quantities vanish as  $x$  approaches infinity, the conclusion is that  $\phi' = 0$  at the slots and  $\psi' = 0$  elsewhere. Now transverse slots are merely a special case of swept slots, and, as will be shown, the behavior of perforated walls is also similar to that of non-longitudinal slots. Thus the previous boundary conditions will be applicable to these cases also.

At some distance far from the wall (relative to the spacing of the openings) the perturbation effects are averaged, yielding the velocities  $\bar{u}'$  and  $\bar{v}'$ . Assuming an incompressible flow of density  $\rho$ , Bernoulli's equation between such a point and an opening (over which the pressure is  $P_p$ ) becomes

$$P + \frac{\rho}{2} [(U + \bar{u}')^2 + \bar{v}'^2] = P_p + \frac{\rho}{2} [U^2 + v'^2]. \quad (1)$$

Neglecting the squares of the perturbation velocities, this equation simplifies to

$$\Delta P = P - P_p = -\rho U \bar{u}'. \quad (2)$$

Thus the assumption of zero perturbation velocity in the axial direction at the openings requires that an axial perturbation velocity be introduced at some distance from the wall to account for the pressure difference across the wall. In actual practice the pressure difference across the wall for an empty test section will be zero, and the axial perturbation velocity will arise only when a body is placed in the test section.

The original theoretical investigations to determine the interference in test sections with longitudinal slots (the so-called slotted wall test sections) were carried out by using at the walls the exact inhomogeneous boundary conditions just described [9]–[17]. These inhomogeneous boundary conditions led to a rather involved problem, since they caused basically simple flows, such as

two-dimensional or axially symmetrical flows, to become generally three-dimensional. In order to determine how slotted walls could be expected to reduce subsonic interference, either rash approximations had to be made, or extensive numerical work, usually requiring an electronic computer, had to be carried out to obtain the flow for even a few special cases.

More recent investigations have shown, however, that it is sufficient in virtually all practical cases to replace the inhomogeneous boundary by a corresponding homogeneous mean boundary [18]–[21], [23] which, at some distance from the wall which is large compared to the distance between individual slots, will yield the same flow conditions as the inhomogeneous boundary (i. e., the  $\bar{u}'$  and  $\bar{v}'$  already mentioned). If a great number of slots is employed, the introduction of such a mean condition is certainly permissible.

The use of perforated walls has developed gradually from the concept of a porous wall. Since the flow through a porous wall is that of slow viscous motion, a linear relationship between the pressure difference across the wall and the mean velocity component normal to the wall is obtained. Adopting the convention that positive values of  $\bar{v}'$  represent an outflow through the wall, the approximation of equation (2) then leads to the mathematical condition

$$\bar{u}' = -k \bar{v}' \quad (3)$$

where  $k$  is a positive constant of proportionality.

If the diameter of the openings in the porous material is enlarged so that turbulent flow creates the pressure difference, the boundary condition assumes the mathematically inconvenient form

$$\bar{u}' = \pm k \bar{v}'^2 \quad (4)$$

the plus or minus sign depending on whether the flow through the wall is inward or outward respectively.

In actual applications the walls employed are relatively thin. The hole diameter is at least of the order of, if not considerably larger than, the wall thickness. The flow then resembles the orifice problem, which as is well known can be explained by potential flow, neglecting viscous effects. Thus it was first assumed that the pressure in the hole cross-section would be proportional to the square of the normal velocity through it, leading to the same unfortunate nonlinear boundary condition as given by equation (4). It soon became obvious, however, that this is not the case, since the air will retain a considerable part, if not all, of its undisturbed flow velocity at the cross-section of the hole. The problem is thus essentially one of flow at shallow angles through a perforated wall, which can be likened to the flow about a series of wings at small angle of attack, the solid portions between the holes representing irregularly-shaped wings. The pressure difference set up by the perforated wall is then proportional



to the lift on the solid portions and thus to the mean normal component of velocity, so that one is again led to the boundary condition (3) for perforated walls.

This linear behavior is illustrated in Figures 1 and 2. Figure 1 shows experimental results for flow past a transverse slot and a circular hole, as well as the theoretical linear relationship of equation (3) and quadratic relationship

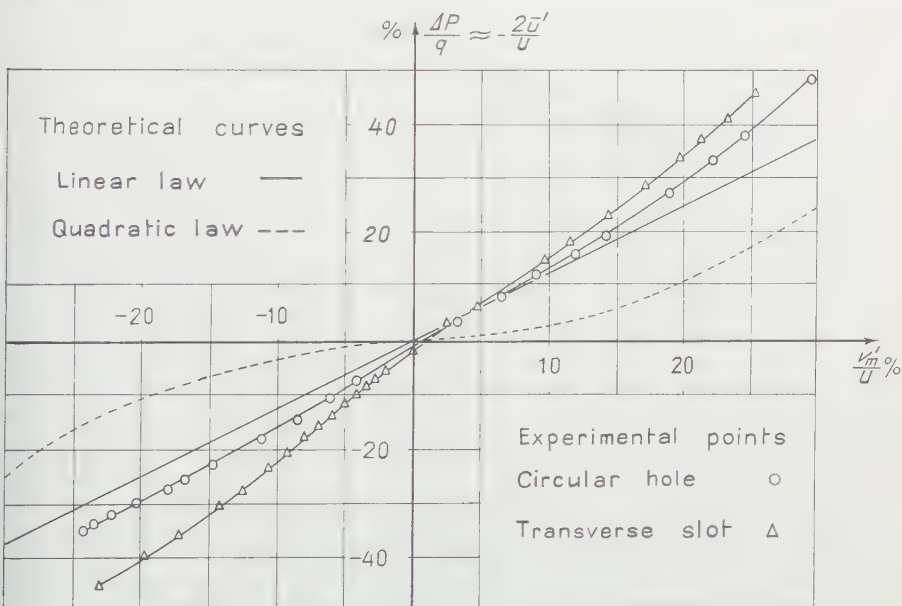


Figure 1

Characteristics of a one inch transverse slot and a four square inch circular hole.

of equation (4). Note that positive values of  $v_m'$ , the mean normal velocity across the opening, represent an outflow through the wall (that is, the main flow is considered to be in the lower half plane,  $y < 0$ ). The theoretical relationships are derived in more detail in [37]. Figure 2 shows experimental results for flow past perforated walls of different ratios  $\delta$  of open to total surface. Again positive values of  $\bar{v}'$  represent an outflow through the wall. While these experimental curves verify the linear relationship, it is seen that they actually pass slightly to the right of the origin, indicating that there is some outflow even where there is no pressure difference across the wall. This is caused by turbulent mixing through the wall, as explained in [34].

It should be pointed out that, in order to generate lift, a Kutta condition must be imposed on the flow at the trailing edges of the solid portions (leading

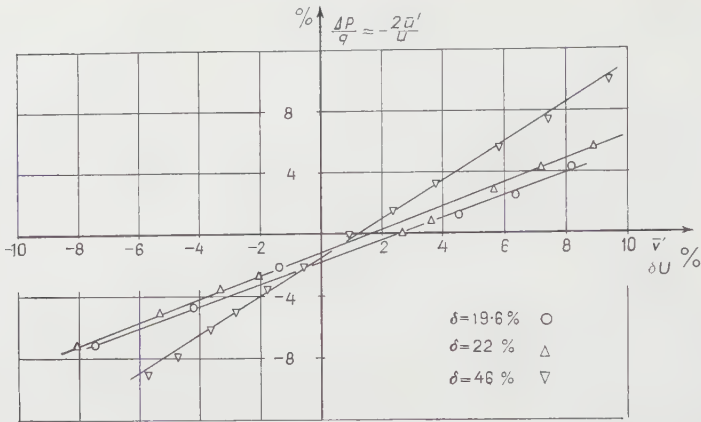


Figure 2  
Wall characteristics of several types of perforated sheets.

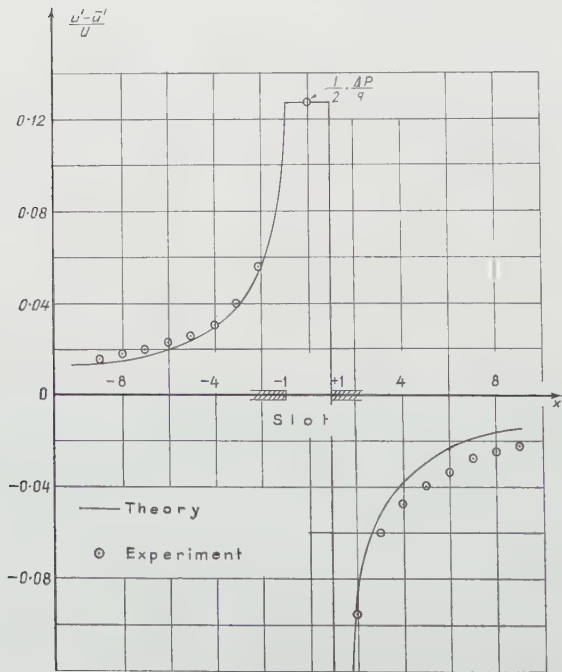


Figure 3  
Perturbation velocity distribution along the wall for a single transverse slot.



denoted by  $s - 2nl$ . Then, in terms of the complex variable  $z = x + iy$ :

$$c^{*'} = A \left\{ \frac{\pi (z - s - 2nl)}{\sqrt{\frac{\pi (z - a - 2nl)(z + a - 2nl)}{\sin(\pi/2l)(z - a)\sin(\pi/2l)(z + a)}}} \right\} \quad (5)$$

where  $A$  is a real constant.

Since the real part of this function vanishes for  $y = 0$  and

$$2nl - a < x < 2nl + a,$$

while the imaginary part is zero everywhere else on the  $x$ -axis, this solution satisfies the required boundary conditions. As long as  $s$  is not determined by some additional condition (Kutta condition or, in the case of longitudinal slots, requirement of symmetry) this represents an infinity of solutions. It contains all possible flows satisfying the stated boundary conditions for which the physical half plane is mapped into a single Riemann surface of the hodograph. The two basic flows, a linear combination of which forms all these possible solutions, are obtained for  $s = 0$  and  $s = l$ .

If the conjugate perturbation velocity is integrated and the integration constant is determined such that the perturbation potential is zero within the slots and the perturbation stream function is zero on the solid portion of the wall, the complex perturbation potential is obtained as

$$\Phi' = -A \left\{ \frac{2l}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi s}{2l} \ln \left[ \frac{\sin(\pi z/2l)}{\sin(\pi \sigma/2)} + \sqrt{\frac{\sin^2(\pi z/2l)}{\sin^2(\pi \sigma/2)} - 1} \right] \right. \right. \quad (6)$$

$$\left. \left. + i \cos \frac{\pi s}{2l} \ln \left[ \frac{\cos(\pi z/2l)}{\cos(\pi \sigma/2)} + \sqrt{\frac{\cos^2(\pi z/2l)}{\cos^2(\pi \sigma/2)} - 1} \right] \right\} \right\}$$

where  $\sigma = a/l$  denotes the ratio of open to total wall area.

The complex perturbation potential  $\Phi'$  and the conjugate perturbation velocity  $c^{*'}$  are now evaluated at some distance  $y = -\Delta y$  from the wall such that  $\Delta y/l \gg 1$ , i. e., where the disturbances caused by the wall are averaged. Note that the undisturbed flow is again located in the lower half plane. Clearly for sufficiently closely spaced slots this condition may be satisfied quite close to the wall, yielding the mean conditions

$$\Phi' = A \left\{ z e^{i\pi s/2l} + i l \sin \frac{\pi s}{2l} + \frac{2l}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2l} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2} \right. \quad (7)$$

$$\left. + i \frac{2l}{\pi} \cos \frac{\pi s}{2l} \ln \cos \frac{\pi \sigma}{2} \right\},$$

$$\bar{c}^{*'} = \frac{d\Phi'}{dz} = \bar{u}' - i\bar{v}' = A e^{-i\pi s/2l}, \tag{8}$$

$$\bar{v}' = \bar{u}' \tan \frac{\pi s}{2l} = A \sin \frac{\pi s}{2l}. \tag{9}$$

Separating real and imaginary parts in equation (7) and evaluating the constant  $A$  from equation (9) yields the perturbation potential at  $y = -ly$ :

$$\bar{\varphi}'_{y=-ly} = \bar{v}' x \cot \frac{\pi s}{2l} - \bar{v}' ly + \bar{v}' \frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}.$$

If this mean flow were extended to the wall at  $y = 0$ , it would have approximately the potential  $\bar{\varphi}_{y=0} = \bar{\varphi}'_{y=-ly} - \bar{v}' ly$ . Thus the mean boundary condition at the wall for an incompressible flow becomes

$$\bar{\varphi}' = \bar{v}' x \cot \frac{\pi s}{2l} + \bar{v}' \frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}.$$

This result may be applied to slots swept back at an angle  $\Omega$  by replacing  $x$  with  $x \cos \Omega$  and may be further modified for use in linearized compressible flows with the aid of the Prandtl-Glauert rule. The expression then becomes

$$\bar{\varphi}' \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \Omega} = \bar{v}' x \cos \Omega \cot \frac{\pi s}{2l} + \bar{v}' \frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}.$$

This boundary condition is now matched with the actual flow in a slotted wall test section containing a model; that is  $\bar{\varphi}'$  and  $\bar{v}'$  are identified with the perturbation quantities  $\varphi'$  and  $v'$  induced by the model, and  $\bar{v}' x$  is identified with the stream function  $\psi'$  indicating the quantity of fluid leaving the test section. Then

$$\varphi' \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \Omega} = \psi' \cot \left( -\frac{\pi s}{2l} \right) \cos \Omega + v' \frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}. \tag{10}$$

This is the mean boundary condition to be imposed at the upper wall for a linearized compressible flow inside a test section with a large number of slots swept back at an angle  $\Omega$ .

In order to obtain a better physical understanding of the various terms, equation (10) is differentiated with respect to  $x$ .

$$u' \sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2 \Omega} = v' \cot \frac{\pi s}{2l} \cos \Omega + \frac{1}{\pi} (2l v'_x) \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}. \tag{11}$$

If longitudinal slots are employed ( $\cos \Omega = 0$ ) the first term on the right hand side vanishes. Then

$$u' + C v'_x = 0 \tag{12a}$$

where

$$C = -\frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}. \tag{12b}$$

The boundary condition for longitudinal slots may be interpreted as stating that the pressure difference across the wall is proportional to the streamline curvature and is not influenced by compressibility. Since the basic theory is identical to slender wing theory, the boundary condition will remain the same for slightly perturbed subsonic and, excluding waves of finite strength, transonic and supersonic flows.

For the case where  $\cos \Omega \neq 0$  a Kutta condition must be imposed on the flow at the upstream edge of the slot. Hence the perturbation velocity possesses a zero there, and the quantity  $s/l$  becomes  $\sigma$ , thereby determining the magnitude of the coefficient of the first term on the right of equation (11). The second term on the right, containing as a factor the change of the normal velocity over a single slot spacing, is then much smaller than the first term, since the ratio of the coefficients of the two terms is of order unity. Thus the second term can be neglected as soon as the Kutta condition takes effect. The boundary condition for a test section with non-longitudinal slots then becomes

$$u' + \cot \theta_c v' = 0 \quad (13a)$$

where

$$\cot \theta_c = \cot \frac{\pi \sigma}{2} \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \Omega - M_\infty^2}}. \quad (13b)$$

This boundary condition, which contains a Mach number effect, is valid for supersonic as well as subsonic flows, provided the slots are swept well behind the Mach cone.

A similar condition, with a different constant  $\cot \theta_c$  however, will be correct for perforated walls. This constant will be smaller than for the case of transverse slots ( $\Omega = 0$ ), and the Mach number effect will be greatly reduced if the perforations are circular.

It should be noted that the ratio of open to total wall area can be reduced in the swept slot case by increasing the angle of sweep and in the longitudinal slot case by decreasing the distance between slots (relative to test section height). This is of considerable importance, since the friction losses increase rapidly as the percentage of open wall area is increased.

#### 4. Subsonic Interference in Partially Open Test Sections

##### A. Wall with Longitudinal Slots

As already mentioned, the early work on subsonic interference in the slotted wall tunnel was carried out by using the exact boundary conditions that  $u' = 0$  at the openings and  $v' = 0$  at the solid portions of the wall; it soon became apparent, however, that the use of a mean boundary condition furnished results of sufficient accuracy. In fact, since the work with the exact theory



must be carried out in some instances numerically with infinite series, of which only a finite number of terms can be considered, the use of the mean boundary condition, besides simplifying the problem considerably, seems to yield more accurate results.

Subsonic interference, using the linearized approach, has been determined for a number of cases by various investigators using several different techniques. The most promising of these methods seems to involve the use of Fourier integrals in the two-dimensional case and integrals of Bessel functions in the three-dimensional case of a circular tunnel. In such a way blockage, buoyancy, angle of incidence, and streamline curvature interferences have been evaluated for tunnels containing a two- or three-dimensional doublet, a lifting wing of finite thickness, or a source simulating the wake of a model. (See particularly [20], [21], [22].)

If a rectangular wind tunnel with solid side walls and slotted top and bottom walls is to be employed, the interference for two-dimensional models can be modified to obtain approximate values of interference for three-dimensional models in the tunnel.

A rectangular wind tunnel with all four walls slotted will yield approximately the same interference as a circular tunnel of equal cross-sectional area.

The method to be followed in a tunnel with solid side walls and transonic (partially open) top and bottom walls containing a two-dimensional model will be discussed in some detail in a later section.

### *B. Perforated and Porous Walls*

Since the mathematical formulation of the mean boundary condition at a perforated wall is the same as for a porous wall, the work done on the porous wall tunnel can be applied for perforated walls also. Again the method of Fourier integrals or integrals of Bessel functions will lead to the desired results in a most elegant fashion. Other techniques, such as Fourier series and image methods, have also been applied to the problem.

The cases evaluated include the circular tunnel containing a three-dimensional doublet or lifting wing of negligible span and the tunnel with two perforated and two solid walls containing two-dimensional singularities. (See [27], [28], [30].) The treatment of the finite wing in the latter tunnel encounters difficulties which have not been overcome as yet, since for the flow in the Trefftz plane (where  $u' = 0$ ), the boundary condition of equation (13a) becomes that of the closed tunnel ( $v' = 0$ ). Thus the calculations would have to be carried out in the complete three-dimensional system. Images of the lifting wing itself will be similar to the images of a two-dimensional vortex between perforated walls, while the images of the trailing vortices will be the same as if a solid boundary were employed. The angle of incidence interference due to

the trailing vortices will therefore be the same in a perforated test section as in a closed tunnel, since the presence of the solid lateral portions of the perforated wall insures the existence of a Kutta condition and the resulting boundary condition of equation (13a). It may be possible to obtain the angle of incidence correction required in the tunnel with two perforated and two solid walls on this basis.

Interference can be estimated for the rectangular tunnel with four perforated walls by comparing it with that of the circular tunnel of the same cross-sectional area.

### *C. Interference in the Tunnel with Two Solid and Two Transonic Walls*

It has been shown that the exact boundary conditions for a wall with longitudinal slots and a wall with perforations or non-longitudinal slots may be approximated by the mean boundary conditions of equations (12a) and (13a) respectively. Thus the general mean boundary condition for a test section of height  $h$  with transonic top and bottom walls, assuming incompressible flow, may be expressed by  $y = \pm h/2$ :

$$\varphi' = \pm \psi' \cot \theta_0 \mp C v' \quad (14)$$

where the constants  $\theta_0$  and  $C$  are given by the following relations.  
Longitudinal slots:

$$\cot \theta_0 = 0, \quad C = -\frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi \sigma}{2}; \quad (15a)$$

transverse or swept slots:

$$\cot \theta_0 = \cot \frac{\pi \sigma}{2} \cos \Omega, \quad C = 0; \quad (15b)$$

perforated walls:

$$\cot \theta_0 = \text{const} > 0, \quad C = 0. \quad (15c)$$

The flow in a wind tunnel containing such walls together with solid side walls must satisfy this boundary condition at the partly open walls. If the tunnel contains a two-dimensional model the problem is entirely two-dimensional, and the complex perturbation potential of the flow can be expressed as a Fourier integral. That is,

$$\Phi'(z) = \Phi'_b(z) + \Phi'_{in}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{itz/h} dt \quad (16)$$

where

$$A(t) = B(t) + I(t). \quad (17)$$

In these relations  $\Phi'_b(z)$ ,  $B(t)$  and  $\Phi_{in}(z)$ ,  $I(t)$  refer to the complex potential and its Fourier transform for the basic free flight perturbation flow and the interference flow (due to the influence of the walls) respectively.  $A(t)$ ,  $B(t)$  and  $I(t)$  are complex functions of the real variable  $t$ .

Since the interference at the body is due to the effects of the walls as influenced by the body, the basic flow may be simply approximated (doublet for thickness of body, single vortex for lift, source for wake, etc.) for calculation of interference effects. The basic flow, then, is known and becomes

$$\Phi'_b(z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{itz/h} dt = \int_0^{\infty} \{ B(t) e^{itz/h} + B(-t) e^{-itz/h} \} dt. \quad (18)$$

Since the model is located on the  $x$ -axis at the center of the test section, the flow will possess singularities only there. Consequently the integrals of equation (18) must converge elsewhere, and it becomes necessary to distinguish between  $B(t)$  and  $B(-t)$  for positive and negative values of  $y$  respectively in order to insure such convergence.

$$\left. \begin{aligned} y > 0, \quad z = i p h: \quad B(t) &= L^{-1} \{ \Phi'_b(i p h) \}, \quad B(-t) = 0, \\ y < 0, \quad z = -i p h: \quad B(t) &= 0, \quad B(-t) = L^{-1} \{ \Phi'_b(-i p h) \}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

In these expressions  $p$  is some complex number whose real part is positive, and  $L^{-1} \{ g(p) \} = f(t)$  denotes the inverse Laplace transform of the function  $g(p)$  such that:

$$g(p) = \int_0^{\infty} L^{-1} \{ g(p) \} e^{-pt} dt = L \{ f(t) \}. \quad (20)$$

These inverse Laplace transforms can be obtained from tables for all flows of interest.

The general mean boundary condition for partly open walls and an incompressible flow [equation (14)] may now be rewritten in terms of the complex perturbation potential:

$$y = \pm \frac{h}{2}: \quad e^{\mp i \theta_0} \Phi' - e^{\pm i \theta_0} \Phi^{*'} + C \sin \theta_0 \left[ \frac{d\Phi'}{dz} - \left( \frac{d\Phi'}{dz} \right)^* \right] = 0, \quad (21)$$

since:

$$2 \varphi' = \Phi' + \Phi^{*'}, \quad 2 i \psi' = \Phi' - \Phi^{*'}, \quad -2 i v' = \frac{d\Phi'}{dz} - \left( \frac{d\Phi'}{dz} \right)^*$$

where the asterisk denotes the conjugate of the function. If equation (16) is substituted into this general boundary condition and use is made of the fact that the resulting equation must be satisfied at all points on the boundary

(i. e., for all  $x$ ), the condition to be satisfied by the coefficient function  $A(t)$  is found.

For  $y = h/2$  (top wall):

$$A(t) \alpha^* (-t) = A^* (-t) \alpha(t), \quad (22a)$$

for  $y = -h/2$  (bottom wall):

$$A(t) \alpha(t) = A^* (-t) \alpha^* (-t), \quad (22b)$$

where:

$$\alpha(t) = e^{i/2} \left( e^{i\theta_0} + i \frac{C}{h} t \sin \theta_0 \right). \quad (23)$$

If the result of equation (17) together with the values for  $B(t)$  and  $B(-t)$  from equation (19) are now substituted into these equations and the resulting system is solved for  $I(t)$  and  $I(-t)$  one obtains:

$$I(t) = \frac{\alpha^* (-t)}{\alpha^{*2}(t) - \alpha^{*2}(-t)} \left[ L^{-1} \{ \Phi'_b(i p h) \} \alpha^* (-t) + L^{-1} \{ \Phi'_b(-i p h) \} \alpha(t) \right], \quad (24)$$

$$I(-t) = \frac{\alpha(-t)}{\alpha^{*2}(t) - \alpha^{*2}(-t)} \left[ L^{-1} \{ \Phi'_b(i p h) \} \alpha^*(t) - L^{-1} \{ \Phi'_b(-i p h) \} \alpha(-t) \right]. \quad (25)$$

Thus the complex interference potential may be found in terms of the integral of a function involving known inverse Laplace transforms, since

$$\Phi_{in}(z) = \int_0^\infty \{ I(t) e^{i t z/h} + I(-t) e^{-i t z/h} \} dt. \quad (26)$$

Generally the integration can be carried out in closed form only if  $C = 0$ , i.e., if perforated walls or non-longitudinal slots are employed. However, it is not too difficult to perform the integration numerically for the derivative,  $d\Phi_{in}/dz$ , at  $z = 0$ , for  $C \neq 0$ , thus obtaining the interference velocities at the origin.

As an example, the complex interference potential due to a two-dimensional doublet located at the center of the test section shall be evaluated. The inverse Laplace transforms for the free flight complex perturbation potential of the doublet  $\Phi'_b = M/2 \pi z$  are:

$$y > 0: \quad L^{-1} \{ \Phi'_b(i p h) \} = -i \frac{M}{2 \pi h} 1(t), \quad (27a)$$

$$y < 0: \quad L^{-1} \{ \Phi'_b(-i p h) \} = i \frac{M}{2 \pi h} 1(t) \quad (27b)$$

where  $1(t)$  denotes the Heaviside unit function.

$$1(t) = 0 \quad (t < 0), \quad (28a)$$

$$1(t) = 1 \quad (t > 0). \quad (28b)$$

By combining the results of equations (24)–(28b) the complex interference potential is obtained:

$$\Phi_{in}(z) = -i \frac{M}{2\pi h} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{\alpha(t)}{z^*(-t)} - 1 \right]^{-1} e^{itz/h} - \left[ \frac{\alpha^*(t)}{z(-t)} - 1 \right]^{-1} e^{-itz/h} \right\} dt. \quad (29)$$

For longitudinal slots  $\theta_0 = \pi/2$ , and hence

$$\alpha(t) = i e^{t/2} \left( 1 + \frac{C}{h} t \right), \quad (30)$$

$$\Phi_{in} = -\frac{M}{\pi h} \int_0^\infty \left\{ 1 + e^t \frac{1 + (Ct/h)}{1 - (Ct/h)} \right\}^{-1} \sin t \frac{z}{h} dt \quad (31)$$

which at  $z = 0$  yields the conjugate interference velocity as a function of  $C/h$ :

$$(C_{in}^*)_{z=0} = \left( \frac{d\Phi_{in}}{dz} \right)_{z=0} = -\frac{M}{\pi h^2} \int_0^\infty \left\{ 1 + e^t \left( \frac{1 + (Ct/h)}{1 - (Ct/h)} \right) \right\}^{-1} t dt. \quad (32)$$

Since  $C/h$  varies from zero for the completely open test section to infinity for the completely closed test section, it is more convenient to plot the interference velocity as a function of the parameter

$$T = \frac{1 - (C/h)}{1 + (C/h)},$$

which varies from  $-1$  for the closed test section to  $+1$  for the open test section. This tunnel parameter  $T$  is plotted in Figure 5 in terms of  $\sigma$ , the ratio of open

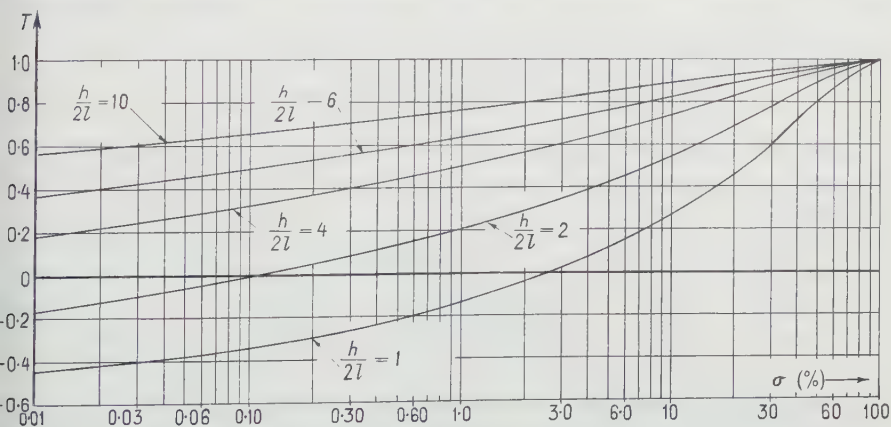


Figure 5

Tunnel parameter  $T$  for various slotted wall test sections.

to total wall area, and  $h/2l$ , the ratio of tunnel height to slot spacing. Within linearized theory  $T$  is not influenced by compressibility.

Since the integral of equation (32) is real, the angle of incidence interference  $v_{in}$  vanishes at  $z = 0$ , and hence the relation directly yields the blockage interference  $u_{in}$ , which is plotted in Figure 6 as a function of  $T$ . It is seen that for  $T = 0.25$  ( $C/h = 0.60$ ) the blockage interference vanishes.

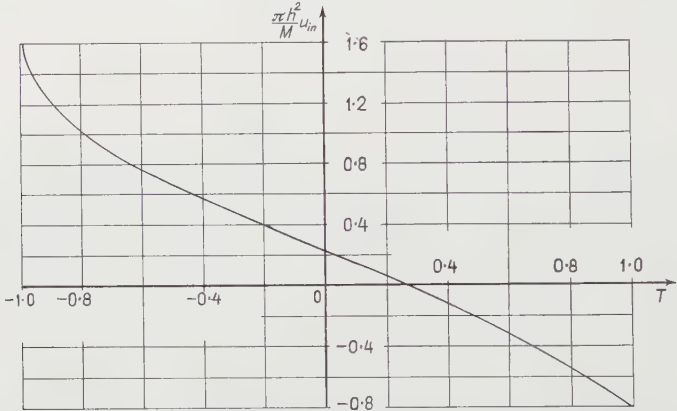


Figure 6

Blockage interference on a two-dimensional doublet located at the center of a slotted wall test section.

For non-longitudinal slots or perforated walls  $C = 0$ , so

$$\alpha(t) = e^{(t/2) + i\theta_0}.$$

For this case, with the aid of [44], the integration of equation (29) can be carried out, yielding an interference potential:

$$\Phi_{in} = \frac{M}{2h} e^{2\theta_0 z/h} \left\{ \coth \frac{\pi z}{h} - 1 \right\} - \frac{M}{2\pi z}. \quad (33)$$

Since this function is analytic at  $z = 0$ , it may be expanded in a Taylor series about this point, thus yielding the various interferences at the location of the model.

$$\Phi_{in} = \frac{M}{2h} \left\{ \frac{2\theta_0 - \pi}{\pi} + \frac{6\theta_0^2 - 6\pi\theta_0 + \pi^2}{3\pi} \left( \frac{z}{h} \right) + \frac{4\theta_0^3 - 6\pi\theta_0^2 + 2\pi^2\theta_0}{3\pi} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (34)$$

The blockage and buoyancy interferences at  $z = 0$  are then obtained as:

$$(u_{in})_{z=0} = \mathcal{R} \left( \frac{d\Phi_{in}}{dz} \right)_{z=0} = \frac{M}{2h^2} \left( \frac{2}{\pi} \theta_0^2 - 2\theta_0 + \frac{\pi}{3} \right), \quad (35)$$



$$\left( \frac{\partial u_{in}}{\partial x} \right)_{z=0} = \mathcal{R} \left( \frac{d^2 \Phi_{in}}{dz^2} \right)_{z=0} = \frac{M}{h^3} \theta_0 \left( \frac{4}{3} \pi \theta_0^2 - 2 \theta_0 + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (36)$$

where  $\mathcal{R}$  denotes the real part of the function.

Making use of equation (35), and recalling that  $\cot \theta_0$  is a positive constant [equations (15b) and (15c)], and hence  $\theta_0 < \pi/2$ , it is seen that for a wind tunnel with perforated walls or non-longitudinal slots the blockage interference for a two-dimensional doublet located at the center of the test section vanishes at the doublet for

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (37)$$

However, if the wall is adjusted to meet this condition, a buoyancy correction, given by

$$\left( \frac{\partial u_{in}}{\partial x} \right)_{u_{in}=0} = \frac{M}{h^3} \cdot \frac{\pi^2}{9\sqrt{3}} \quad (38)$$

must still be applied. This is one of the distinguishing features between the perforated wall and longitudinal slots, where, for the doublet, the second derivative of the complex interference potential, and hence the buoyancy correction, vanishes at  $z = 0$ , as is easily shown from equation (31).

If the Prandtl-Glauert rule is applied to the flow in the perforated wall tunnel, it is seen that the required boundary condition is Mach number dependent. That is,

$$y = \pm \frac{h}{2} : \frac{u'_c}{v'_c} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \frac{u'_i}{v'_i} = \mp \frac{\cot \theta_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (39)$$

where the subscripts  $c$  and  $i$  refer to the compressible and incompressible cases respectively.

A comparison of equation (39), which is also valid for a wall with non-longitudinal slots, with the boundary condition for compressible flow past the upper wall, as expressed by equations (13a) and (13b), shows that

$$\cot \theta_0 = \cot \frac{\pi \sigma}{2} \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{\sec^2 \Omega - M_\infty^2}}.$$

Combining this with the condition for vanishing blockage interference, as expressed by equation (37), yields

$$\sigma = \frac{2}{\pi} \cot^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\sec^2 \Omega - M_\infty^2}{1 - M_\infty^2}} \tan \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right\} \quad (40)$$

as the condition for zero blockage interference on a doublet at the center of a test section with non-longitudinal slots for compressible flow. For transverse slots ( $\Omega = 0$ ) the Mach number influence vanishes and  $\sigma = 42.3\%$  is obtained.

### D. Discussion of Some Additional Interference Results

Making use of the method just described a variety of results have been obtained for wind tunnels with two transonic and two solid walls. (See, for example, [20].) Figure 7 shows, for incompressible flow, the variation of the blockage interference along the axis of a wind tunnel for longitudinal slots and perforated walls due to a doublet located at the center of the test section. The non-symmetrical behavior for the perforated wall tunnel, which is due to the Kutta condition employed at the wall, is clearly evident.

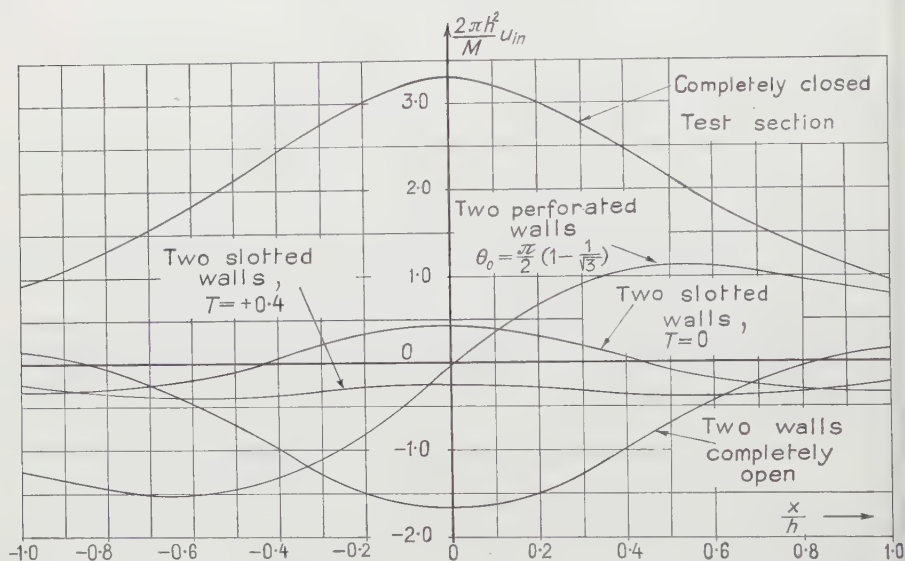


Figure 7

Blockage interference along the tunnel axis due to a two-dimensional doublet located at the center of a partially open test section.

Figure 8 illustrates, for incompressible flow, the variation of blockage interference along the axis in a tunnel with longitudinal slots due to a two-dimensional source of strength  $Q$  which is located at the center of the test section. This interference vanishes at the source for all cases except the completely closed tunnel. It can be shown [20] that the buoyancy correction due to the source vanishes for the same value of  $T$  for which the two-dimensional doublet yields zero blockage interference. Thus in the tunnel with longitudinal slots blockage and buoyancy interference due to both the model and its wake vanish if the correct wall is chosen.

By considering the flow in the Trefftz plane the angle of incidence correction can be determined for longitudinally slotted walls. For the two-dimensional

wing in such a tunnel this correction obeys the extremely simple relation [20].

$$\Delta\alpha = \frac{v_{in}}{U} = -\frac{d}{4h} \cdot \frac{C_L}{1 + 2(C/h)} \quad (41)$$

where  $d$  denotes the wing chord,  $C_L$  the lift coefficient, and  $C$  the tunnel parameter as defined by equation (15a).

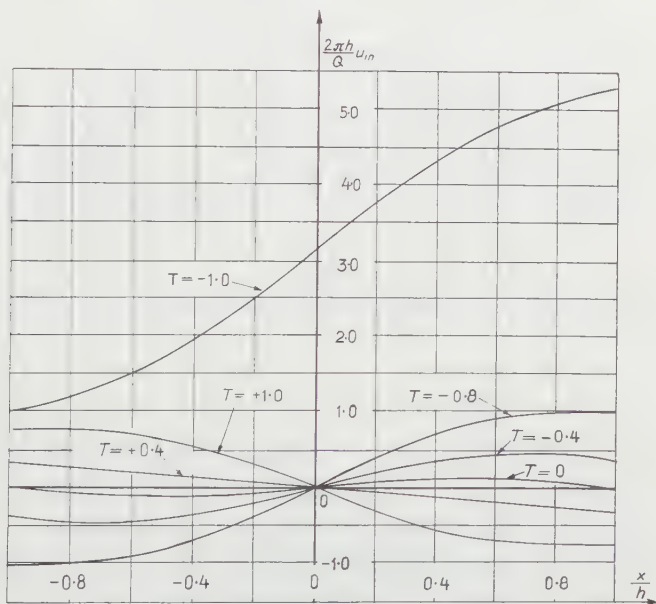


Figure 8

Blockage interference along the tunnel axis due to a two-dimensional source located at the center of a slotted wall test section.

The angle of incidence interference for incompressible flow past a finite wing at the center of a square test section with longitudinally slotted top and bottom walls, as derived in [20], is given in Figure 9 for different values of  $\beta$ , the ratio of effective wing span to tunnel width. The cross-section area of the test section is denoted by  $A$  and the wing planform area by  $S$ . Figure 10 gives the value of this correction for test sections with different values of  $\lambda$ , the ratio of tunnel width to height, for wings of small  $\beta$ .

Using an approximate method described in [20], the blockage interference at  $z = 0$  for incompressible flow past a finite wing at the center of a square test section with longitudinally slotted upper and lower walls may be determined. These results are plotted in Figure 11, where  $M$  denotes the strength

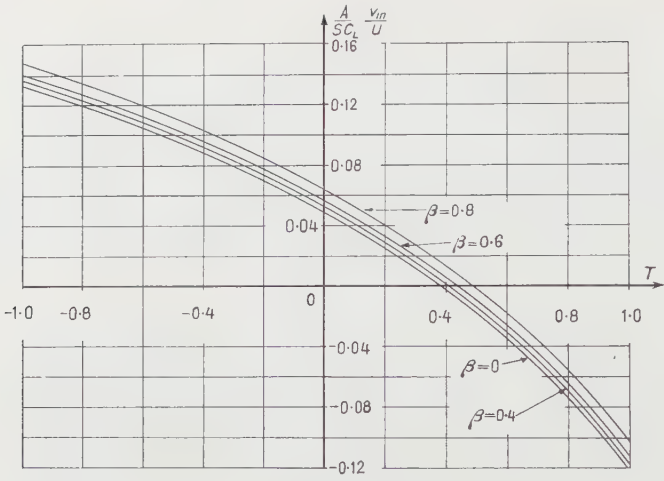


Figure 9

Angle of incidence interference on a finite wing located at the center of a square slotted wall test section.

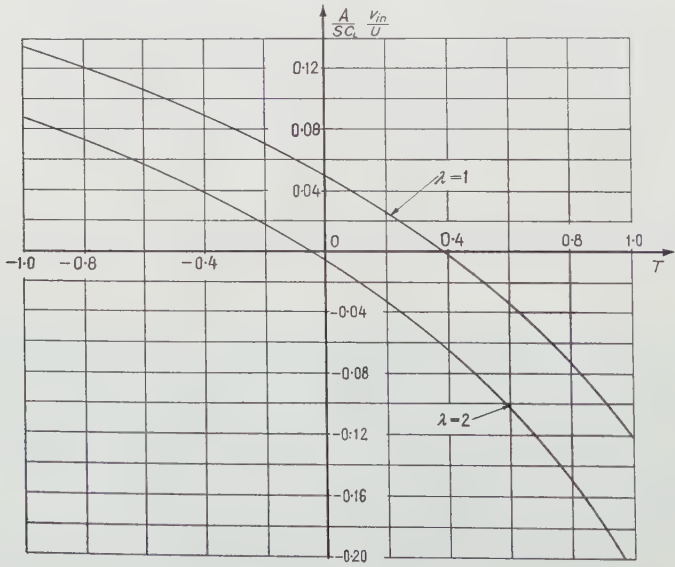


Figure 10

Angle of incidence interference on a finite wing of small span located at the center of a slotted wall test section.

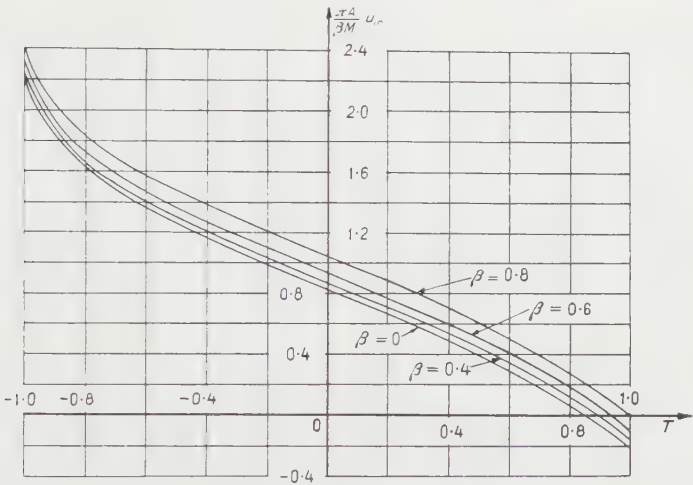


Figure 11  
Blockage interference on a finite wing located at the center of a square slotted wall test section.

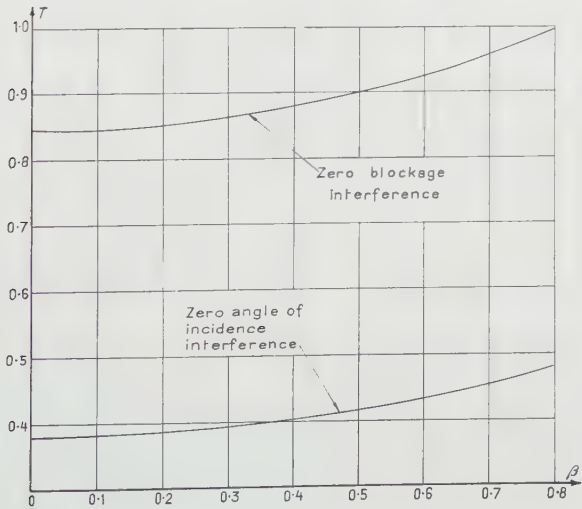


Figure 12  
 $\tau$  as a function of  $\beta$  for zero interference on a finite wing located at the center of a square slotted wall test section.

of the three-dimensional doublet distribution which represents the wing. Note that the value of  $\beta = 0$  would correspond to a simple three-dimensional doublet (body of revolution).

From Figures 9 and 11 it can be seen that for each value of  $\beta$  there is a particular value of  $T$  for which the interference vanishes. These values are plotted in Figure 12 for a square test section. It can be seen that it is impossible to find a wall configuration for which both interferences vanish.

Figures 13 and 14 give experimentally determined values of the pressure coefficient at two points on the surfaces of two geometrically similar half diamond airfoils. The airfoil is located near the lower solid wall of a  $9'' \times 9''$

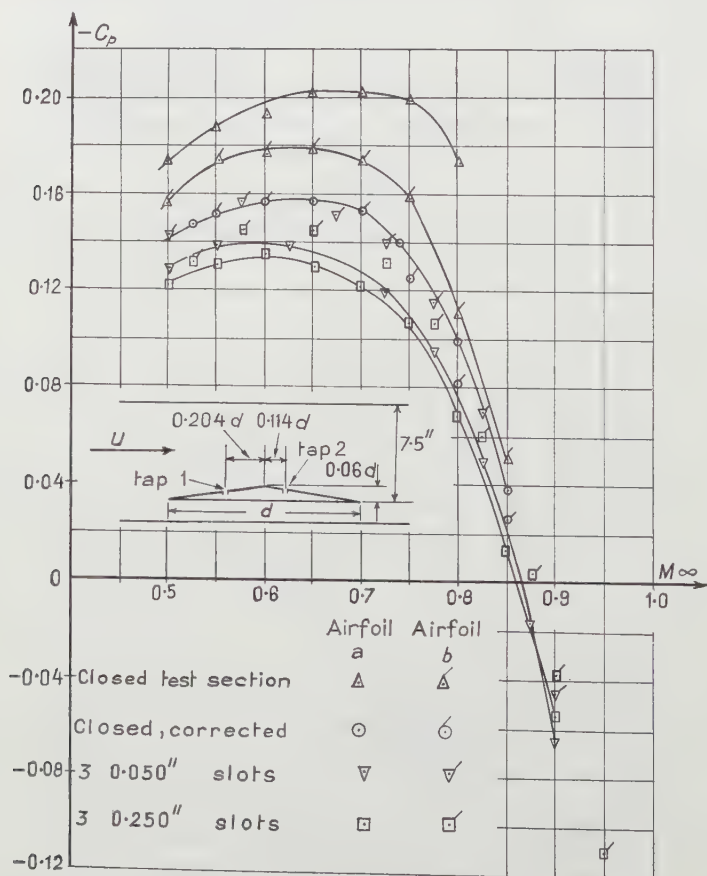


Figure 13

Pressure coefficient as a function of Mach number at pressure tap 1 on a half diamond airfoil. A sketch of the model is given in the insert. The chord lengths  $d$  are 5.5 and 3.5 in. for airfoils  $a$  and  $b$  respectively.



test section, as indicated in Figure 13, and the results were determined by using both solid and slotted upper walls. The exact experimental setup is described in more detail in [14]. While all of the experimental points have been plotted, to avoid the confusion of having many curves very close together, not all of the curves have actually been drawn. The curves labelled 'closed corrected' were determined by modifying the results obtained in the closed test section by the use of a correction factor, as described in [14], and approximately represent free flight conditions. The deblocking effect and the reduction of interference for the slotted wall test section are obvious.

## 5. Supersonic Interference in Partially Open Test Sections

By following the analysis of the previous section it is possible to determine the wall interference acting on a model in a wind tunnel, provided that the flow is subsonic. If, however, the flow is locally supersonic, shock waves will form which, in general, will be reflected from the tunnel walls. The interaction of these reflected waves with the model will introduce additional interference effects which must be calculated. This problem has been studied by various investigators for both slotted wall and perforated wall tunnels (see, for example, [38]–[43]).

As was previously pointed out, the constant of proportionality contained in the mean boundary condition for longitudinal slots is not influenced by compressibility. Hence, if waves of finite strength are excluded, this boundary condition [as given by equations (14) and (15a)] is directly applicable to linearized supersonic flows. The boundary condition for the perforated wall is, on the other hand, Mach number dependent, the constant of proportionality experiencing a rapid change with Mach number.

Since the exact problem of determining the wall configuration for which the incident waves will not be reflected involves the study of wave-boundary layer interaction, only a few simple examples assuming potential flow throughout the flow field shall be considered here. This will be sufficient to obtain some insight into the nature of the problem.

### *A. A Weak Two-Dimensional Wave Incident on a Wall With Longitudinal Slots*

Consider the problem of supersonic flow in a test section containing a two-dimensional slender body. The inclined portion of the body will, within linearized theory, generate parallel isentropic waves which will be reflected by the tunnel walls. These reflected waves may reach the body, causing errors in the pressure distribution.

More specifically, consider a symmetrical body of length  $l$  and thickness distribution  $\tau(x) = 2\gamma_0(x)$  at zero angle of attack located at the center of the

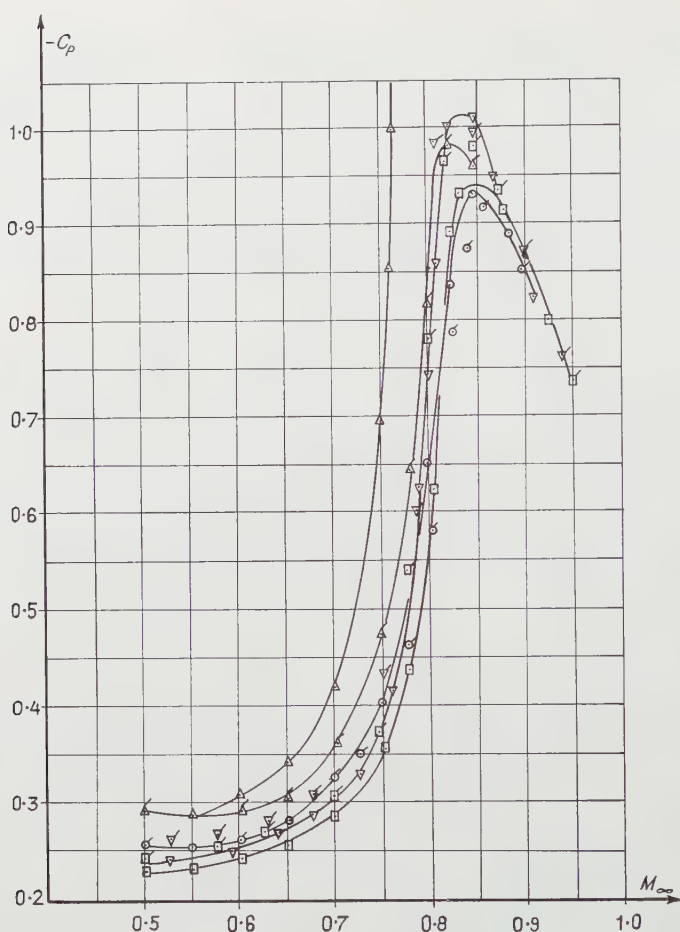


Figure 14

Pressure coefficient as a function of Mach number at pressure tap 2 on a half diamond airfoil. Symbols are the same as those used in Figure 13.

test section ( $y = -h/2$ ), as shown in Figure 15. By reason of symmetry, then, it will only be necessary to consider the flow over the upper half of the body. For convenience, use will be made of the notation:

$$s = x - y \cot \alpha, \quad t = x + y \cot \alpha$$

where  $\alpha = \sin^{-1} 1/M_\infty$  denotes the Mach angle. The perturbation potential

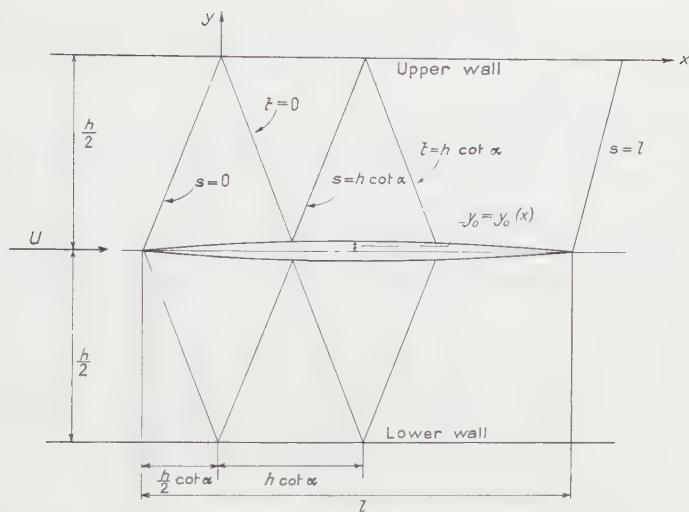


Figure 15

Supersonic flow through a test section containing a two-dimensional slender body, showing the associated wave pattern.

for such a flow will then be given by the relation

$$\varphi' = f_1(s) + f_2(t) \quad (42)$$

where the function  $f_1$ , which is constant along the line  $s = \text{const}$ , represents the incident disturbance generated by the body, and  $f_2$ , which is constant along the line  $t = \text{const}$ , represents the disturbance reflected from the wall. Since the body is located in the interval  $0 < s < l$ , this perturbation potential will vanish for  $s \leq 0$ , thus insuring that  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ .

The boundary condition at the upper wall is given by

$$y = 0, \quad s = t = x: \quad \varphi' + C \varphi'_y = 0. \quad (43)$$

If the potential of equation (42) is now inserted into this boundary condition and use is made of the fact that  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ , the function  $f_2(x)_{y=0}$  may be obtained in terms of  $f_1(x)_{y=0}$ ; that is, the functions are related at the wall. By moving along the two lines  $s = \text{const}$  and  $t = \text{const}$  passing through the common point  $s = t = x$  on the wall, it is seen that

$$f_1(x)_{y=0} = f_1(s) = f_1(t) \text{ , } f_2(x)_{y=0} = f_2(t) \text{ ,}$$

and thus the solution for  $f_2(t)$  becomes

$$f_2(t) = f_1(t) - 2 \frac{\tan \alpha}{C} e^{-t \tan \alpha / C} \int_0^t f_1(t) e^{t \tan \alpha / C} dt. \quad (44)$$

If the integral in this equation is integrated by parts and the resulting equation is then differentiated, a relation between the derivatives of the functions  $f_1$  and  $f_2$  is found.

$$\frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} - 2 \frac{\tan \alpha}{C} e^{-t \tan \alpha / C} \int_0^t \frac{df_1(t)}{dt} e^{t \tan \alpha / C} dt. \quad (45)$$

By differentiating the potential of equation (42) with respect to  $y$ , the vertical component of the velocity is found as

$$v' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = -\cot \alpha \left\{ \frac{df_1(s)}{ds} - \frac{df_2(t)}{dt} \right\}. \quad (46)$$

The boundary condition that the flow be tangent to the body may be expressed as

$$v' = U \frac{dy_0}{dx}. \quad (47)$$

Since, on the body  $df_2(t)/dt = 0$  in the interval  $-h \cot \alpha / 2 < x < h \cot \alpha / 2$ , a combination of equations (46) and (47) will yield, for this region

$$\frac{df_1(s)}{ds} = -U \tan \alpha \left( \frac{dy_0}{dx} \right)_{x=s-(h \cot \alpha / 2)}. \quad (48)$$

The value of  $df_2(t)/dt$  may now be found on the body in the interval  $h \cot \alpha / 2 < x < 3h \cot \alpha / 2$  (i.e., due to the first reflection) by substituting the result of equation (48) into equation (45).

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_2(t)}{dt} = & -U \tan \alpha \left( \frac{dy_0}{dx} \right)_{x=t-(h \cot \alpha / 2)} \\ & + 2U \frac{\tan^2 \alpha}{C} e^{-t \tan \alpha / C} \int_0^t \left( \frac{dy_0}{dx} \right)_{x=t-(h \cot \alpha / 2)} e^{t \tan \alpha / C} dt. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

The horizontal component of the perturbation velocity in this interval is given by

$$u' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{df_1(s)}{ds} + \frac{df_2(t)}{dt} = 2 \frac{df_2(t)}{dt} - U \tan \alpha \left( \frac{dy_0}{dx} \right)_{x=t+(h \cot \alpha / 2)} \quad (50)$$

where the second result is obtained with the aid of equations (46) and (47). This result, together with the value of  $df_2(t)/dt$  from equation (49), is valid for the body in the test section. The value of  $u'$  for the body in free flight is given by letting  $df_2(t)/dt = 0$  in equation (50). The blockage interference, which is the difference between these two values, then becomes

$$\frac{h}{2} \cot \alpha < x < \frac{3}{2} h \cot \alpha: \quad u_{in} = 2 \frac{df_2(t)}{dt}. \quad (51)$$

It is seen, then, that the interference on the body due to the first reflection is twice the value of the disturbance reflected from the wall, as given by equation (49).

The interference may be determined in a similar manner for  $x > 3 h \cot \alpha/2$  (i. e., for successive reflections of the disturbance) by use of equation (45), with the exception that the value of  $df_1(t)/dt$  will no longer be given by equation (48) but must be determined from equation (46) with the aid of the previously calculated values of  $df_2(t)/dt$ .

As an example of the application of this result, consider the flow past the body of Figure 16. For such a body

$$\left(\frac{dy_0}{dx}\right)_{x=t-(h \cot \alpha/2)} = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \delta & 0 < t < \Delta x, \\ 0 & t > \Delta x. \end{cases} \tag{52}$$

Since the slope of the body is zero for  $x < -h \cot \alpha/2$ , no disturbance is created in this region, and hence the blockage interference will be zero for  $x < h \cot \alpha/2$  ( $t < 0$ ). A combination of equations (49) and (51) under the

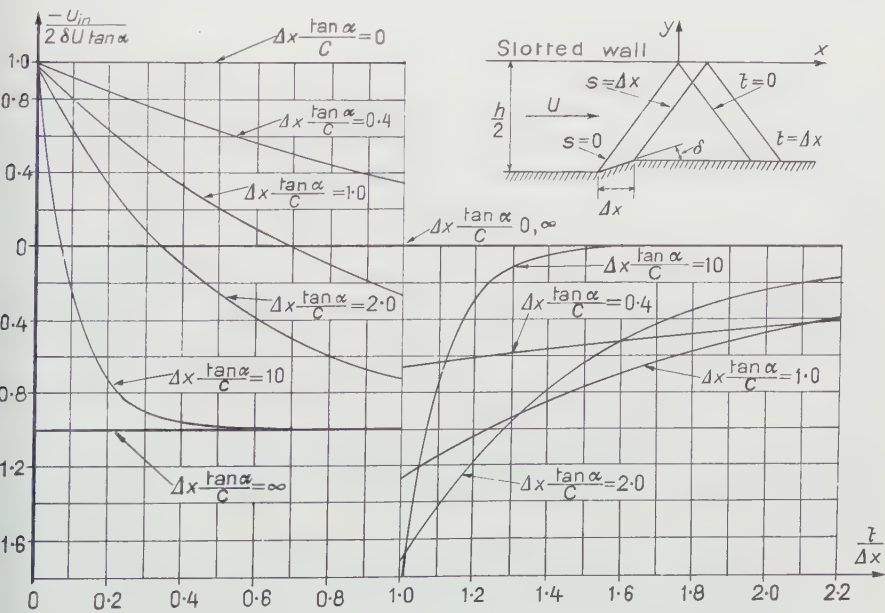


Figure 16

Blockage interference due to the reflection of a disturbance from a slotted wall. A sketch of the model and the associated wave pattern is given in the insert.

conditions of equations (52) then gives the interference for

$$\frac{h}{2} \cot \alpha < x < \frac{3}{2} h \cot \alpha \quad (0 < t < h \cot \alpha)$$

as

$$u_{in}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 U \delta \tan \alpha (1 - 2 e^{-t \tan \alpha / C}) & (0 < t < \Delta x), \\ 4 U \delta \tan \alpha e^{-t \tan \alpha / C} (e^{\Delta x \tan \alpha / C} - 1) & (\Delta x < t < h \cot \alpha). \end{array} \right\} \quad (53)$$

These results are plotted in Figure 16 for different values of the parameter  $\Delta x \tan \alpha / C$ . The incident wave, which is initially reflected as if a solid wall were present, is rapidly followed by waves of the opposite sign, the effect of which is to reduce the interference on the body as indicated.

It is possible that in the actual physical case, where the waves are not parallel, but converge slightly, some wave cancellation may occur before the reflected waves are able to disturb the flow on the body. However, an investigation into wave-boundary layer interaction must precede any definite statement in this respect. While in one case excellent cancellation may be obtained by removing the boundary layer through a converging wall with a large number of slots, conditions may be very different for the case where only a small number of slots are used and the walls are diverged sufficiently so that the boundary layer is not removed.

#### B. A Weak Two-Dimensional Wave Incident on a Perforated Wall

The boundary condition at the perforated upper wall of the test section, as given by equation (13a), may be rewritten as

$$y = 0: \varphi'_x + \cot \theta_c \varphi'_y = 0 \quad (54)$$

where the constant of proportionality,  $\cot \theta_c$ , is Mach number dependent.

If the supersonic perturbation potential of equation (42) is now inserted into this boundary condition, the condition at the wall becomes

$$\left[ \frac{df_2(x)}{dx} \right]_{y=0} = \frac{\cot \theta_c - \tan \alpha}{\cot \theta_c + \tan \alpha} \left[ \frac{df_1(x)}{dx} \right]_{y=0}. \quad (55)$$

It is seen that a definite attenuation of the disturbance takes place. In particular, the incident disturbance is completely cancelled by the wall for the condition

$$\cot \theta_c = \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}. \quad (56)$$

Thus, by proper choice of the constant  $\theta_c$ , the boundary condition for perforated walls can be made to simulate the free flight streamline exactly for a particular Mach number, within linearized two-dimensional theory.



### *C. Three-Dimensional Waves*

If longitudinal slots are employed in a test section containing a three-dimensional model, the waves reflected from different portions of the wall may interact and thereby be attenuated considerably. Thus the two-dimensional analysis already carried out yields results which are probably only a very conservative estimate of the actual three-dimensional performance.

For a three-dimensional model in a perforated wall test section, however, the performance will not be as good as for the two-dimensional case already discussed, since the condition given by equation (55), which made possible the elimination of blockage interference by proper choice of the wall configuration, is no longer satisfied.

Thus, if a comparison is made of test sections with perforated walls and walls containing longitudinal slots, where the grain sizes (slot widths and hole sizes) of the two boundaries are comparable, and the subsonic portion of the boundary layer is removed in both cases, the advantages of perforated walls for two-dimensional flows at high transonic speeds are obvious. For three-dimensional flows, however, it seems that the perforated wall becomes less effective and the slotted wall more effective in reducing interference effects.

## **6. Conclusions**

It has been shown that for subsonic flow in a test section with longitudinal slots the blockage interference on the model can be eliminated by proper choice of the slot configuration. It has also been pointed out that the buoyancy interference on the model is eliminated by the presence of the slots, regardless of slot size. In [20] it is shown that the blockage interference on the wake is also eliminated by the presence slots of any size, and the buoyancy interference on the wake will be eliminated for the same slot configuration as is required for the elimination of blockage interference on the model. Thus these four interferences can be completely eliminated by use of slotted walls. The angle of incidence correction has been evaluated in [20] for a rectangular test section with top and bottom walls slotted and in [21] for a slotted circular test section. The streamline curvature interference is evaluated in [21] for the slotted circular test section and in [22] for the rectangular test section with top and bottom walls slotted.

It has also been shown that it is possible to choose a rectangular test section with top and bottom walls perforated which, for subsonic flow, will eliminate the blockage interference due to the model. Such a test section will also insure the elimination of the buoyancy interference due to the wake. The buoyancy interference due to the model and the blockage interference due to the wake,

contrary to the slotted wall case, are not eliminated by the perforated walls. This presents no problem, however, since the buoyancy correction for the model is determined by equation (38), and the blockage correction for the wake may be similarly easily determined. At the present time the angle of incidence interference has been evaluated only for the circular perforated test section [28] and the streamline curvature interference has been evaluated for neither the rectangular nor the circular test section. Thus, while the interference problem has been solved for the slotted wall test section, much work still remains to be done for perforated walls.

For a two-dimensional supersonic flow through a test section with a large number of longitudinal slots there is no initial attenuation of the disturbance; however, this initial undiminished reflected wave is followed by reflected waves of opposite sign, thus reducing the interference on the model. Due to wave interaction, better attenuation is expected for the three-dimensional tunnel than for the two-dimensional tunnel, except for the case of the circular tunnel containing a body of revolution, which exhibits a two-dimensional behavior.

Contrary to the behavior of the slotted wall, the perforated wall seems to perform more satisfactorily in the two-dimensional case than in the three-dimensional case. Whereas complete wave cancellation is possible for the two-dimensional-problem, such a result cannot be achieved for three-dimensional flows, since equation (55) is no longer valid.

These interference effects are summarized in Tables 1 and 2 (opposite page) for convenient reference.

Aside from the elimination or determination of interference for partially open walls, which has been discussed at length, there are other important considerations with respect to such walls which should be mentioned. One of these considerations is the establishment of supersonic speeds in the test section while using a sonic nozzle. This may be done either by confining the wall openings to the test section itself and using auxiliary suction or by extending the openings into the diffuser walls, in which case no auxiliary suction equipment is necessary. Both of these methods are, of course, practical only for low supersonic speeds, and both require considerable power. In the former case the diffuser losses may be reduced by increasing the suction, so that some optimum operating condition may be found.

In general it seems that a slotted wall test section will require more power than will one with perforated walls of the same grain size. For both of these cases the configuration of the wall openings at the leading edge of the test section must be modified in order to prevent an overexpansion there.

While these considerations have been only briefly mentioned here, they are, nevertheless, very important, and for a more detailed discussion the reader is referred to [23].

Table 1  
*Subsonic Flow*

Type of interference	Walls with longitudinal slots	Perforated walls
Blockage, model	May be eliminated	May be eliminated
Blockage, wake	None	May be evaluated
Buoyancy, model	None	May be evaluated
Buoyancy, wake	May be eliminated	May be eliminated
Angle of incidence	May be evaluated	Known only for circular tunnel
Streamline curvature	May be evaluated	Presently unknown

Table 2  
*Supersonic Flow*

Type of flow	Walls with longitudinal slots	Perforated walls
Two-dimensional	No initial attenuation. Initial reflection followed by waves of opposite sign, reducing the interference.	Complete wave cancellation possible.
Three-dimensional	Better attenuation than for two-dimensional flow, except for circular tunnel.	Complete wave cancellation impossible.

## REFERENCES

- [1] B. GOERTHERT, *Wind Tunnel Corrections at High Subsonic Speeds, Particularly for an Enclosed Circular Tunnel*, NACA TM 1300, February 1952. (Translated from: *Windkanalkorrekturen bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten unter besonderer Berücksichtigung des geschlossenen Kreiskanals*, Forschungsbericht Nr. 1216, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Mai 1940).
- [2] A. THOM, *Blockage Corrections in a Closed High-Speed Tunnel*. British A.R.C. R. & M. No. 2033, November 1943.
- [3] F. K. FELDMANN, *Untersuchung von symmetrischen Tragflügelprofilen bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten in einem geschlossenen Windkanal*, Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik, ETH, Zürich, Switzerland, No. 14, 1948.
- [4] T. THEODORSEN, *Theory of Wind Tunnel Interference*, NACA TR 410, 1931.
- [5] G. WIESELSBERGER, *Über den Einfluss der Windkanalbegrenzung auf den Widerstand, insbesondere im Bereiche der Kompressiblen Strömung*, Deutsche Luftfahrt-Forschung, Forschungsbericht No. 1172, Dezember 1939.
- [6] K. KONDO, *The Wall Interference of Wind Tunnels with Boundaries of Circular Arcs*, Tokyo Imperial University, Aeronautical Research Institute, Report No. 126, 1935.

- [7] K. KONDO, *Boundary Interference of Partially Closed Wind Tunnels*, Tokyo Imperial University, Aeronautical Research Institute, Report No. 137, 1936.
- [8] T. R. GOODMAN, *Wall Interference on Lifting Wings in Wind Tunnels with Transonic Throat Configurations*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc., Report No. AD-592-A-1, October 1949.
- [9] E. PISTOLESI, *On the Interference of a Wind Tunnel with a Mixed Boundary*, Pont. Acad. Sci. 4, No. 9 (1940). Translated by Cornell Aeronautical Laboratory, Inc., 1949).
- [10] E. PISTOLESI, *The Interference Effect of a Wind Tunnel with Mixed Contours*, Pont. Acad. Sci. 7, No. 5 (1943). (Translated by Langley Aero. Lab., NACA 1951).
- [11] R. H. WRIGHT and V. G. WARD, *NACA Transonic Wind Tunnel Test Section*, NACA RM L8J06, October 1948.
- [12] G. P. BATES, *Preliminary Investigation of 3-Inch Slotted Transonic Wind Tunnel Test Sections*, NACA RM L9D18, September 1949.
- [13] P. F. MAEDER, *Note on Deblocked Transonic Test Sections*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-4, May 1950.
- [14] P. F. MAEDER, *Investigation of Tunnel Boundary Interference on Two-Dimensional Airfoils Near the Speed of Sound*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-6, April 1951.
- [15] W. E. POWERS and H. D. TAYLOR, *Investigation of Transonic Slotted-Wall Tunnel Configurations*, United Aircraft Corporation, Report R-15356-3, October 1951.
- [16] C. W. MATTHEWS, *Theoretical Study of the Tunnel-Boundary Lift Interference Due to Slotted Walls in the Presence of the Trailing-Vortex System of a Lifting Model*, NACA RM L53 A26, April 1953.
- [17] A. H. GALE, *Wall Corrections for Transonic Wind Tunnels, Part I: A Lifting Model in Subsonic Flow in a Circular Slotted Wind Tunnel*, Aeronautical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology, TAC Report 3, January 1954.
- [18] G. GUDERLEY, *Simplifications of the Boundary Conditions at a Wind-Tunnel Wall With Longitudinal Slots*, Aircraft Laboratory, Wright Air Development Center, WADC Technical Report 53-150, April 1953.
- [19] D. D. DAVIS, jr., and D. MOORE, *Analytical Study of Blockage- and Lift Interference Corrections for Slotted Tunnels Obtained by the Substitution of an Equivalent Homogeneous Boundary for the Discrete Slots*, NACA RM L5E07b, June 1953.
- [20] P. F. MAEDER, *Theoretical Investigation of Subsonic Wall Interference in Rectangular Slotted Test Sections*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-11, September 1953.
- [21] G. GUDERLEY, *Wall Corrections for a Wind Tunnel with Longitudinal Slots at Subsonic Velocities*, Aircraft Laboratory, Wright Air Development Center, WADC Technical Report 54-22, January 1954.
- [22] P. F. MAEDER, G. F. ANDERSON, and J. B. CARROLL, *Experimental Investigation of Subsonic Wall Interference in Rectangular Slotted Test Sections*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-11, January 1955.
- [23] B. H. GOETHERT, *Flow Establishment and Wall Interference in Transonic Wind Tunnels*, Arnold Engineering Development Center, Report AEDC-T 54-44, June 1954.



- [24] W. J. NELSON and P. L. KLEVATT, *Preliminary Investigation of Constant-Geometry, Variable Mach Number, Supersonic Tunnel with Porous Walls*, NACA RM L50 B01, May 3, 1950.
- [25] W. J. NELSON and F. BLOETSCHER, *Preliminary Investigations of Porous Walls as a Means of Reducing Tunnel Boundary Effects at Low-Supersonic Mach Numbers*, NACA RM L50 D27, September 13, 1950.
- [26] T. R. GOODMAN, *The Porous Wall Wind Tunnel, Part I: One-Dimensional Supersonic Flow Analysis*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-594-A-2, October 1950.
- [27] T. R. GOODMAN, *The Porous Wall Wind Tunnel, Part II: Interference Effect on a Cylindrical Body in a Two-Dimensional Tunnel at Subsonic Speed*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-594-A-3, November 1950.
- [28] T. R. GOODMAN, *The Porous Wall Wind Tunnel, Part IV: Subsonic Interference Problems in a Circular Tunnel*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-706-A-2, August 1951.
- [29] T. R. GOODMAN, *The Porous Wall Wind Tunnel, Part V: Subsonic Interference on a Lifting Wing Between Two Infinite Walls*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-706-A-3, August 1951.
- [30] R. R. KASSNER, *Subsonic Flow Over a Body Between Porous Walls*, Wright Air Development Center. Technical Report 52-9, February 1952.
- [31] J. G. WILDER, jr., *An Experimental Investigation of the Perforated-Wall Transonic Wind Tunnel, Phase I*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-706-A-5, August 1951.
- [32] J. G. WILDER, jr., *An Experimental Investigation of the Perforated-Wall Transonic Wind Tunnel, Phase II*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-706-A-6, January 1952.
- [33] R. BRESCIA, *Wall Interference in a Perforated Wind Tunnel* (Translated from: *Studio dell'Interferenza delle gallerie Aerodinamiche Con Pareti a Fessure*, Atti Accad. Sci. Torino 87 [1952-53]), Cornell Aeronautical Laboratory Inc.
- [34] P. F. MAEDER, *Investigation of the Boundary Condition at a Perforated-Wall*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-9, May 1953.
- [35] P. F. MAEDER and J. F. STAPELTON, *Investigation of the Flow Through a Perforated-Wall*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-10, May 1953.
- [36] J. A. F. HILL and H. D. TAYLOR, *An Analytical Study of Flow Through a Perforated-Wall*, United Aircraft Corporation, Report R-95630-9, November 1953.
- [37] P. F. MAEDER, *Some Aspects of the Behavior of Perforated Transonic Wind Tunnel Walls*, Brown University, Division of Engineering, Technical Report WT-15, September 1954.
- [38] G. H. McLAFFERTY, jr., and I. TWOMEY, *Investigation of the Use of Slotted Walls to Cancel Shock Wave Reflections in Supersonic Flow*, United Aircraft Corporation, Report R-15127-3, October 1949.
- [39] G. GUDERLEY, *Remarks on the Theory of Wind Tunnels with Slotted Walls*, Wright Air Development Center. Technical Report 52-8, January 1952.
- [40] K. MIKAMI, *Wall Corrections for Transonic Wind Tunnels, Part II: Some Aspects of Wall Interference Effects of a Supersonic Slotted-Throat Wind Tunnel*, Aeronautical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology. TACP Report 9, September 1954.

- [41] T. R. GOODMAN, *The Porous Wall Wind Tunnel, Part III: The Reflection and Absorption of Shock Waves at Supersonic Speeds*, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. Report No. AD-706-A-1, November 1950.
- [42] D. D. DAVIS, jr., and G. P. WOOD, *Preliminary Investigation of Reflections of Oblique Waves from a Porous Wall*, NACA RM L50G19a, November 9, 1950.
- [43] M. PINDZOLA and H. H. HOADLEY, *Shock and Expansion Wave Cancellation Studies in a Two-Dimensional Porous Wall Transonic Tunnel*, United Aircraft Corporation, Report R-25473-5, September 1951.
- [44] W. CROHNER and N. HOFREITER, *Integraltafel, zweiter Teil; Bestimmte Integrale* (Springer 1950).
- [45] W. J. NELSON and F. BLOETSCHER, *An Experimental Investigation of the Zero-Lift Pressure Distribution Over a Wedge Airfoil in Closed, Slotted, and Open-Throat Tunnels at Transonic Mach Numbers*, NACA RM L52C18, June 16, 1952.
- [46] G. P. WOOD, *Reflection of Shock Waves From Slotted Walls at Mach Number 1.62*, NACA RM L52E27, July 21, 1952.
- [47] B. S. BALDWIN, jr., J. B. TURNER, and E. D. KRECHTEL, *Wall Interference in Wind Tunnels With Slotted and Porous Boundaries at Subsonic Speeds*, NACA RMA53E29, October 9, 1953.
- [48] G. M. STOKES, D. D. DAVIS, jr., and T. B. SELLERS, *An Experimental Study of Porosity Characteristics of Perforated Materials in Normal and Parallel Flow*, NACA RM L53 H07, November 10, 1953.

### Zusammenfassung

Um von Windkanalversuchen auf die Verhältnisse beim freien Flug schliessen zu können, müssen die Einflüsse der Kanalwände auf die Geschwindigkeitsverteilung am Modell berücksichtigt werden. Bei schallnaher Strömung sind diese Einflüsse an Modellen üblicher Grösse so stark, dass sie die Messungen vollständig verfälschen.

Die hier beschriebenen Methoden beruhen auf der Berechnung von 4 Arten von Interferenzen in einem Punkt des Modells. Von diesen werden auf einfache Art die Interferenzgeschwindigkeiten in den anderen Punkten des Modells abgeleitet.

Ausgehend von einer gemittelten Grenzbedingung werden die Interferenzgeschwindigkeiten für teilweise offene Kanalwände berechnet. Durch die Wahl verschiedener Wandkonstruktionen können einzelne Interferenzen eliminiert werden. Die Tabellen 1 und 2 zeigen eine Zusammenstellung der Möglichkeiten für verschiedene Arten von teilweise offenen Kanalwänden.

(Received: September 8, 1955.)



## On the Structure of Ice-Forming Nuclei<sup>1)</sup>

By RAYMUND SÄNGER, Zürich<sup>2)</sup>

The cause of icing nucleability has become a more important question, since SCHAEFER and VONNEGUT [1, 2]<sup>3)</sup> discovered that silver iodide (AgI) can be used as a seeding substance to form ice. At that time the only other substance found to be similarly active was lead iodide (PbI<sub>2</sub>). The fact that they both, AgI at least to a considerable extent, display a hexagonal crystal like that of ice, led to the idea that the reason for the high degree of icing nucleability in AgI must lie in its crystalline structure. This supposition was strengthened by the further fact that the lattice constants of the three substances in question are virtually the same.

Subsequently, however, the same research group observed a considerable degree of icing nucleability in certain other substances, whose crystalline symmetry bears no relationship either to that of ice or that of the hexagonal  $\beta$ -AgI crystal. And not surprisingly the lattice constants in these new cases also vary considerably from those of ice. Hence it is clear that neither the macroscopic crystal symmetry nor the lattice constants can tell us much about the icing nucleability of a substance. This truth has been confirmed by more recent experiments [3]. It has proved possible to measure separately the icing nucleability of the two variants of AgI which exist at normal temperatures: the hexagonal  $\beta$ -crystal and the cubic  $\gamma$ -crystal. The measurement was the same in each case. This discovery gives us a pointer for further inquiry into the question. For we should notice that in both variants of AgI the coordination groups of the crystals are identical, and constitute in fact tetrahedrons. In the corners of each we find alternatively silver and iodine atoms. Now, the coordination groups of ice also constitute tetrahedrons, with very nearly the same geometrical dimensions. The only difference is that in the corners we find only oxygen atoms, while the hydrogen atoms occupy an intermediary position. In the most important two-dimensional surface planes of both the cubic and the hexagonal AgI crystals the tetrahedron edges (running alternately right and left) are arranged in exactly the same way as in ice. This makes it easier to understand why the same degree of icing nucleability was observed in each variant; and it also suggests that the cause of nucleability should be sought in

<sup>1)</sup> Paper presented at the Tucson Conference on *The Scientific Basis for Weather Modification Studies*, Institute of Atmospheric Physics, University of Arizona, April 10–12, 1956.

<sup>2)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 217.

the surface forces. That is to say: in the forces which operate between the surface atoms of the seeding substance and the surface atoms of the water (whether solid or liquid).

WEICKMANN [4] has shown that there should probably be close connection between the phenomena of epitaxy and icing nucleability. In his treatment of the subject he mentions ROYER and FRIEDEL [5], [6], who state that variations of up to 12% in the geometrical spacing of the atoms are admissible during the orientated overgrowth of guest crystals on the sliced surface of a host crystal. It should not be forgotten, however, that in the examples given by WEICKMANN (for instance, the growth of ice crystals on mica) he is concerned with epitaxy in its usual or 'classical' form; that is to say, when the guest crystal is allowed an unlimited period of time to complete the process. By contrast, where supercooled clouds are seeded with suitable icing substances, freezing takes place extremely quickly. We must therefore be careful not to make any comparisons between the two phenomena without allowing due consideration to the time factor.

WEYL has tried to explain the icing nucleability of AgI in an entirely different fashion [7]. Basing his argument on the knowledge that the ionic crystal of sodium chloride (NaCl) has an electric double layer on its surface, he attributes a similar double layer to the AgI crystal, in which the chemical binding forces are strikingly homopolar. In the case of NaCl the explanation for this double layer clearly lies in the considerably greater polarisability of the negative chloride anion ( $\text{Cl}^-$ ) over the positive sodium cation ( $\text{Na}^+$ ). The equilibrium of the interatomic forces on the surface of the crystal can then only be explained in one way: that the cations in the outer layers have been forced relative to the anions, towards the inside of the crystal. Now, despite the homopolar character of AgI, the same marked difference exists between the polarisability of the anion-like iodine and the cation-like silver. Thus, according to WEYL, an AgI particle must also possess an electric double layer on its surface, of which the negative side lies outermost (as with NaCl). And this is of importance for any explanation of icing nucleability.

For water droplets likewise possess an electric double layer, with again the negative on the outside. The reason for this is that the electric dipoles of the water molecules situated near the surface are, on the whole, orientated inwards; that is, each parallel to its immediate neighbours. Whereas inside the droplet they are so arbitrarily disposed in all directions that they neutralize one another. This view of the matter is compatible with the following experimental finding: that on a statistical basis the fundamental arrangement of oxygen atoms in liquid water is tetrahedral, as in ice. And that in fact two kinds of tetrahedral structure complement one another: a  $\beta$ -tridymite-like structure (similar to that of ice) and a quartz-like structure. Below the point of maximum density for water, at 4°C, the ice-type of structure predominates. When the temperature falls below zero, then (according to WEYL) the surface layer,

with its electric dipoles turned inwards, at first hinders freezing. Only when the temperature falls far enough below zero, or alternatively when the double layer is disturbed by some external influence, can the transition from liquid to solid be initiated.

Such a disturbance takes place, for example, when an AgI particle approaches a supercooled water droplet. For the electric moment of the double layer of the seeding particle is itself orientated inwards and therefore, at the point of approach, points in a direction exactly contrary to the double layer of the water drop. The result is then that the AgI destroys the alignment of the electric dipoles of the water molecules. It is true that WEYL assumes that the AgI particle must penetrate the surface of the water. But this would not actually be necessary to produce a loosening in the orientation of the water dipoles. Indeed, the extremely rapid completion of the freezing process, when supercooled clouds are seeded with AgI, suggests rather that the mere proximity of its double surface layer is sufficient.

Before we attempt to correlate, or even to compare, WEYL's explanation for the icing nucleability of AgI with the theory of epitaxy, we must define more closely the preconditions necessary for any regular overgrowth of guest crystals on a host crystal. In the case of ice, the following features favour the successful development of epitaxy:

1. That the coordination groups are tetrahedral, regardless of whether they are built up into a hexagonal or cubic lattice;
2. that there is a uniform type of chemical cohesion; that is, a homopolar link like that of ice, with a similarly shaped potential field set up by the mutual chemical forces;
3. that there is the same arrangement of the basic tetrahedrons in the surface layer as we find in ice, and with similar geometrical dimensions.

The longer the time allowed for epitaxy, the greater the discrepancies which may be admitted between the geometrical spacings of the atoms in the seeding substance and the atomic spacings in the ice. The limit of possible difference will depend upon the degree to which the chemical binding forces are suited to one another. The kind of limit proposed by ROYER and FRIEDEL on a simple percentage basis must therefore be interpreted with great caution, as we have already pointed out; especially if it is intended to draw from it quantitative inferences as to the icing nucleability of the substances in question.

If epitaxy is to be appealed to at all, for an explanation of the rapid freezing of supercooled clouds when seeded with special nucleable substances, then all of the above mentioned conditions would have to be satisfied to the fullest possible extent. Where this is so we can understand why AgI ( $\beta$  and  $\gamma$ ), cupric iodide (CuI), mercury telluride (HgTe), calcium selenide (CaSe) and lead iodide (PbI<sub>2</sub>) are such effective nucleable substances<sup>4</sup>. But the reason why

<sup>4</sup>) For more recent measurements and results, see [3], [8], [9], [10], [12].

cupric sulphide ( $\text{CuS}$ ) and cupric selenide ( $\text{CuSe}$ ) are also nucleable is less easy to see. Of course, the crystalline structure of  $\text{CuS}$  does contain tetrahedral units in layer formation, and the tetrahedrons are arranged in the same way as in ice [11]. But on the other hand, the interatomic intervals do not correspond at all well to those of ice. Further, the immediacy with which all these seeding substances initiate freezing leads one to suspect that the mere optimal fulfilment of the conditions necessary for the epitaxial growth of ice on an ice-forming nucleus is in itself not sufficient to render a plausible explanation of the mechanism of freezing.

If all the binary compounds, which have so far been found to be nucleable, are tabulated on the basis of the Periodic System, then we see clearly that one of the two elements falls constantly on the left, or positive, side of the table, while the other without exception falls on the right, or negative, side [12]. In addition, the element on the right always possesses a greater polarisability than the element on the left. When we further ascertain that in practice all these compounds are insoluble in water<sup>5)</sup>, we arrive at last at something like a complete picture of the substances that provide ice-forming nuclei. And it is perhaps worth noticing in passing that this picture is strikingly similar to the list of semi-conductors.

We find, then, that active seeding substances possess a noticeable degree of polarity, despite the predominantly homopolar character of their chemical bond. The greater polarisability of the anion-like element over the cation-like element causes an electric double layer to be formed on the surface of the seeding substance – in the same way as that posited by WEYL for  $\text{AgI}$ , and with the same orientation of the negative towards the outside. Are we, then, in a position to assume that WEYL's mechanism for the freezing process of supercooled clouds is in fact typical for all nucleable seeding substances?

The essential point of WEYL's mechanism rests upon the disorientation of the electric dipoles on the surface of the supercooled water droplet. But is it possible to accept this as a full explanation of all aspects of the freezing process? The problem of epitaxy cannot be ignored. And the important question arises, whether some combination of both mechanisms might not be possible which would bring us closer to an understanding of what actually happens. On the basis of such a composite picture we should expect that: despite the optimal fulfilment of all the conditions necessary for epitaxy, the orientation of the molecular dipoles on the surface of the supercooled water drop would at first prevent the water molecules from settling on the surface of the seeding substance in conformity with the potential pattern set up by the chemical binding forces.

<sup>5)</sup> The substances such as  $\text{AgNO}_3$ ,  $\text{KI}$ ,  $\text{NaI}$ , which are listed in the work by PRUPPACHER and SÄNGER [3], [12] as soluble in water, were atomized in the freezer by a fume process, since they could not be disintegrated mechanically. The results obtained in such cases cannot therefore be considered reliable.



The electric double layer, however, produced by the difference in polarisability of the atoms, breaks up the orientation of the water dipoles. And as the water molecules are then no longer hindered from settling in due form on the surface of the seeding substance, or from fitting themselves into an ice lattice, the freezing process can then be initiated very rapidly.

The experimental knowledge at present available is, however, so limited that it does not allow us to judge with even a fair degree of accuracy whether these explanatory mechanisms are correct. We must considerably increase the extent of our material observations along the lines of our present understanding. Above all we need more precise information concerning the initial temperatures at which nuclei become iceforming; secondly, we need to investigate a much larger number of substances - beginning preferably with binary semiconductors. And thirdly, attempts should also be made to further our knowledge of the interaction between the seeding substance and the water drop. This might be done by disturbing experimentally the surface of the ice forming nuclei.

Finally it ought to be pointed out that, in the mechanisms discussed here, the seeding particle has been considered solely in the light of a freezing nucleus. The question whether there may not exist some form of sublimation nuclei, has not been touched on at all. And in conclusion we should not overlook the possibility of still further mechanisms which would also be capable of initiating the process of freezing.

---

It is my pleasant duty to thank Dr. W. EPPRECHT for his very interesting contributions to the discussion.

#### REFERENCES

- [1] V. I. SCHAEFER, Chem. Rev. 44, 291 (1949).
- [2] B. VONNEGUT, Chem. Rev. 44, 277 (1949).
- [3] H. R. PRUPPACHER and R. SÄNGER, ZAMP 6, 407 (1955).
- [4] H. K. WEICKMANN, Arch. Meteor. Geophys. Biokl. [A] 4, 309 (1951).
- [5] L. ROYER, Bull. Soc. franc. Minéral. 51, 7 (1928).
- [6] G. FRIEDEL, *Leçons de cristallographie* (Berger Levraut, 1926), 519 ff.
- [7] W. A. WEYL, J. Colloid Sci. 6, 389 (1951).
- [8] S. S. BIRSTEIN and C. E. ANDERSON, J. Meteor. 12, 68 (1955).
- [9] C. L. HOSLER, J. Meteor. 8, 326 (1951).
- [10] R. MONTMORY, Bull. Obs. Puy de Dôme 4, 108 (1955).
- [11] *Strukturbericht*, Bd. II (Z. Kristallogr. 1928-1932) (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1937), p. 11.
- [12] H. R. PRUPPACHER and R. SÄNGER, ZAMP 6, 485 (1955).

#### *Zusammenfassung*

Die Experimente führen zur Annahme, dass die Eiskeimfähigkeit von den Oberflächenkräften herrührt. Die Epitaxie könnte das äusserst rasche Vereisen unterkühlter Tröpfchen nur in extrem günstigen Fällen erklären, die aber bei

verschiedenen stark keimfähigen Substanzen gar nicht zutreffen. Deshalb wird versucht, zusätzlich die Weylsche Theorie der elektrischen Oberflächendoppelschicht heranzuziehen. Tatsächlich weisen die aktiven Stoffe den zur Doppelschichtbildung nötigen starken Unterschied in der Polarisierbarkeit von Anion und Kation auf. Die Doppelschicht der Keimsubstanz zerstört diejenige der Wasseroberfläche, welche die Gitterbildung (Vereisung) verhinderte.

(Received: March 12, 1956.)

## Über Verfahren von Steffensen und Householder zur Konvergenzverbesserung von Iterationen

MAURO PICONE zum 70. Geburtstag

VON ALEXANDER OSTROWSKI, Basel<sup>1)</sup>

1. Um die *Fixpunkte* einer reellen Transformation  $y = \varphi(x)$ , das heisst die Grössen  $\zeta$  mit  $\zeta = \varphi(\zeta)$  zu bestimmen, wird oft das sogenannte Iterationsverfahren<sup>2)</sup> benutzt, das, mit einem *Anfangswert*  $x_0$  beginnend, vermöge der Rekursionsvorschrift  $x_{v+1} = \varphi(x_v)$  in günstigen Fällen eine unendliche Folge  $x_v$  liefert, die gegen  $\zeta$  konvergiert. Gibt es eine Umgebung von  $\zeta$  derart, dass für jedes  $x_0$  aus dieser Umgebung die zugehörige Folge  $x_v$  existiert und gegen  $\zeta$  konvergiert, so heisst nach RITT  $\zeta$  ein *Anziehungspunkt* für die obige Iteration. Existiert dagegen eine Umgebung von  $\zeta$  derart, dass für jedes  $x_0 \neq \zeta$  aus dieser Umgebung die zugehörige unendliche Folge  $x_v$  entweder nicht existiert oder, sofern keines der  $x_v$  den Wert  $\zeta$  annimmt, nicht gegen  $\zeta$  konvergiert, so heisst nach RITT  $\zeta$  ein *Abstossungspunkt* für die obige Iteration.

2. Existiert  $\varphi'(\zeta)$ , so ist  $\zeta$  ein Anziehungspunkt, wenn  $|\varphi'(\zeta)| < 1$  ist, und ein Abstossungspunkt, wenn  $|\varphi'(\zeta)| > 1$  ist. Insbesondere ist im Falle  $|\varphi'(\zeta)| < 1$  die Konvergenz um so schneller, je kleiner  $|\varphi'(\zeta)|$  ist, wenn auch, solange  $\varphi'(\zeta) \neq 0$  ist, nur «linear». Ist aber  $\varphi'(\zeta) = 0$ , so ist die Konvergenz wesentlich schneller, «überlinear», und wenn  $\varphi(x) - \zeta = O(|x - \zeta|^p)$ ,  $p > 1$ , ist, sogar *wenigstens von der Ordnung*  $p$ , also zum Beispiel für  $p = 2$  «quadratisch».

3. Um die Konvergenzverhältnisse in der Umgebung von  $\zeta$  zu verbessern, hat STEFFENSEN 1933<sup>3)</sup> folgendes Verfahren vorgeschlagen: Man bilde von  $x_0 = y_0$  ausgehend die Werte  $\varphi(x_0) = x_1$ ,  $\varphi(x_1) = x_2$  und wende sodann die

<sup>1)</sup> Mathematische Anstalt der Universität Basel.

<sup>2)</sup> Vergleiche zum Beispiel FR. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, 2. Aufl. (Walter de Gruyter, Berlin 1950), S. 256.

<sup>3)</sup> J. F. STEFFENSEN, Skand. Aktuarietidskr. 16, 64–72 (1933).



Regula falsi auf die Gleichung  $F(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$  und auf die beiden Approximationen  $x_0, x_1$  an. Dann erhalten wir als die nächste Approximation

$$y_1 = \frac{x_0 F(x_1) - x_1 F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)} = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}.$$

Drücken wir hier  $y_1$  direkt durch  $y_0 = x_0$  aus, so erhalten wir  $y_1 = \Phi(y_0)$ , wo

$$\Phi(y) = \frac{y\varphi(\varphi(y)) - \varphi(y)^2}{y - 2\varphi(y) + \varphi(\varphi(y))} \quad (1)$$

ist, wobei allerdings  $\Phi(y) \equiv \zeta$  wird, wenn  $\varphi(x)$  linear,  $= ax + b$  ist.

STEFFENSEN betrachtete verschiedene Beispiele, in denen die Iteration vermöge der Funktion  $\Phi$  sehr schnell gegen  $\zeta$  konvergiert, sogar dann, wenn  $|\varphi'(\zeta)| \geq 1$  ist. WILLERS bemerkt in seinem Lehrbuch<sup>4)</sup>, dass «dieses Verfahren immer zum Ziel führt», allerdings ohne diese Bemerkung zu begründen oder ihren Gültigkeitsbereich zu charakterisieren, und gibt in einem Aufsatz<sup>5)</sup> eine elegante geometrische Diskussion des Verfahrens.

4. Im folgenden werden wir nun beweisen, dass unter sehr allgemeinen Regularitätsbedingungen für  $\varphi(x)$ , die wohl praktisch zumeist erfüllt sind, in der Tat jeder Fixpunkt  $\zeta$  von  $\varphi(x)$  ein Anziehungspunkt für die Iteration vermöge der Iterationsfunktion  $\Phi(y)$  ist.

Es wird dabei im folgenden durchweg vorausgesetzt, dass alle vorkommenden Funktionen und Variablen *reell* sind.

Es ergibt sich aus unsern Resultaten, dass, wenn  $\varphi'(\zeta)$  existiert und  $\neq 1$  ist,  $\zeta$  ein Anziehungspunkt für  $\Phi(y)$  mit überlinearer Konvergenz ist. Ist andererseits  $\varphi'(\zeta) = 1$  und gilt zugleich für ein  $\lambda > 1$  für  $x \downarrow \zeta$  und  $x \uparrow \zeta$  ( $x \rightarrow \zeta \pm 0$ )

$$|\varphi'(x) - 1| \sim \gamma_{\pm} |x - \zeta|^{\lambda-1} \quad (x \rightarrow \zeta \pm 0), \quad (2)$$

so ist  $\zeta$  wiederum ein Anziehungspunkt für die obige Iteration, und es gilt

$$\Phi'(\zeta) = 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad (3)$$

so dass die Konvergenz der neuen Iteration linear ist. Darüber hinaus ergibt sich aber unter geeigneten Annahmen eine weitere Verbesserung des Konvergenztypus auch dann, wenn die Konvergenz für die Iteration vermöge  $\varphi(x)$  von der Ordnung  $p > 1$  ist.

<sup>4)</sup> FR. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, 2. Aufl. (Walter de Gruyter, Berlin 1950), S. 259.

<sup>5)</sup> FR. A. WILLERS, *Z. angew. Math. Mech.* 28, 125—126 (1948).

5. In seinem 1953 erschienenen Buche<sup>6)</sup> hat A. S. HOUSEHOLDER das Steffensensche Verfahren dahin verallgemeinert, dass er zugleich *zwei* Iterationen

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x)$$

mit gemeinsamem Fixpunkt  $\zeta$  betrachtet und aus ihnen die neue Iterationsfunktion

$$\Phi(y) = \frac{y \varphi_1(\varphi_2(y)) - \varphi_1(y) \varphi_2(y)}{y - \varphi_1(y) - \varphi_2(y) + \varphi_1(\varphi_2(y))} \quad (4)$$

bildet. Doch bezieht sich seine Diskussion nur auf den Fall, wo

$$(\varphi'_1(\zeta) - 1)(\varphi'_2(\zeta) - 1) \neq 0 \quad (5)$$

ist, und  $\varphi_1(x)$  und  $\varphi_2(x)$  genügend oft differenzierbar sind.

Im folgenden behandeln wir nun gleich den allgemeineren Householderschen Ansatz unter wesentlich weniger einschränkenden Voraussetzungen. Es ergibt sich dabei allerdings, dass die Benutzung von zwei *verschiedenen* Iterationsfunktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  nur in einem recht speziellen Fall (Nr. 12) ein besseres Ergebnis liefert, als wenn man eine geeignete dieser Funktionen direkt im Ansatz von STEFFENSEN benutzt. Die genauen Formulierungen unserer Resultate findet man weiter unten in den Nummern 7, 12–16, 20.

Es sei endlich noch bemerkt, dass wenn  $\varphi'_1(\zeta)$  und  $\varphi'_2(\zeta)$  beide *positiv* sind, man sich in den weiteren Betrachtungen sowohl in den Voraussetzungen als auch in den Behauptungen entweder durchweg auf die rechtsseitige oder durchweg auf die linksseitige Konvergenz von  $y$  gegen  $\zeta$  beschränken kann.

6. Wir bemerken zuerst, dass die Bildung von  $\Phi(y)$  vermöge (4) invariant ist gegenüber der Translation, so dass man bei den weiteren Beweisen  $\zeta = 0$  annehmen darf. In der Tat verifiziert man unmittelbar, dass, wenn man

$$\psi_i(x) = \varphi_i(\zeta + x) - \zeta \quad (i = 1, 2)$$

setzt und die zu den beiden Funktionen  $\psi_1(x)$  und  $\psi_2(x)$  gehörende Householdersche Iterationsfunktion mit  $\Psi$  bezeichnet, dann die Relation gilt

$$\Psi(y) = \Phi(y + \zeta) - \zeta.$$

Aus (4) folgt sofort:

$$\Phi(y) - y = \frac{-(\varphi_1(y) - y)(\varphi_2(y) - y)}{y - \varphi_1(y) - \varphi_2(y) + \varphi_1(\varphi_2(y))}. \quad (6)$$

<sup>6)</sup> A. S. HOUSEHOLDER, *Principles of Numerical Analysis* (McGraw-Hill, New York 1953) S. 126–128.

7. Da im folgenden durchweg die Existenz der ersten Ableitungen von  $\varphi_i(y)$  in  $\zeta$  vorausgesetzt wird, gelten also für  $y \rightarrow \zeta$ ,  $|y - \zeta| = \varrho$  gesetzt, die Formeln

$$\varphi_i(y) = \alpha_i (y - \zeta) + o(\varrho) \quad (i = 1, 2; y \rightarrow \zeta), \quad (7)$$

wo  $\alpha_i$  die Ableitungen von  $\varphi_i(y)$  in  $\zeta$  sind.

Gilt nun (5), das heisst

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) \neq 0, \quad (8)$$

so lässt sich bereits beweisen, dass für die Iteration vermöge  $\Phi(y)$ ,  $\zeta$  einen Anziehungspunkt mit überlinearer Konvergenz darstellt. In der Tat ergibt sich aus (4) und (7) für  $\zeta = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 y^2 + o(\varrho^2) - (\alpha_1 y + o(\varrho))(\alpha_2 y + o(\varrho))}{y - \alpha_1 y - \alpha_2 y + \alpha_1 \alpha_2 y + o(\varrho)} \\ &= \frac{o(\varrho^2)}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)y + o(\varrho)} = o(\varrho). \end{aligned}$$

8. Will man allerdings einerseits die Fälle  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  betrachten, und andererseits auch in dem oben zuerst betrachteten Fall weitere Aussagen machen, so müssen über das Verhalten von  $\varphi_i(y)$  weitere Annahmen gemacht werden. Wir formulieren diese Annahmen folgendermassen:

Es soll für  $i = 1, 2$  je eine Zahl  $\lambda_i > 1$  existieren derart, dass für  $y \rightarrow \zeta$

$$E_i(y) = \frac{\varphi_i(y) - \alpha_i(y - \zeta)}{\varrho^{\lambda_i}} = O(1) \quad (\lambda_i > 1, y \rightarrow \zeta, i = 1, 2) \quad (9)$$

gilt, das heisst

$$\varphi_i(y) = \alpha_i(y - \zeta) + E_i(y) \varrho^{\lambda_i}, \quad (10)$$

wo  $E_i(y)$  für  $y \rightarrow \zeta$  beschränkt bleibt.

Wir nehmen in der folgenden Diskussion an, dass  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  endlich sind, das heisst, dass die  $\varphi_i(y)$  nicht linear sind. Auf den Fall, dass  $\varphi_1$  oder  $\varphi_2$  linear sind, ist es offenbar nicht nötig einzugehen, da dann  $\zeta$  aus einer linearen Gleichung zu bestimmen ist.

9. Wir bezeichnen nun den Zähler und Nenner im Ausdruck (4) bzw. mit  $Z(y)$  und  $N(y)$ , so dass

$$Z(y) = y \varphi_1(\varphi_2(y)) - \varphi_1(y) \varphi_2(y), \quad (11)$$

$$N(y) = y - \varphi_1(y) - \varphi_2(y) + \varphi_1(\varphi_2(y)) \quad (12)$$

ist. Ferner soll im folgenden von der Konvention Gebrauch gemacht werden,

dass, wenn bei den Funktionsbezeichnungen  $E_i, \varphi_i$  kein Argument angegeben wird, dieses Argument immer  $y$  ist.

10. Setzen wir in  $Z(y)$  die Ausdrücke (10) ein, so ergibt sich für  $\varrho = 0$

$$\begin{aligned} Z(y) &= \alpha_1 \alpha_2 y^2 + \alpha_1 E_2 \varrho^{\lambda_2} y + E_1(\varphi_2) |\varphi_2|^{\lambda_1} y - \alpha_1 \alpha_2 y^2 \\ &\quad - \alpha_2 y E_1 \varrho^{\lambda_1} - \alpha_1 y E_2 \varrho^{\lambda_2} - E_1 E_2 \varrho^{\lambda_1 + \lambda_2} = \\ &= E_1(\varphi_2) |\varphi_2|^{\lambda_1} y - \alpha_2 y E_1 \varrho^{\lambda_1} - E_1 E_2 \varrho^{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Hier gilt aber  $|\varphi_2| = |\alpha_2| \varrho + O(\varrho^{\lambda_2})$ ,

$$|\varphi_2|^{\lambda_1} = |\alpha_2|^{\lambda_1} \varrho^{\lambda_1} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}), \quad (13)$$

so dass wir schliesslich erhalten

$$Z(y) = T_Z y \varrho^{\lambda_1} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2}), \quad (14)$$

$$T_Z = |\alpha_2|^{\lambda_1} E_1(\varphi_2) - \alpha_2 E_1. \quad (15)$$

Setzen wir andererseits (10) in den obigen Ausdruck (12) für  $N(y)$  ein, so ergibt sich für  $\varrho = 0$

$$N(y) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) y - E_1 \varrho^{\lambda_1} - E_2 \varrho^{\lambda_2} + \alpha_1 E_2 \varrho^{\lambda_2} + E_1(\varphi_2) |\varphi_2|^{\lambda_1}. \quad (16)$$

Machen wir hier von (13) Gebrauch, so erhalten wir

$$N(y) = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) y + (\alpha_1 - 1) E_2 \varrho^{\lambda_2} + T_N \varrho^{\lambda_1} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}), \quad (17)$$

$$T_N = |\alpha_2|^{\lambda_1} E_1(\varphi_2) - E_1. \quad (18)$$

11. Diese Formeln müssen indessen in dem Fall  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \pm 1$  noch weiter entwickelt werden. Man beachte, dass für  $\alpha_2 = \pm 1$  aus (7) folgt, wenn  $\operatorname{sgn} y = \varepsilon$  gesetzt wird,

$$|\varphi_2| = \varrho (1 + \varepsilon \alpha_2 E_2 \varrho^{\lambda_2 - 1}) \quad (\alpha_2 = \pm 1).$$

Setzt man dies in (16) ein und berücksichtigt  $\alpha_1 = 1$ , so ergibt sich

$$N = \varrho^{\lambda_1} [E_1(\varphi_2) (1 + \varepsilon \alpha_2 E_2 \varrho^{\lambda_2 - 1})^{\lambda_1} - E_1],$$

$$\varrho^{-\lambda_1} N = E_1(\varphi_2) - E_1 + \varepsilon \lambda_1 \alpha_2 E_1(\varphi_2) E_2 \varrho^{\lambda_2 - 1} + O(\varrho^{2\lambda_2 - 2}) \quad (\alpha_1 = |\alpha_2| = 1). \quad (19)$$

Da wir bei der Betrachtung der Fälle mit  $\alpha_1 = |\alpha_2| = 1$  die weitere Annahme machen werden, dass *die Ableitung von  $E_1(y)$  in den beiden einseitigen offenen*

Umgebungen von  $\xi$  existiert, können wir hier weiter entwickeln:

$$E_1(\varphi_2) = E_1(\alpha_2 y) + E_2 \varrho^{\lambda_2} E_1'(\xi), \quad \xi = \alpha_2 y + \theta E_2 \varrho^{\lambda_2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$E_1(\varphi_2) - E_1(\alpha_2 y) = \frac{\varrho E_2}{\varrho^{\lambda_2-1}} \xi E_1'(\xi) = O(\xi E_1'(\xi)),$$

da für  $\varrho \rightarrow 0$  zugleich  $|\xi| \sim \varrho$  ist. Daher folgt wegen (19)

$$E_1(\varphi_2) = E_1(\alpha_2 y) + \varrho^{\lambda_2-1} O(\xi E_1'(\xi)), \quad (19a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho^{-\lambda_1} N &= E_1(\alpha_2 y) - E_1 + \varepsilon \lambda_1 \alpha_2 E_1(\alpha_2 y) E_2 \varrho^{\lambda_2-1} \\ &+ \varrho^{\lambda_2-1} O(\xi E_1'(\xi)) + O(\varrho^{2\lambda_2-2}) \quad (\alpha_1 = |\alpha_2| = 1), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wo  $\xi \rightarrow 0$  mit  $\varrho \rightarrow 0$  gilt.

12. Machen wir nun die Annahme (8), so folgt wegen (9) und (10) aus (17), wenn  $\text{Min}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda > 1$  gesetzt wird,

$$\frac{y}{N} = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} + O(\varrho^{\lambda-1}).$$

Nunmehr folgt aber wegen (14)

$$\Phi = \frac{Z}{N} = \frac{T_Z}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} \varrho^{\lambda_1} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda - 1}). \quad (21)$$

Ist  $\alpha_2 = 0$ ,  $T_Z = 0$ , so folgt aus (14) bereits  $Z/N = O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1})$ . Wir sehen daher:

*Unter den Annahmen (8), (9) und (10) gilt  $\Phi(y) - \zeta = O(\varrho^{\lambda_1})$  und für  $\alpha_2 = 0$  sogar  $\Phi(y) - \zeta = O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1})$ .*

Man sieht insbesondere, dass für  $\alpha_2 \neq 0$  im Falle (8) es auf die Wahl von  $\varphi_2$  gar nicht ankommt, so dass man ebensogut  $\varphi_1 = \varphi_2$  setzen kann. Ist dagegen  $\alpha_2 = 0$ , so kann es vorteilhaft sein,  $\varphi_1$  verschieden von  $\varphi_2$  zu wählen, wenn nämlich  $\lambda_1 > \lambda_2$  ist<sup>7)</sup>.

13. Wir betrachten nunmehr die Fälle, in denen (8) nicht erfüllt ist. In diesen Fällen müssen zusätzliche Annahmen über die Grössen  $E_i(y)$  gemacht werden. Wir betrachten zunächst den Fall  $\alpha_1 \neq 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  und beweisen:

<sup>7)</sup> Die Annahmen unseres oben hergeleiteten Resultats treffen zu auf den von HOUSEHOLDER (siehe Fussnote 6) allein betrachteten Fall. Nimmt man der einfacheren Schreibweise wegen  $\zeta \rightarrow 0$  an, so setzt HOUSEHOLDER die Funktionen  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) in der Form

$$\varphi_i(x) = \alpha_r^{(i)} x^r + \alpha_{r+1}^{(i)} x^{r+1} + \dots$$

mit gemeinsamem natürlichem  $r$  an, wobei für  $r = 1$  vorausgesetzt wird, dass  $(\alpha_r^{(1)} - 1)(\alpha_r^{(2)} - 1) \neq 0$  ist. Er erhält dann für  $r > 1$ :  $\Phi(y) = O(\varrho^{2r-1})$  und für  $r = 1$ :  $\Phi(y) = O(\varrho^2)$ .



Es sei  $\alpha_1 \neq 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ; es sei ferner die Ableitung  $E_1(y)$  sowohl in der rechtsseitigen als auch in der linksseitigen Umgebung von  $\zeta$ , mit eventueller Ausnahme von  $\zeta$ , vorhanden und dort  $\varrho E_1(y)$  gleichmässig beschränkt. Ist zugleich mit  $E_2(y)$  auch  $1/E_2(y)$  in einer Umgebung von  $\zeta$  gleichmässig beschränkt, so gilt  $\Phi(y) - \zeta = O(\varrho^{\lambda_1})$ .

In der Tat gilt nach den obigen Annahmen für  $\zeta = 0$  nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wegen (15) und (18):

$$T_Z = T_N = E_1(y + E_2 \varrho^{\lambda_1}) - E_1 = O(\varrho^{\lambda_2-1}).$$

Daher folgt aus (17)

$$N = (\alpha_1 - 1) E_2 \varrho^{\lambda_2} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1})$$

und daher schliesslich, wegen (14),

$$\Phi - \frac{Z}{N} = \frac{1}{(\alpha_1 - 1) E_2} \cdot \frac{O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2})}{\varrho^{\lambda_2} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1})} = O(\varrho^{\lambda_1}), \quad (22)$$

was zu beweisen war.

Wir sehen, dass sich für  $\alpha_1 \neq 0$  eine wesentliche Konvergenzverbesserung ergibt, während im Falle  $\alpha_1 = 0$  wir die gleiche Grössenordnung für  $\Phi$  wie für  $\varphi_1$  erhalten haben, und diese Grössenordnung lässt sich, wie eine eingehendere Diskussion zeigt, im allgemeinen nicht verbessern.

14. Wir betrachten nunmehr die Fälle, in denen  $\alpha_1 = 1$  ist. Hier werden wir je nach dem Wert von  $\alpha_2$  mehrere Unterfälle unterscheiden.

Wir beweisen zuerst:

Ist  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$  und  $1/E_1(y)$  in einer Umgebung von  $\zeta$  gleichmässig beschränkt, so gilt  $\Phi(y) - \zeta = O(\varrho^{\lambda_2})$ .

In der Tat folgt unter den jetzigen Annahmen für  $\zeta = 0$  aus (14), (15), (17) und (18)

$$Z = O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2}), \quad N = -E_1 \varrho^{\lambda_1} + O(\varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}),$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Wie man sieht, ergibt sich auch in diesem Falle keine Verbesserung gegenüber  $\varphi_2$ .

15. Ist  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \neq 0, \pm 1$  und strebt  $E_1(y)$  für  $y \downarrow \zeta$  bzw.  $y \uparrow \zeta$  gegen von 0 verschiedene Grenzwerte  $P_+, P_-$ , so gilt

$$\Phi(y) - \zeta = \beta y + o(\varrho), \quad \beta = \frac{|\alpha_2|^{\lambda_1} - \alpha_2}{|\alpha_2|^{\lambda_1} - 1}. \quad (23)$$

In der Tat ergibt sich jetzt für  $\zeta = 0$  aus (14), (15), (17) und (18)

$$Z \sim (|\alpha_2|^{\lambda_1} E_1(\varphi_2) - \alpha_2 E_1) \gamma \varrho^{\lambda_1} \sim P_{\pm} (|\alpha_2|^{\lambda_1} - \alpha_2) \gamma \varrho^{\lambda_1},$$

$$N \sim (|\alpha_2|^{\lambda_1} E_1(\varphi_2) - E_1) \varrho^{\lambda_1} \sim P_{\pm} (|\alpha_2|^{\lambda_1} - 1) \varrho^{\lambda_1},$$

je nachdem ob  $\gamma \downarrow \zeta$  oder  $\gamma \uparrow \zeta$  gilt, und daher  $Z/N \sim \beta \gamma$ , wie behauptet.

Offenbar ist in unserem Falle  $\beta \neq 0$ , so dass die Kombination von  $\varphi_1$  mit  $\varphi_2$  auf jeden Fall ein wesentlich schlechteres Ergebnis liefert, als wenn man  $\varphi_2$  mit  $\varphi_2$  kombiniert. Ist  $\alpha_2 < -1$ , so ist  $\beta > 1$ , so dass  $\zeta$  für  $\Phi$  zu einem Abstossungspunkt wird. Liegt  $\alpha_2$  zwischen  $-1$  und  $0$ , so ist  $\beta$  negativ und kann sowohl  $\leq -1$  als auch  $> -1$  sein. Immerhin ergibt sich für hinreichend kleine Werte von  $\alpha_2$ :  $\beta < 1$ . Ist andererseits  $\alpha_2 > 1$ , so ist  $\beta$  positiv und kleiner als  $1$ , so dass sich immerhin ein Anziehungspunkt ergibt. Ist aber  $0 < \alpha_2 < 1$ , so gilt sogar  $0 < \beta_2 < \alpha_2$ , so dass eine Konvergenzverbesserung gegenüber  $\varphi_2$  zu konstatieren ist. In der Tat gilt ja in diesem Falle

$$\frac{\beta}{\alpha_2} = \frac{1 - \alpha_2^{\lambda_1 - 1}}{1 - |\alpha_2|^{\lambda_1}} < 1.$$

16. Wir betrachten nunmehr den Fall  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . Hier ergibt sich für  $\zeta = 0$  aus (20), wenn  $E'_1(y)$  in den beiden einseitigen offenen Umgebungen von  $\zeta$  existiert und  $\varrho E'_1(y)$  mit  $\varrho \rightarrow 0$  gegen  $0$  konvergiert,

$$\varrho^{-\lambda_1} N = \varepsilon \lambda_1 E_1 E_2 \varrho^{\lambda_2 - 1} [1 + o(1)].$$

Daher folgt aus (6) und (10)

$$\Phi - \gamma = - \frac{E_1 E_2 \varrho^{\lambda_1 + \lambda_2}}{\varepsilon \lambda_1 E_1 E_2 \varrho^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1} [1 + o(1)]} = - \frac{\gamma}{\lambda_1} + o(\varrho).$$

Wir sehen:

Ist  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $E_1 E_2 \neq 0$  und ist  $\varrho E'_1(y) \rightarrow 0$  für  $\zeta \rightarrow 0$ , so gilt:

$$\Phi - \zeta = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) (\gamma - \zeta) + \sigma (\gamma - \zeta). \quad (24)$$

In diesem Falle erhalten wir also die lineare Konvergenz. Über die Bedeutung der Annahme  $\varrho E'_1(y) \rightarrow 0$  vergleiche man Nr. 23.

17. Endlich sei der Fall  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$  betrachtet. Hier folgt aus (20), wenn wir annehmen, dass  $E'_1$  vorhanden ist und  $\varrho E'_1(y) = O(1)$  bleibt für  $\varrho \rightarrow 0$ :

$$\varrho^{-\lambda_1} N = E_1(-\gamma) - E_1(\gamma) + O(\varrho^{\lambda_2 - 1}). \quad (25)$$

Andererseits folgt aus (14) und (15) durch Division mit  $y \varrho^{\lambda_1}$ :

$$\varrho^{-\lambda_1} \frac{Z}{y} = E_1(\varrho_2) + E_1(y) + O(\varrho^{\lambda_2-1})$$

und daher, wegen der Beschränktheit von  $\varrho E'_1$ , nach (19a)

$$\varrho^{-\lambda_1} \frac{Z}{y} = E_1(-y) + E_1(y) + O(\varrho^{\lambda_2-1}). \quad (26)$$

Für die weitere Diskussion ist offenbar das Verhalten von  $E_1(-y)$  und  $E_1(y)$  massgebend. Hier betrachten wir zwei Fälle, die wir als den Fall  $u)$  und Fall  $g)$  bezeichnen, weil sie im Falle eines ganzzahligen  $\lambda_1$  mit der Annahme zusammenhängen, dass  $\lambda_1$  ungerade bzw. gerade ist.

18. Im Falle  $u)$  setzen wir voraus, dass für  $y \rightarrow 0$  die Relation besteht

$$u) \quad E_1(y) = \varepsilon P + O(\varrho) \quad (P \neq 0), \quad (27)$$

$\varepsilon = \operatorname{sgn} y$  gesetzt. In diesem Falle folgt aus (25) und (26)

$$\varrho^{-\lambda_1} \frac{Z}{y} = O(\varrho) + O(\varrho^{\lambda_2-1}), \quad \varrho^{-\lambda_1} N = -2\varepsilon P + O(\varrho) + O(\varrho^{\lambda_2-1}),$$

und daher durch Division

$$u) \quad \Phi = \frac{Z}{N} = O(\varrho^2) + O(\varrho^{\lambda_2}). \quad (28)$$

19. Im Falle  $g)$  dagegen setzen wir voraus, dass

$$g) \quad E_1(y) = P + O(\varrho) \quad (P \neq 0), \quad (29)$$

ist. Hier folgt

$$\varrho^{-\lambda_1} N = O(\varrho) + O(\varrho^{\lambda_2-1}), \quad \varrho^{-\lambda_1} \frac{Z}{y} = 2P + O(\varrho) + O(\varrho^{\lambda_2-1}),$$

und daher durch Division

$$\frac{\Phi}{y} = \frac{2P + O(\varrho) + O(\varrho^{\lambda_2-1})}{O(\varrho) + O(\varrho^{\lambda_2-1})}. \quad (30)$$

In diesem Falle gilt  $|\Phi/y| \rightarrow \infty$ , so dass  $\zeta$  sicherlich kein Anziehungspunkt für  $\Phi(y)$  ist. Man kann sogar im Fall  $g)$  Beispiele bilden, in denen  $\zeta$  nicht einmal ein Fixpunkt bleibt. Setzt man zum Beispiel  $\varphi_1(x) = x + x^2$ ,  $\varphi_2(x) = -x + x^{3\lambda_1}$ , so ergibt eine leichte Rechnung, dass  $\Phi = y - 1/y$  ist, so dass  $\Phi$  für  $y \rightarrow 0$  nicht endlich bleibt, anstatt gegen 0 zu konvergieren.

20. Zusammenfassend erhalten wir:

Es sei  $\alpha_1 = -\alpha_2 - 1$  und es sei  $E'_1(y)$  vorhanden und  $\varrho E'_1(y)$  gleichmäßig beschränkt, sowohl für  $y \uparrow \zeta$  als auch für  $y \downarrow \zeta$ . Nimmt man an, dass für ein  $P \neq 0$   $E_1(y) = P + O(\varrho)$  oder  $= -P + O(\varrho)$  ist, je nachdem, ob  $y$  von rechts oder von links gegen  $\zeta$  konvergiert, so gilt (28), so dass die Ordnung der Konvergenz der Iteration vermöge  $\Phi$  wenigstens gleich  $\text{Min}(2, \lambda_2) > 1$  ist.

Gilt dagegen für beidseitige Konvergenz von  $y$  gegen  $\zeta$ ,  $E_1(y) = P + O(\varrho)$  für  $y \uparrow \zeta$  und  $E_1(y) = -P + O(\varrho)$  für  $y \downarrow \zeta$ , so ist  $\zeta$  sicherlich kein Anziehungspunkt für die Iteration vermöge  $\Phi$  und braucht nicht einmal ein Fixpunkt dieser Iteration zu sein.

21. Man wird sich nun vor allem dafür interessieren, ob man durch den Householderschen Ansatz ein besseres Ergebnis erhalten kann, als indem man eine geeignete der beiden Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  mit sich selbst, wie im Ansatz von STEFFENSEN, kombiniert. Geht man die oben betrachteten Fälle durch, so sieht man, dass in allen Fällen, bis auf den in Nr. 12 betrachteten Fall, man durch den Steffensenschen Ansatz entweder ein besseres Resultat bekommt oder ein ebensogutes mit weniger Annahmen. Eine Verbesserung gegenüber dem Steffensenschen Ansatz ist im Falle der Nr. 12 dann vorhanden, wenn  $\lambda_1 > \lambda_2$  und  $\alpha_2 = 0, \alpha_1 \neq 0$  ist, da dann beim Householderschen Ansatz die Ordnung der Konvergenz  $\lambda_1 + \lambda_2 - 1$  ist, während sie, wenn  $\varphi_1$  mit sich selbst kombiniert wird, nur  $\lambda_1$ , und wenn  $\varphi_2$  mit sich selbst kombiniert wird, nur  $2\lambda_2 - 1$  ist.

22. Es möge noch der Sinn der in der obigen Diskussion benutzten Annahmen über  $E'_1(y)$  erläutert werden. Die Annahme, dass  $\varrho E'_1(y) = O(1)$  ist, läuft darauf hinaus, dass  $\varphi'_1(y)$  in einer Umgebung von  $\zeta$  vorhanden und dass dort

$$\varphi'_1(y) - \alpha_1 = O(\varrho^{\lambda_1-1}) \quad (y \rightarrow \zeta) \quad (31)$$

ist. In der Tat folgt aus (10), dass  $E_1(y)$  für  $y \neq \zeta$  zugleich mit  $\varphi_1(y)$  in einer Umgebung von  $\zeta$  differenzierbar ist. Differenziert man nun (10) nach  $y$ , so folgt für  $\zeta = 0$

$$\varphi'_1(y) = \alpha_1 + E'_1(y) \varrho^{\lambda_1} + \varepsilon \lambda_1 E_1(y) \varrho^{\lambda_1-1} \quad (\varepsilon = \text{sgn } y), \quad (32)$$

und daher nach (31)

$$\varrho E'_1(y) = O(1).$$

Existiert umgekehrt  $E'_1(y)$  und ist  $\varrho E'_1(y) = O(1)$ , so folgt aus (32) die Relation (31).

23. Was andererseits die Bedingung

$$\varrho E'_1(y) \rightarrow 0 \quad (\varrho \rightarrow 0) \quad (33)$$

anbetrifft, so ist sie etwas allgemeiner als die Annahme, dass

$$\frac{\varphi'_1(y) - \alpha_1}{\varrho^{\lambda_1 - 1}} \rightarrow \begin{cases} \gamma_+ \neq 0 & (y \downarrow \zeta), \\ \gamma_- \neq 0 & (y \uparrow \zeta). \end{cases} \quad (34)$$

Man kann nämlich leicht zeigen, dass aus (33) und der oben vorausgesetzten Beschränktheit von  $E_1(y)$  nicht etwa folgt, dass  $E_1(y)$  für  $y \downarrow \zeta$ ,  $y \uparrow \zeta$  gegen von 0 verschiedene Grenzwerte konvergiert. Wird aber neben (33) auch noch explizite vorausgesetzt:

$$E_1(y) \rightarrow \begin{cases} \sigma_+ \neq 0 & (y \downarrow \zeta), \\ -\sigma_- \neq 0 & (y \uparrow \zeta), \end{cases} \quad (35)$$

so lässt sich zeigen, dass die Annahmen (33) und (35) zusammen äquivalent sind mit der Annahme (34), wobei

$$\gamma_{\pm} = \lambda_1 \sigma_{\pm}. \quad (36)$$

In der Tat folgt aus (32), wenn man dort (33) und (35) berücksichtigt, sofort (34) und (36).

Gilt aber umgekehrt (34), so wende man auf den Quotienten

$$E_1(y) = \frac{E_1(y) \varrho^{\lambda_1}}{\varrho^{\lambda_1}}$$

die Bernoulli-l'Hôpitalsche Regel an; dann folgt aus (34), wegen  $(E_1(y) \varrho^{\lambda_1})' = \varphi'_1(y) - \alpha_1$

$$E_1(y) \rightarrow \frac{\gamma_{\pm}}{\lambda_1},$$

das heisst (35) und (36). Wird aber dies in (32) eingetragen, so ergibt sich sodann auch (33).

24. Das Steffensensche Verfahren wird gelegentlich in der neueren Literatur als «Aitken's  $\delta^2$ -Prozess» bezeichnet, was allerdings, wie uns scheint, auf einem Missverständnis beruht. In der betreffenden Arbeit von AITKEN<sup>8)</sup> handelt sich um die Bemerkung, dass, wenn die Zahlenfolge  $a_v$  aus einer linearen Rekursionsvorschrift endlicher Ordnung (einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten) entspringt, und  $a_{v+1}/a_v \rightarrow \lambda$  gilt, dann der Ausdruck

$$\frac{a_{v+1} a_{v-1} - a_v^2}{a_{v+1} - 2 a_v + a_{v-1}} \quad (37)$$

<sup>8)</sup> A. C. AITKEN, *Studies in Practical Mathematics*. II. The Evaluation of the Latent Roots and Latent Vectors of a Matrix, Proc. roy. Soc., Edinburgh, 57, 291-295 (1937).



noch schneller gegen  $\lambda$  konvergiert. Dies trifft in der Tat unter sehr allgemeinen Annahmen zu, wobei indessen festzustellen ist, dass, wenn die Konvergenz von  $a_{v+1}/a_v$ , wie es gewöhnlich der Fall ist, linear ist, auch der Ausdruck (37) gleichfalls *linear* gegen  $\lambda$  konvergiert, aber mit kleinerem Quotienten als  $a_{v+1}/a_v$ . Es wird also dabei die *Ordnung der Konvergenz* nicht erhöht, und andererseits wird auch durch die Anwendung des Aitkenschen  $\delta^2$ -Prozesses die ganze Folge  $a_v$  *nicht geändert*, sondern nur in vorteilhafterer Weise ausgenützt. Wird andererseits durch den Steffensenschen Iterationsprozess die Iterationsfunktion  $\varphi(x)$  durch die Iterationsfunktion  $\Phi(y)$  ersetzt, so wird dabei auch die ganze Folge der Iterationswerte vollständig geändert. Insofern scheint es uns, dass, obgleich die Formel (37) formale Ähnlichkeit mit der Formel (1) aufweist, es kaum gerechtfertigt sein dürfte, den Steffensenschen Ansatz mit dem Aitkenschen  $\delta^2$ -Prozess zu identifizieren.

### Summary

STEFFENSEN discovered that the iteration by  $y = \varphi(x)$  can be considerably improved if  $\varphi(x)$  is replaced by the function

$$\Phi(y) = \frac{y \varphi(\varphi(y)) - \varphi(y)^2}{y - 2 \varphi(y) + \varphi(\varphi(y))}.$$

This procedure has been generalized by HOUSEHOLDER, who starts from *two* iterations  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  with a common fix-point and builds up the new iterating function

$$\Phi^*(y) = \frac{y \varphi_1(\varphi_2(y)) - \varphi_1(y) \varphi_2(y)}{y - \varphi_1(y) - \varphi_2(y) + \varphi_1(\varphi_2(y))}.$$

We prove under very general conditions that any fix-point of  $\varphi(x)$ , resp. any common fix-point of  $\varphi_1(x)$  and  $\varphi_2(x)$  becomes a point of attraction for Steffensen's or Householder's iterating function, and compare both procedures.

Eingegangen: 26. August 1955.)

# Thermal Stresses in Viscoelastic Structures<sup>1)</sup>

By WILLIAM PRAGER, Providence, Rhode Island, USA.<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

In the standard texts on the theory of structures, more space is allotted to trusses than seems warranted by their role in modern structural engineering. This is done because the discussion of the mechanical behavior of trusses requires but a minimum of mathematics and thus provides an excellent opportunity for developing the student's understanding of the mechanical behavior of structures in general. In a similar manner, the influence of various mechanical effects on structural behavior is most readily investigated for trusses. As a rule, the extension of the results of such an investigation to other types of structures does not present any difficulties.

In recent papers FREUDENTHAL [1], [2]<sup>3)</sup> used the simple truss shown in Figure 1 as a convenient structural model for the discussion of inelastic thermal

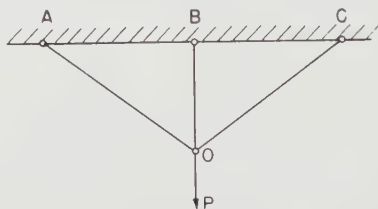


Figure 1

FREUDENTHAL's structural model.

stresses. The state of loading of this simply indeterminate structure was supposed to be specified by a single parameter, the load intensity  $P$ , and only the bar  $OB$  was supposed to exhibit inelastic behavior; the two other bars were assumed to be perfectly elastic.

Even so simple a model may reflect many characteristic traits, but it cannot be expected to reveal all these traits<sup>4)</sup>. A more general investigation of thermal stresses in inelastic trusses seems therefore desirable.

<sup>1)</sup> The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Ballistic Research Laboratories of Aberdeen Proving Ground under Contract DA-19-020-ORD-79\*

<sup>2)</sup> Brown University.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 237.

<sup>4)</sup> For perfectly plastic structures, for instance, this intuitive statement is confirmed by the work of PRAGER and SYMONDS [3], [4].

The present paper is concerned with the thermo-mechanical behavior of a statically indeterminate truss that consists of Maxwell bars. The effects of typical variations of loads and temperatures on the stresses in the truss are discussed. While the actual relation between creep rate and stress in structural metals is less simple than the linear relation stipulated for a Maxwell material, the structural model considered in the following may be expected to indicate the general effect of creep on the stresses in indeterminate structures.

## 2. Fundamental Relations

The *principle of virtual displacements* is the only tool of structural theory used in the following discussion. For a truss, this principle involves, on the static side, loads  $\mathbf{P}$  and bar forces  $S$  that are in equilibrium with these loads, and, on the kinematic side, joint displacements  $\mathbf{u}$  and bar elongations  $\lambda$  that result from these displacements. The principle of virtual displacements then asserts that

$$\sum S \lambda = \sum \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

where the sum on the left includes all bars and that on the right all joints of the truss, the dot being used to indicate the scalar product.

The discussion of the mechanical behavior of highly indeterminate structures is greatly facilitated by the introduction of *orthonormal states of stress* (see, for instance, [5]). Consider two states of stress in a given truss, and let  $S'$  and  $S''$  denote the corresponding forces in a generic bar. If  $l$  denotes the length of this bar,  $A$  its cross-sectional area,  $E$  its modulus of elasticity, and  $c = l/(AE)$  its elastic compliance, the two states of stress are said to be *orthogonal* if

$$\sum c S' S'' = 0, \quad (2)$$

where the sum includes all bars of the truss. If moreover

$$\sum c S'^2 = 1, \quad \sum c S''^2 = 1, \quad (3)$$

the two states of stress are said to be *orthonormal*. Two groups of loads acting on a truss are called orthonormal, if the *elastic bar forces* corresponding to them are orthonormal. These elastic forces must be computed by considering only the elasticity of the bars but neglecting all other rheological properties, e.g. viscosity or plasticity.

A system of loads that depends on  $m$  parameters is most conveniently treated as a linear combination of  $m$  orthonormal groups of loads. The coefficient  $p'_i$  of the  $i$ -th group will be called the *intensity* of this group in the linear combination. If  $S'_i$  is the elastic force caused in a generic bar by the unit intensity of the  $i$ -th group, the *elastic response* of this bar to an arbitrary

state of loading of the considered type is given by

$$S^{(e)} = p'_1 S'_1 + p'_2 S'_2 + \cdots + p'_m S'_m. \quad (4)$$

This elastic response, of course, represents the actual force in the bar only if all bars of the truss are perfectly elastic and thermal stresses are absent.

When inelastic behavior or thermal stresses are to be considered, the deviation of the actual state of stress from the elastic response to the given loads constitutes a state of *residual stress*<sup>5)</sup>. In a truss with  $n$  redundancies, the most general state of residual stress can be treated as a linear combination of  $n$  orthonormal states of residual stress. Let  $p''_j$  be the intensity of the  $j$ -th of these states in the linear combination and  $S''_j$  the residual force caused in a generic bar by the unit intensity of the  $j$ -th state of residual stress. The actual force in this bar can thus be written in the form

$$S = p'_1 S'_1 + \cdots + p'_m S'_m + p''_1 S''_1 + \cdots + p''_n S''_n. \quad (5)$$

It is readily shown that any elastic state of stress is orthogonal to any residual state of stress. Indeed, the joint displacements  $\mathbf{u}'$  associated with an elastic state of stress  $S'$  produce the bar elongations  $\lambda' = c S'$ , and the bar forces  $S''$  of a residual state of stress  $S''$  do not require any loads  $\mathbf{P}''$  for equilibrium. Application of the principle of virtual displacements to the kinematic variables  $\mathbf{u}'$  and  $\lambda' = c S'$ , and the static variables  $\mathbf{P}'' = 0$  and  $S''$  therefore shows the states  $S'$  and  $S''$  to be orthogonal. It follows from this that the  $m + n$  states involved in the linear combination (5) form an orthonormal set.

### 3. Thermal Stresses in Elastic Trusses

At the time  $t = 0$ , let the truss be free from loads and stresses. The absence of loads implies that the intensities  $p'_1, p'_2, \dots, p'_m$  of the  $m$  orthonormal load groups vanish initially, but the absence of thermal stresses does not imply that all bars have the same initial temperature. Any subsequent thermal stresses, however, will depend only on the differences  $\theta$  between the temperatures of the various bars in the considered state and the initial state. For  $t > 0$ , these temperature differences and the intensities of the  $m$  orthonormal load groups are supposed to be given as functions of time; these functions are supposed to vary slowly with time, so that a quasi-static analysis is appropriate.

Let  $S$  be the force in a generic bar and  $\theta$  the difference between the temperatures of this bar in the instantaneous and initial states. The total elongation  $\lambda$  of the bar now consists of the elastic part  $\lambda^{(e)} = c S$  and the thermal part  $\lambda^{(\theta)} = \alpha l \theta$ , where  $\alpha$  is the coefficient of thermal expansion. Since the

<sup>5)</sup> This term is here used as the equivalent of the German 'Selbstspannungszustand'.

total elongation  $\lambda = c S - \alpha l \theta$  of the bars correspond to a system of joint displacements, the principle of virtual displacements now furnishes

$$\sum (c S + \alpha l \theta) S_i'' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Here  $S$  is given by (5). The states appearing in (5) are orthonormal; substitution of (5) into (6) therefore furnishes

$$p_i'' = - \sum \alpha l \theta S_i'' \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

In the expression (5) for a generic bar force, the intensities  $p_i'$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) are given as functions of time, whereas the intensities  $p_i''$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) must be found from the given temperature differences  $\theta(t)$  by means of (7).

It is convenient to introduce the fictitious thermal forces  $\Theta$  that the temperature changes  $\theta$  would produce if the bars were not allowed to extend or contract. Since

$$\Theta = - \frac{\alpha l \theta}{c}, \quad (8)$$

equation (7) can be written in the form

$$p_i''^{(e)} = \sum c \Theta S_i'' \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

where the superscript  $(e)$  has been used to indicate that (9) refers to a perfectly elastic truss.

Equation (9) shows that there will not be any thermal stresses, if the fictitious state of stress specified by the forces (8) is orthogonal to all residual states of stress  $S_i''$ .

#### 4. Thermal Stresses in Homogeneous Trusses with Maxwell Bars

The rate of elongation of a Maxwell bar is given by

$$\dot{\lambda} = c \left( \dot{S} + \frac{S}{\tau} - \dot{\Theta} \right), \quad (10)$$

where the dot indicates differentiation with respect to time and  $S$  is the force in the bar,  $\tau$  the relaxation time treated as independent of temperature and stress, and  $\Theta$  the fictitious force (8).

Since the rates of elongation of the bars of the truss correspond to a system of joint velocities, the principle of virtual velocities furnishes

$$\sum c \left( \dot{S} + \frac{S}{\tau} - \dot{\Theta} \right) S_i'' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

In discussing equation (11), assume first that the relaxation time  $\tau$  has the same value for each bar (*homogeneous truss*). Substitution of (5) into (11) and

use of the orthonormality of the states appearing in (5) then leads to following differential equation:

$$\dot{p}_i'' + \frac{p_i}{\tau} = \dot{p}_i''^{(e)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

where  $p_i''^{(e)}$  is given by (9). The solution of (12) that satisfies the initial condition  $p_i'' = 0$  for  $t = 0$  is given by

$$p_i'' = \int_0^t \dot{p}_i''^{(e)}(t') e^{-(t-t')/\tau} dt'. \quad (13)$$

When all bars have the same relaxation time (homogeneous truss) there is therefore no interaction between the thermal stresses and the stresses caused by the external loads. In particular, in the absence of thermal effects the stresses that given fixed loads produce in a homogeneous truss with Maxwell bars equal the stresses that these loads produce in the corresponding elastic truss. The analogous theorem for the viscoelastic continuum is due to ALFREY [6].

Assume that  $p_i''^{(e)}$  varies with time as shown by the line  $OAB$  in Figure 2. It then follows from equation (13) that  $p_i''$  reaches its maximum at the instant  $\tau = t^*$  and that

$$p_i''(t^*) = \frac{\tau}{t^*} (1 - e^{-t^*/\tau}). \quad (14)$$

Figure 3 shows  $p_i''(t^*)$  as a function of the ratio  $t^*/\tau$ . It is seen that the viscosity of the Maxwell bars leads to a substantial attenuation of the thermal stresses predicted by elastic theory except when  $t^*/\tau \ll 1$ , i.e. when the temperature changes are effected during an interval of time  $t^*$  that is much smaller than the relaxation time  $\tau$ .

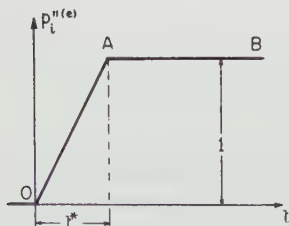


Figure 2

Assumed variation of elastic thermal stress  $p_i''^{(e)}$  with time  $t$ .

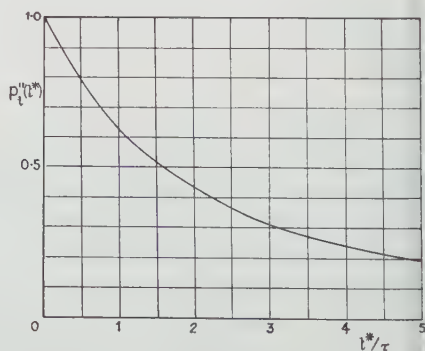


Figure 3

Dependence of maximum actual thermal stress  $p_i''(t^*)$  on ratio between warm-up time  $t^*$  (see Figure 2) and relaxation time  $\tau$ .



Another important type of variation of  $\dot{p}_i^{(e)}$  with time is represented by the line  $OAB$  in Figure 4:  $\dot{p}_i^{(e)}$  is suddenly raised from 0 to 1 at  $t = 0$  and is thereafter made to fluctuate according to  $\dot{p}_i^{(e)} = 1 + a \sin \omega t$ . The corresponding variation of  $\dot{p}_i''$  is found to be

$$\dot{p}_i'' = e^{-t/\tau} \left( 1 - \frac{a \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) + \frac{a \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t). \quad (15)$$

The first term on the right-hand side of (15) represents the transient effects of the sudden raise of  $\dot{p}_i^{(e)}$  from 0 to 1 and the start of the fluctuations in

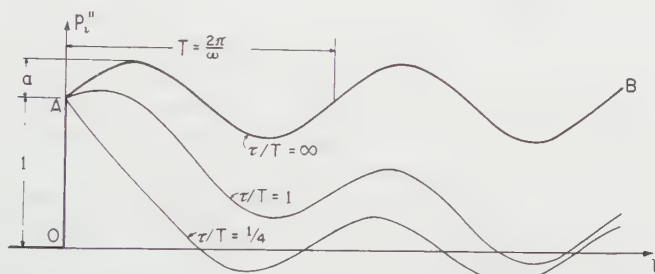


Figure 4

Response of the actual thermal stress  $\dot{p}_i''$  to the fluctuations of elastic thermal stress represented by the line  $OAB$ . ( $T =$  period of elastic thermal stress,  $\tau =$  relaxation time.)

$\dot{p}_i^{(e)}$  at  $t = 0$ ; the second term on the right of equation (15) represents the steady state that is reached when the transient effects have died out. Whereas  $\dot{p}_i^{(e)}$  fluctuates about the value  $\dot{p}_i^{(e)} = 1$ , the steady state response of  $\dot{p}_i''$  fluctuates about the value  $\dot{p}_i'' = 0$ . This remark is important when fatigue has to be considered.

Figure 4 shows the variation of  $\dot{p}_i''$  with time for some values of the ratio between the relaxation time  $\tau$  and the period  $T = 2\pi/\omega$  of the fluctuations. In the limit  $\tau/T \rightarrow \infty$ , we have  $\dot{p}_i'' = \dot{p}_i^{(e)}$ . The smaller  $\tau/T$ , the faster does the steady state become established. In the steady state the ratio between the amplitudes of  $\dot{p}_i''$  and  $\dot{p}_i^{(e)}$  is given by  $\omega \tau (1 + \omega^2 \tau^2)^{-1/2}$ .

## 5. Thermal Stresses in Inhomogeneous Trusses with Maxwell Bars

Consider next an *inhomogeneous truss* in which various bars have different relaxation times, either because they are made of different materials or because their average temperatures differ so much that the dependence of the relaxation time on the average temperature must be taken into account. Substitution

of (5) into (11) and use of the orthonormality of the states in (5) then yields

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i'' + b_{1i} \dot{p}_1'' + \cdots + b_{ni} \dot{p}_n'' &= \dot{p}_i^{(e)} - a_{1i} \dot{p}_1' - \cdots - a_{mi} \dot{p}_m' \\ (i &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

where

$$a_{hi} = \sum \left( c \frac{S_h' S_i''}{\tau} \right), \quad b_{hi} = \sum \left( c \frac{S_h'' S_i''}{\tau} \right). \quad (17)$$

The general solution of the system (16) is the sum of a particular solution of this system and the general solution of the corresponding homogeneous system. The latter describes the relaxation of a generic state of residual stress in the absence of loads and temperature changes. The discussion of this complex relaxation process is simplified by the introduction of the *characteristic states of residual stress*. A state of residual stress is called characteristic if, in the absence of loads and temperature changes, the forces in all bars decrease as  $e^{-t/\tau}$ , where the relaxation time  $\tau$  associated with the considered characteristic state has the same value for all bars of the truss. It can be shown<sup>6)</sup> that an arbitrary state of residual stress in a truss with  $n$  redundancies can be treated as a linear combination of  $n$  orthonormal characteristic states of residual stress. In general, the relaxation times  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  associated with the characteristic states are distinct, but in special circumstances two or more of these states may have the same relaxation times. For example, for the homogeneous truss considered in the preceding section, all states of residual stress have the same relaxation time  $\tau$ .

When the  $n$  arbitrary orthonormal states of residual stress used in the preceding analysis are replaced by  $n$  orthonormal characteristic states of residual stress, equation (16) reduces to

$$\dot{p}_i'' + \frac{\dot{p}_i}{\tau_i} = \dot{p}_i^{(e)} - a_{1i} \dot{p}_1' - \cdots - a_{mi} \dot{p}_m' \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

where

$$\dot{p}_i^{(e)} = \sum c \Theta S_i'', \quad a_{hi} = \sum \left( c \frac{S_h' S_i''}{\tau} \right). \quad (19)$$

In equations (18) and (19),  $p_i''$  denotes the intensity of the  $i$ -th characteristic state,  $\tau_i$  its relaxation time, and  $S_i''$  the force in a generic bar caused by the unit intensity of the  $i$ -th characteristic state, and the fictitious thermal force  $\Theta$  is given by (8).

The first term on the right-hand side of (18) represents the thermal effects, whereas the other terms depend on the external loads. Comparison of (18)

<sup>6)</sup> The proof of this statement, contained in the first draft of the present paper, was deleted after the author's attention had been drawn to a recent paper by Biot [7], which contains a general discussion of linear relaxation processes.

and (12) shows that the thermal effects in an inhomogeneous truss resemble those in a homogeneous truss except that the various states of residual stress may now be associated with different relaxation times.

To illustrate the behavior predicted by the load terms on the right-hand side of equation (18) in the absence of thermal effects, assume that all loads are suddenly brought on the truss and thereafter kept constant. The immediate response of the truss to this sudden loading is purely elastic, i.e. immediately after the loading  $p_i'' = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). The intensity  $p_i''$  of the  $i$ -th characteristic state of residual stress then tends towards the asymptotic value obtained by multiplying the load terms on the right-hand side of equation (18) by  $\tau_i$ . If this asymptotic value is assumed to be unity, the variation of  $p_i''$  with time is given by  $p_i'' = 1 - e^{-t/\tau_i}$ . Since the characteristic states with small relaxation times approach their asymptotic intensities faster than the characteristic states with large relaxation times, the transition from the elastic state of stress prevailing immediately after loading to the ultimate state of stress is rather complex. A graphical treatment of this transition in a special case has been given by MEACHAM [8].

An interesting example of combined load and temperature effects is obtained by assuming the loads to vary with  $\cos \omega t$  and the temperature differences with  $\sin \omega t$ . The loads then have maximum intensity when the temperature differences vanish and vice versa. The right-hand side of equation (18) is of the form  $A \cos \omega t$  and the steady state behavior of  $p_i''$  is given by

$$p_i'' = B \cos(\omega t - \varphi), \quad (20)$$

where

$$B = \frac{\tau_i A}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_i^2}}, \quad \tan \varphi = \omega \tau_i. \quad (21)$$

Note that the amplitude  $A$  of the right-hand side of equation (18) reflects the temperature fluctuations as well as the load fluctuations. As far as the residual stresses are concerned, temperature fluctuations can therefore be replaced by equivalent load fluctuations. Since, however, the intensities  $p_1'$ ,  $p_2'$ ,  $p_3'$ ,  $\dots$ ,  $p_m'$  of the elastic stresses depend only on the loads, such an equivalence does not exist for the total stresses.

## REFERENCES

- [1] A. M. FREUDENTHAL, *On Inelastic Thermal Stresses*, in: *Studies in Mathematics and Mechanics Presented to R. v. Mises* (Academic Press, New York 1954), pp. 251-261.
- [2] A. M. FREUDENTHAL, *Effect of Rheological Behavior on Thermal Stresses*, J. appl. Phys. 25, 1110-1117 (1954).
- [3] W. PRAGER, *Problem Types in the Theory of Perfectly Plastic Materials*, J. aeron. Sci. 15, 337-341 (1948).

- [4] W. PRAGER and P. S. SYMONDS, *Stress Analysis in Elastic-Plastic Structures*, Proc. Symposia appl. Math. 3, 187-197 (1950).
- [5] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Birkhäuser Verlag, Basel 1955), Chap. 2.
- [6] T. ALFREY, *Non-Homogeneous Stresses in Visco-Elastic Media*, Quart. appl. Math. 2, 113-119 (1944).
- [7] M. A. BIOT, *Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation*, J. appl. Phys. 25, 1385-1391 (1954).
- [8] R. C. MEACHAM, *Theory of Creep in Pin-Jointed Structures*, Proc. 1st U.S. Congr. appl. Mech., Chicago, 1951, 619-624.

### Zusammenfassung

Das thermo-mechanische Verhalten eines statisch unbestimmten Fachwerks wird untersucht unter der Annahme, dass die Fachwerkstäbe der Maxwell'schen Spannungs-Formänderungsbeziehung gehorchen. Insbesondere wird der Einfluss typischer Last- und Temperaturänderungen besprochen. Obwohl der genaue Zusammenhang zwischen Spannung und Kriechgeschwindigkeit in Baumetallen weniger einfach ist als der für das Maxwell'sche Material vorausgesetzte lineare Zusammenhang, kann man erwarten, dass das hier besprochene Modell den Einfluss von Kriechvorgängen auf die Spannungen in statisch unbestimmten Konstruktionen qualitativ wiedergibt.

(Received: June 23, 1955.)

## On Stability Questions for Pendulum-Type Equations<sup>1)</sup>

By GEORGE SEIFERT, Lincoln, Nebraska, USA<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

The differential equation

$$\ddot{\theta} + f(\theta, \alpha) \dot{\theta} = g(\theta), \quad (\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{dt}, \quad (1)$$

where  $f$  and  $g$  have continuous derivatives with respect to  $\theta$  everywhere,  $f$  is continuous in the positive parameter  $\alpha$ ,  $g(\theta) = 0$  has simple roots,  $f(\theta + 2\pi, \alpha) = f(\theta, \alpha)$ , and  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$  for all  $\theta$ , is of interest in certain problems relating to the performance of synchronous motors [1]<sup>3)</sup>.

If  $f(\theta, \alpha) = \alpha f(\theta)$ , where  $f(\theta) > 0$  for all  $\theta$ , conditions have been given under which each solution  $\theta(t)$  of equation (1) will tend to a finite limit as  $t \rightarrow +\infty$  [2]; i.e., each solution is stable with respect to a point of equilibrium

<sup>1)</sup> This research was supported by the United States Air Force, through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

<sup>2)</sup> University of Nebraska.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 247.

of the system described by equation (1). If  $f(\theta, \alpha)$  may have negative values, periodic solutions of equation (1) which were excluded by a nonexistence criterion of BENDIXSON in the previous case may exist, complicating the stability question. It is however possible to extend the notion of stability to solutions which coincide with or asymptotically approach some periodic solution of equation (1); here solutions with period zero (constants) and infinity (in the sense to be described below) are allowed.

Under the conditions on  $f$  given in section 2 of this paper we show how a value  $\alpha_1$  may be obtained such that whenever  $\alpha > \alpha_1$ , each solution of equation (1) is stable in the general sense just mentioned. If to these conditions we add those on  $f$  given in section 3, we may obtain a value  $\alpha_m$  such that whenever  $\alpha > \alpha_m$  each solution of this equation is stable in the more restricted sense. Under conditions given on  $f$  and  $g$  in section 4 we show how a value  $\alpha_0 > 0$  may be obtained such that whenever  $\alpha < \alpha_0$ , this equation will have some solutions not stable in either sense. Finally specific examples of functions  $f$  and  $g$  are given in section 5 which satisfy all the conditions of the previous sections and for which  $f$  takes on negative values for every  $\alpha > 0$ .

A system equivalent to equation (1) is

$$\ddot{\theta} = y, \quad \dot{y} = g(\theta) - f(\theta, \alpha)y. \quad (2)$$

In terms of a  $(\theta, y)$ -coordinate system of a suitably chosen 2-space (which may be either the usual cartesian plane or in this case the surface of a circular cylinder), the graphs of the solutions of this system are known as its characteristics or phase trajectories. The singular points of this system are the points  $(\theta_n, 0)$  for which  $g(\theta_n) = 0$ ; those zeros  $\theta_{2i}$  for which  $g'(\theta_{2i}) > 0$  are of saddle type while those  $\theta_{2i+1}$  for which  $g'(\theta_{2i+1}) < 0$  are either of focal, center, or nodal type. We will assume  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) > 0$  which is clearly no restriction on generality.

In terms of the cartesian phase plane a phase trajectory which consists of a closed curve corresponds to a periodic solution of finite period of equation (1). If a trajectory is closed by the addition of a singular point (necessarily of saddle type) it corresponds to a solution which approaches a finite value  $\theta_{2i}$  for  $t \rightarrow +\infty$  and  $t \rightarrow -\infty$ ; i.e., may be said to be of infinite period in  $t$ .

We now define the two concepts of stability to be used. A solution  $[\theta(t), y(t)]$  of (2) is said to be *G-stable* if the positive limiting set (cf. [3], pp. 169-170) of its trajectory in the  $(\theta, y)$ -phase plane is either a point or a closed curve. If the positive limiting set is a point, the corresponding solution will be said to be *stable*.

We will refer to the equation

$$y'(\theta) = \frac{g(\theta)}{y(\theta)} - f(\theta, \alpha) \quad (3)$$



which follows from system (2); the prime here and henceforth denotes differentiation with respect to  $\theta$ , and  $\theta$  will be restricted to the interval  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  unless otherwise stated.

## 2. Sufficient Conditions for $G$ -Stability

We assume that

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( b(\alpha) - \frac{M_0(\alpha)}{2} \right) &= +\infty, \quad \text{where} \quad b(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \alpha) d\theta, \\ M_0(\alpha) &= \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \frac{b(\alpha)\theta - F(\theta, \alpha)}{\sin(\theta/2)} \right|, \quad \text{and} \quad F(\theta, \alpha) = \int_0^\theta f(s, \alpha) ds. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Define  $h_+(\theta, \alpha, \varepsilon) = b(\alpha)\theta - F(\theta, \alpha) + M(\alpha, \varepsilon) \sin(\theta/2)$  where  $M(\alpha, \varepsilon) = M_0(\alpha) + \varepsilon$ . We first observe that  $h_+(\theta, \alpha, \varepsilon) \geq \varepsilon \sin(\theta/2)$ . Next, for  $\alpha$  sufficiently large,

$$\begin{aligned} h'_+(\theta, \alpha, \varepsilon) + f(\theta, \alpha) &= b(\alpha) - \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\geq b(\alpha) - \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{2} > \frac{|g(\theta)|}{\varepsilon \sin(\theta/2)} \geq \frac{g(\theta)}{h_+(\theta, \alpha, \varepsilon)}; \end{aligned}$$

i.e., there exists some  $\alpha_+(\varepsilon)$  such that for  $\alpha > \alpha_+(\varepsilon)$  we have

$$h'_+(\theta, \alpha, \varepsilon) > \frac{g(\theta)}{h_+(\theta, \alpha, \varepsilon)} - f(\theta, \alpha).$$

This last inequality tells us that the slope of any phase trajectory intersecting the graph of  $y = h_+(\theta, \alpha, \varepsilon)$  is less than the slope of this graph at the point of intersection for  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . This clearly implies that if  $y(\theta)$  is the solution of equation (3) for which

$$y(0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} y'(\theta) > 0,$$

then for some  $c$ ,  $0 < c < 2\pi$ ,  $y(c) = 0$ .

If we now consider the graph of  $y = h_+(\theta, \alpha, \varepsilon) + a$  ( $a > 0$ ), we may similarly show that for  $\alpha > \alpha_+(\varepsilon)$  the solution  $y(\theta)$  of equation (3) such that  $y(0) = a$  must satisfy  $y(0) > y(2\pi)$ ; we have only to observe that

$$\frac{|g(\theta)|}{h_+(\theta, \alpha, \varepsilon)} \geq \frac{|g(\theta)|}{h_+(\theta, \alpha, \varepsilon) + a}.$$

It follows that for  $\alpha > \alpha_+(\varepsilon)$  equation (3) has no non-negative solutions  $y(\theta)$  for which  $y(0) \leq y(2\pi)$ .



We now define  $h_-(\theta, \alpha, \varepsilon) = b(\alpha) - F(\theta, \alpha) - M(\alpha, \varepsilon) \sin(\theta/2)$ , and observe that  $h_-(\theta, \alpha, \varepsilon) \leq -\varepsilon \sin(\theta/2)$ . Since

$$\begin{aligned} h'_-(\theta, \alpha, \varepsilon) + f(\theta, \alpha) &= b(\alpha) - \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &> \frac{|g(\theta)|}{\varepsilon \sin(\theta/2)} \geq -\frac{|g(\theta)|}{h_-(\theta, \alpha, \varepsilon)} \geq \frac{g(\theta)}{h_-(\theta, \alpha, \varepsilon)}, \end{aligned}$$

for  $\alpha$  sufficiently large, there exists an  $\alpha_-(\varepsilon)$  such that for  $\alpha > \alpha_-(\varepsilon)$ , the slope of a phase trajectory intersecting the curve  $y = h_-(\theta, \alpha, \varepsilon)$  is less than the slope of the curve at the point of intersection. This implies that if  $y(\theta)$  is the solution of equation (3) for which

$$y(0) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0+} y'(\theta) < 0,$$

then  $y(0) > y(2\pi)$ .

Since

$$-\frac{|g(\theta)|}{h_-(\theta, \alpha, \varepsilon)} \geq -\frac{g(\theta)}{h_-(\theta, \alpha, \varepsilon) - a}$$

for  $a > 0$ , we have that the graph of the curve  $y = h_-(\theta, \alpha, \varepsilon) - a$  has the same properties of contact with the phase trajectories as the curve  $y = h_-(\theta, \alpha, \varepsilon)$  has; this means that for  $\alpha > \alpha_-(\varepsilon)$  we can have no non-positive solution  $y(\theta)$  of equation (3) for which  $y(0) \leq y(2\pi)$ .

If we put

$$\alpha_1(\varepsilon) = \max[\alpha_+(\varepsilon), \alpha_-(\varepsilon)] \quad \text{and define} \quad \alpha_1 = \inf_{\varepsilon > 0} \alpha_1(\varepsilon)$$

we have that for  $\alpha > \alpha_1$  no solution  $y(\theta)$  of equation (3) for which  $y(0) < y(2\pi)$  is possible.

The fact that if  $y(\theta)$  is a solution of equation (3) then  $y(\theta + 2\pi)$  is also a solution, permits the use as phase space of a right circular cylinder on which the  $\theta$ -axis is a circle surrounding the cylinder and having a circumference of length  $2\pi$ , and the  $y$ -axis is a line on the surface perpendicular to the  $\theta$ -axis at  $\theta = 0$ . In this phase space the positive limiting set of each trajectory, if finite, is one of the following:

- (i) a closed curve surrounding the phase cylinder,
- (ii) a closed curve enclosing a finite region of the cylinder,
- (iii) a singular point.

If  $\alpha > \alpha_1$ , then clearly the limiting set of each trajectory cannot be infinite. If it were the first of the above possibilities, it would necessarily be a trajectory corresponding to a solution  $y(\theta)$  of equation (3) for which  $y(0) = y(2\pi)$  which is impossible. We have then that for  $\alpha > \alpha_1$  each solution of system (2) is  $G$ -stable in the sense of the definition given in section 1.

### 3. Sufficient Conditions for Stability

Let  $\theta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n$ ) be the zeros of  $g(\theta)$  such that  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_{2n} = 2\pi$ , and  $\theta_{i+1}$ . Recalling that  $g'(\theta_0) > 0$ , we have that the  $\theta_{2i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) define the saddle singularities of the system (2). We assume that for each  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  there exists an interval

$$a_{2i} < \theta < b_{2i} \quad \text{such that} \quad \theta_{2i} \leq a_{2i} < \theta_{2i+1} < b_{2i} \leq \theta_{2i+2}$$

in which

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & f(\theta, \alpha) > 0 \quad \text{for} \quad a_{2i} < \theta < b_{2i}, \\ \text{(ii)} \quad & A_{2i}(\alpha) - \frac{\pi}{\theta_{2i+2} - a_{2i}} M_{2i}^{(a)}(\alpha) \rightarrow +\infty \quad \text{as} \quad \alpha \rightarrow +\infty, \\ \text{(iii)} \quad & B_{2i}(\alpha) - \frac{\pi}{b_{2i} - \theta_{2i}} M_{2i}^{(b)}(\alpha) \rightarrow +\infty \quad \text{as} \quad \alpha \rightarrow +\infty; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

here,

$$\begin{aligned} A_{2i}(\alpha) &= \frac{1}{\theta_{2i+2} - a_{2i}} \int_{a_{2i}}^{\theta_{2i+2}} f(\theta, \alpha) d\theta, \\ M_{2i}^{(a)}(\alpha) &= \max_{a_{2i} \leq \theta \leq \theta_{2i+2}} \left\{ \frac{(\theta - a_{2i}) A_{2i}(\alpha) - \int_{a_{2i}}^{\theta} f(u, \alpha) du}{\sin \left[ \frac{\theta - a_{2i}}{\theta_{2i+2} - a_{2i}} \pi \right]} \right\}, \\ B_{2i}(\alpha) &= \frac{1}{b_{2i} - \theta_{2i}} \int_{\theta_{2i}}^{b_{2i}} f(\theta, \alpha) d\theta, \\ M_{2i}^{(b)}(\alpha) &= \min_{\theta_{2i} \leq \theta \leq b_{2i}} \left\{ \frac{(\theta - \theta_{2i}) B_{2i}(\alpha) - \int_{\theta_{2i}}^{\theta} f(u, \alpha) du}{\sin \left[ \frac{\theta - \theta_{2i}}{b_{2i} - \theta_{2i}} \pi \right]} \right\}. \end{aligned}$$

We will restrict ourselves to the case  $i = 0$  and point out that for the other values of  $i$ , a procedure identical, except for subscripts, with this one will apply.

Define the function

$$h_0^{(a)}(\theta, \alpha, \varepsilon) = (\theta - a_0) A_0(\alpha) - \int_{a_0}^{\theta} f(u, \alpha) du - [M_0^{(a)}(\alpha) + \varepsilon] \sin \left[ \frac{\theta - a_0}{\theta_2 - a_0} \pi \right].$$

We observe that for  $a_0 \leq \theta \leq \theta_2$ ,

$$h_0^{(a)}(\theta, \alpha, \varepsilon) \leq -\varepsilon \sin \left[ \frac{\theta - a_0}{\theta_2 - a_0} \pi \right],$$

that  $h_0^{(a)}(\theta_2, \alpha, \varepsilon) = h_0^{(a)}(a_0, \alpha, \varepsilon) = 0$ , and that in view of condition (ii) given above, there exists an  $\alpha_-(\varepsilon)$  such that for  $\alpha > \alpha_-(\varepsilon)$  and  $a_0 \leq \theta \leq \theta_2$ ,

$$h_0^{(a)'}(\theta, \alpha, \varepsilon) > \frac{g(\theta)}{h_0^{(a)}(\theta, \alpha, \varepsilon)} - f(\theta, \alpha). \quad (6)$$

If  $a_0 > \theta_0$  we have, since  $g(a_0) > 0$ , this inequality at  $\theta = a_0$  in the sense that

$$\frac{g(\theta)}{h_0^{(a)}(\theta, \alpha, \varepsilon)} \rightarrow -\infty \quad \text{as} \quad \theta \rightarrow a_0^+.$$

Inequality (6) means that each trajectory intersecting the graph of

$$y = h_0^{(a)}(\theta, \alpha, \varepsilon) \quad \text{in} \quad a_0 \leq \theta \leq \theta_2$$

has a slope less than the slope of the graph at the point of intersection. Hence the solution  $y_2(\theta)$  of equation (3) for which

$$y_2(\theta_2) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^-} y_2'(\theta) > 0$$

must have a zero in the interval  $a_0 < \theta < \theta_2$ ; i.e., the trajectory corresponding to this solution must, after emerging from the point  $(\theta_2, 0)$  with increasing  $t$ , intersect the  $\theta$ -axis in the interval  $a_0 < \theta < \theta_2$ . Let  $t_0$  be the smallest value of  $t$  for which  $y_2[\theta(t_0)] = 0$ . We will now show that  $a_0 < \theta(t_0) \leq \theta_1$ .

For suppose  $\theta_1 < \theta(t_0) < \theta_2$ . We have from equation (3) that the trajectory corresponding to this solution can have no tangents parallel to the  $y$ -axis in this interval. By the mean value theorem for derivatives, one can determine a monotone decreasing sequence  $\{\xi_i\}$ ,  $\xi_i \rightarrow \theta(t_0)$ , such that  $y_2'(\xi_i) < 0$ . Since  $g(\xi_i) \rightarrow g[\theta(t_0)] < 0$ , and  $y_2(\xi_i) \rightarrow 0$ , while  $y_2(\xi_i) < 0$ , there exists an  $n$  sufficiently large for which

$$y_2'(\xi_n) = \frac{g(\xi_n)}{y_2(\xi_n)} - f(\xi_n, \alpha) > 0,$$

a contradiction. Hence we must have  $a_0 < \theta(t_0) \leq \theta_1$ . We now define the function

$$h_0^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon) = (\theta - \theta_0) B_0(\alpha) - \int_{\theta_0}^{\theta} f(u, \alpha) du - [M_0^{(b)}(\alpha) - \varepsilon] \sin \left[ \frac{\theta - \theta_0}{b_0 - \theta_0} \pi \right]$$

and observe that  $h_0^{(b)}(\theta_0, \alpha, \varepsilon) = h_0^{(b)}(b_0, \alpha, \varepsilon) = 0$ , that

$$h_0^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon) \geq \varepsilon \sin \left[ \frac{\theta - \theta_0}{b_0 - \theta_0} \pi \right] \quad \text{for } \theta_0 \leq \theta \leq b_0,$$

and that in view of condition (iii) given above, there exists an  $\alpha_+(\varepsilon)$  such that for  $\alpha > \alpha_+(\varepsilon)$

$$h_0^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon) > -\frac{g(\theta)}{h_0^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon)} - f(\theta, \alpha) \quad \text{for } \theta_0 \leq \theta \leq b_0. \quad (7)$$

If  $b_0 < \theta_2$ , we have, since  $g(b_0) < 0$ , this inequality for  $\theta = b_0$  in the sense that

$$\frac{g(\theta)}{h_0^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon)} \rightarrow -\infty$$

for  $\theta \rightarrow b_0^-$ .

Inequality (7) means that each trajectory intersecting the graph of

$$y = h_0^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon) \quad \text{in } \theta_0 \leq \theta \leq b_0$$

has a slope less than the slope of the graph at the point of intersection. Hence the trajectory emerging from the point  $(\theta_0, 0)$  with positive slope and increasing  $t$  intersects the  $\theta$ -axis first in the interval  $\theta_1 \leq \theta < b_0$ ; as in the previous case, the interval  $\theta_0 < \theta < \theta_1$  can be excluded.

We now set  $\alpha^{(0)}(\varepsilon) = \max[\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon)]$  and consider  $\alpha > \alpha^{(0)}(\varepsilon)$ . Clearly, any closed trajectory contained in the strip  $\theta_0 < \theta < \theta_2$  must necessarily be contained in the strip  $a_0 < \theta < b_0$ . Since  $f(\theta, \alpha) > 0$  in  $a_0 < \theta < b_0$  we have by the non-existence criterion of BENDIXSON that no closed trajectory in this strip, and hence, in  $\theta_0 < \theta < \theta_2$ , is possible. We also observe that no trajectory which may become a closed curve upon addition of either  $(\theta_0, 0)$  or  $(\theta_2, 0)$  is possible.

We now proceed similarly to obtain  $\alpha^{(i)}(\varepsilon)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) such that for  $\alpha > \alpha^{(i)}(\varepsilon)$ , no closed trajectory is possible in the interval  $\theta_{2i} \leq \theta \leq \theta_{2i+2}$ . Let us now assume that a closed trajectory exists in the phase plane for  $\alpha > \alpha_2(\varepsilon) = \max\{\alpha^{(i)}(\varepsilon)\}$ . Clearly, this implies the existence of a closed trajectory enclosing some saddle point  $(\theta_{2k}, 0)$  ( $k \leq n$ ) and intersecting the  $\theta$ -axis at  $\theta_c < \theta_{2k}$  such that for some  $j < k$ ,  $\theta_{2j} < \theta_c < \theta_{2j+1}$ . However, for  $\alpha > \alpha_2(\varepsilon)$ , this trajectory intersects the graph of  $y = h_{2j}^{(b)}(\theta, \alpha, \varepsilon)$  with a greater slope than the slope of the graph. This is impossible, and we conclude that for  $\alpha > \alpha_2(\varepsilon)$ , no closed trajectory is possible anywhere in the phase plane.

If we put

$$\alpha_2 = \inf_{\varepsilon > 0} \alpha_2(\varepsilon)$$

we have that for  $\alpha > \alpha_2$  any finite positive limiting set of a solution of (2)

must be a point; i.e., any solution of (2), if  $G$ -stable, must be stable. Finally, if  $\alpha > \max(\alpha_1, \alpha_2)$ , where the  $\alpha_1$  is defined in the previous section, each solution of (2) is stable.

#### 4. Conditions for the Existence of Nonstable Solutions

We say that a solution of (2) is nonstable if it is not at least  $G$ -stable, and assume here that

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta, \alpha)| d\theta \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (\text{i})$$

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta > 0. \quad (\text{ii})$$

Condition (ii) above assures the existence of at least one zero  $\theta_0$  of  $g(\theta)$  such that  $g'(\theta_0) > 0$  and

$$\int_{\theta_0}^{\theta} g(u) du > 0$$

for  $\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$  [4].

Consider the solution  $y_0(\theta)$  of equation (3) for which

$$y_0(\theta_0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_0^+} y'_0(\theta) > 0.$$

Suppose that  $y_0(\theta)$  has zeros in  $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$  and denote by  $\theta_0$  the least such zero. As was observed in a previous section, we have  $\theta_1 \leq \theta_0 < \theta_0 + 2\pi$ , where  $\theta_1$  is the smallest zero of  $g$  greater than  $\theta_0$ . From equation (3) we have that  $y_0(\theta)$  must satisfy

$$y_0(\theta) y'_0(\theta) = g(\theta) - f(\theta, \alpha) y_0(\theta). \quad (8)$$

Integrating equation (8) from  $\theta_0$  to  $\theta_0$ , we have

$$\int_{\theta_0}^{\bar{\theta}_0} g(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\bar{\theta}_0} f(\theta, \alpha) y_0(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Let

$$\max_{\theta_0 < \theta < \bar{\theta}_0} y_0(\theta) = y_0(\theta_m) = y_m.$$

Integrating equation (8) from  $\theta_0$  to  $\theta_m$  we have

$$\frac{y_m^2}{2} = \int_{\theta_0}^{\theta_m} g(\theta) d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_m} f(\theta, \alpha) y_0(\theta) d\theta \leq G_0 + F(\alpha) y_m,$$

where

$$G_0 = \max_{\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta} g(s) ds, \quad \text{and} \quad F(\alpha) = \int_0^{2\pi} |f(\theta, \alpha)| d\theta.$$

Hence  $y_m \leq F(\alpha) + [F^2(\alpha) + 2 G_0^{-1/2}] = K_0(\alpha)$ , which used with (9) gives

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0} g(\theta) d\theta \leq K_0(\alpha) F(\alpha). \quad (10)$$

Since

$$\int_{\theta_0}^{\theta} g(\theta) d\theta > 0, \quad \theta_1 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$$

there is  $m_0 > 0$  for which

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0} g(\theta) d\theta \geq m_0.$$

Since as  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $F(\alpha) \rightarrow 0$  and  $K_0(\alpha) \rightarrow (2 G_0)^{1/2}$  we may determine an  $\alpha(\theta_0)$  such that whenever  $0 < \alpha < \alpha(\theta_0)$  we have

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0} g(\theta) d\theta \geq m_0 > K_0(\alpha) F(\alpha)$$

which contradicts (10).

We thus conclude that for  $\alpha < \alpha(\theta_0)$ ,  $y_0(\theta)$  can have no zeros in

$$\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi; \quad \text{i.e.,} \quad y_0(\theta_0 + 2\pi) \geq 0.$$

We now refer to cylindrical phase space and observe that the trajectory for any solution  $[\theta(t), y(t)]$  of (2) containing  $(\theta_0, y_0)$  where  $y_0 > 0$  can have a closed curve as positive limiting set only if the closed curve surrounds the phase cylinder. Hence, such a solution cannot be  $G$ -stable and we have shown that for  $\alpha < \alpha(\theta_0)$  such solutions exist.

If we now put  $\alpha_0 = \max\{\alpha(\theta_i)\}$  where  $\{\theta_i\}$  is the set of zeros of  $g(\theta)$  in  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  for which

$$\int_{\theta_i}^{\theta} g(\theta) d\theta > 0, \quad \theta > \theta_i,$$

and  $\alpha(\theta_i)$  is determined as was  $\alpha(\theta_0)$  above, we have that for  $\alpha < \alpha_0$ , solutions of (2) exist which are not stable.



### 5. A Special Case

We consider the case where

$$g(\theta) = \sin \frac{\theta - \pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}, \quad f(\theta, \alpha) = \alpha (1 + b \sin 2\theta).$$

We observe that  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = 3\pi/2$ ,  $\theta_2 = 2\pi$ . Using the terminology of section 2 we have that  $b(\alpha) = \alpha$ ,

$$M_0(\alpha) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \frac{b \sin^2 \theta}{\sin(\theta/2)} \right| = 8\sqrt{3} \frac{b}{9},$$

and hence  $b(\alpha) - M_0(\alpha)/2 = \alpha(1 - 4\sqrt{3}b/9) \rightarrow +\infty$  whenever  $b < 3\sqrt{3}/4$ .

Taking  $a_0 = \pi$  and  $b_0 = 13.7/8$  the conditions given in section 3 are satisfied for some  $b > 1$ ; we omit the details.

The conditions of section 3 are clearly satisfied for any  $b$ .

We point out in conclusion that apart from a translation of magnitude  $5\pi/4$  in  $\theta$  the  $f(\theta, \alpha)$  of this special case is precisely of the same form as the one considered by EDGERTON and FOURMARIER in the treatment of a problem concerning the performance of salient-pole synchronous motors [1].

### REFERENCES

- [1] H. E. EDGERTON and P. FOURMARIER, *The Pulling-Instability of a Salient Pole Synchronous Motor*, Trans. A. I. E. E. 50, June, 769-778 (1931).
- [2] J. C. LILLO and G. SEIFERT, *On Conditions for Stability of Solutions of Pendulum-Type Equations*, ZAMP 6, 239-243 (1955).
- [3] S. LEFSCHETZ, *Lectures on Differential Equations*, Annals of Mathematical Study No. 14 (Princeton University Press 1946).
- [4] G. SEIFERT, *A Rotated Vector Approach to the Problem of Stability of Solutions of Pendulum-Type Equations*, Contributions to Nonlinear Oscillations III, Annals of Mathematical Study No. 36 (Princeton University Press).

### Zusammenfassung

Die Lösungen  $\theta(t)$  der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + f(\theta, \alpha) \frac{d\theta}{dt} = g(\theta)$$

werden untersucht, worin  $f(\theta + 2\pi, \alpha) = f(\theta, \alpha)$ ,  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$ ,  $g(\theta)$  einfache Nullstellen besitzt und  $f(\theta, \alpha)$  für positive  $\alpha$  negative Werte annehmen kann. Bedingungen werden angegeben, für welche jede Lösung beschränkt bleibt, wenn  $t \rightarrow +\infty$  und sich asymptotisch einer periodischen Lösung annähert; diese periodische Lösung kann auch eine Konstante sein oder die Periode  $+\infty$  haben. Bei engeren Bedingungen gilt für jede Lösung  $\theta(t)$ , dass

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta_0,$$

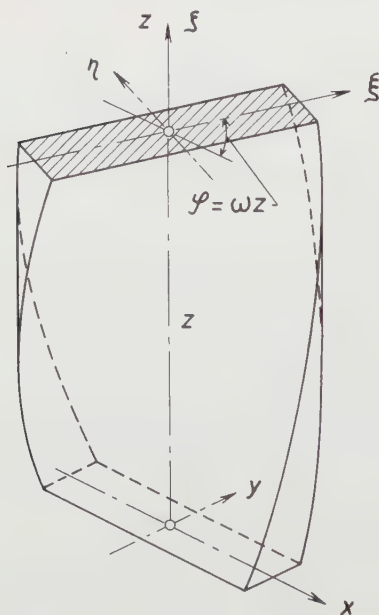
wo  $\theta_0$  eine endliche Konstante ist. Schliesslich wird ein Beispiel aus der Elektrotechnik angeführt, welches allen diesen Bedingungen genügt.

(Received: June 11, 1955.)

# Biegeschwingungen verwundener, einseitig eingespannter und am andern Ende gelenkig gelagerter Stäbe

Von MAX ANLIKER, Brooklyn, New York, N. Y., USA<sup>1)</sup>

Unter dem Begriff «Verwundene Stäbe» versteht man Stäbe, die im ungespannten Zustand wie ein Propellerblatt oder eine Turbinenschaufel verdreht sind (vgl. Fig. 1).



Figur 1

Stück eines spannungslos verwundenen Stabes.



Figur 2

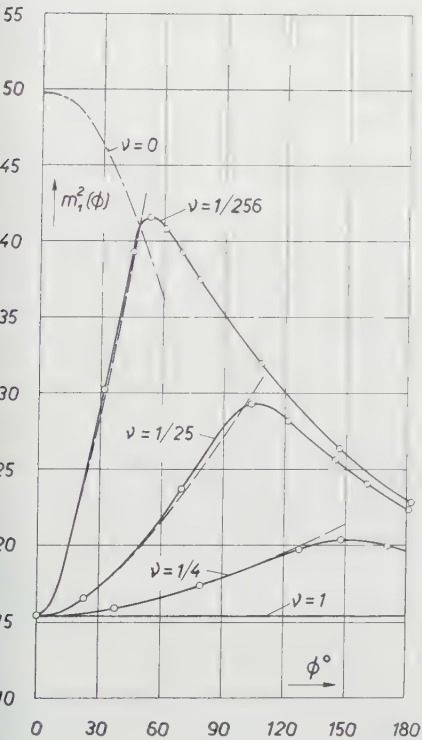
Einseitig eingespannter und am andern Ende gelenkig gelagerter Stab.

Die Biegeschwingungen (Standschwingungen) von solchen Stäben werden bei der üblichen Beschränkung auf von erster Ordnung kleine Größen durch die Torsionsschwingungen nicht beeinflusst und können daher separat behandelt werden. Die Eigenkreisfrequenzen  $\kappa$  lassen sich mit gewissen Einschränkungen

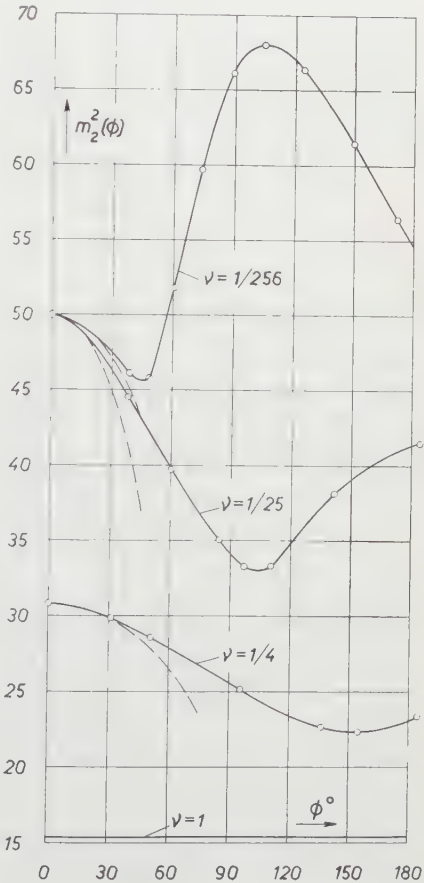
<sup>1)</sup> Department of Aeronautical Engineering and Applied Mechanics, Polytechnic Institute of Brooklyn.

<sup>2)</sup> A. TRÖSCH, M. ANLIKER und H. ZIEGLER, Quart. appl. Math. 12, 163 (1954).

exakt berechnen, wie A. TRÖSCH, M. ANLIKER und H. ZIEGLER<sup>2)</sup> in einer kürzlich erschienenen Arbeit gezeigt haben. Lässt man nämlich nur homogene isotrope Stäbe zu, die einen konstanten Verdrehungswinkel pro Längeneinheit ( $\omega$ ) aufweisen, und nimmt man zudem an, dass die Masse pro Längeneinheit ( $\mu$ ), sowie die Biegesteifigkeiten ( $\alpha, \beta$ ) bezüglich der Hauptachsen konstant sind, so ergibt sich für die Bewegung der elastischen Linie ein System von 2 linearen, homogenen, partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung. Mit dem Separationsansatz und 8 linearen homogenen Randbedingungen führt die Lösung der Schwingungsaufgabe auf ein Eigenwertproblem achter Ordnung, dessen Eigenwerte mit Hilfe eines modernen Rechenautomaten berechnet werden können.



Figur 3



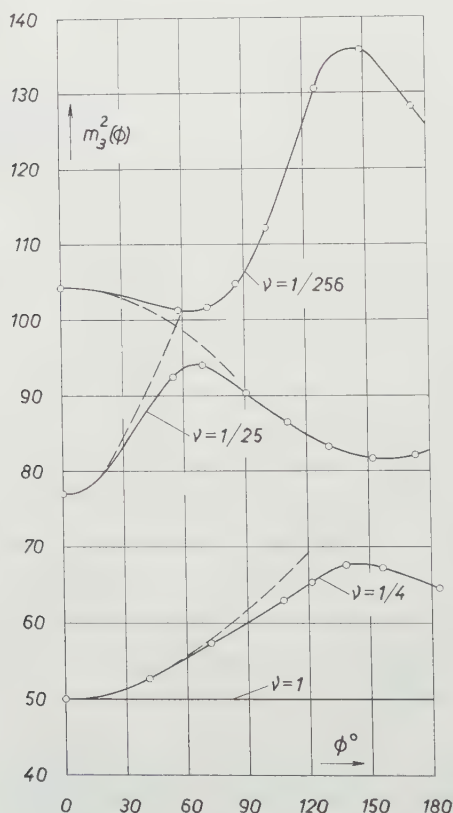
Figur 4

Die ersten 2 Frequenzkurven  $m^2(\Phi)$  für 3 verschiedene Verhältnisse  $\nu$  der Biegesteifigkeiten. Bei rechteckigem Querschnitt entsprechen den gegebenen  $\nu$ -Werten die Seitenverhältnisse 1:2, 1:5 und 1:16. Kreisfrequenz  $\kappa_i = m_i^2/l^2 \sqrt{\alpha/\mu}$  ( $l$  Stablänge,  $\alpha$  Biegesteifigkeit,  $\mu$  Masse pro Längeneinheit,  $\Phi$  totaler Verdrehungswinkel).

In der oben erwähnten Publikation wurden so die ersten 4 Eigenkreisfrequenzen für den einseitig eingespannten Stab mit ideal schmalen Querschnitt<sup>3)</sup> exakt ermittelt. Dazu wurde die programmgesteuerte Rechenmaschine des Institutes für angewandte Mathematik der ETH. verwendet. Im Anschluss an diese Arbeit werden hier die Resultate angegeben, welche mit Hilfe des gleichen Rechenautomaten beim einseitig eingespannten und am andern Ende gelenkig gelagerten Stab (vgl. Figur 2) bei verschiedenen Verhältnissen  $\nu = \alpha/\beta$  der Biegesteifigkeiten gefunden wurden.

In den Figuren 3 bis 8 ist der Verlauf der Frequenzgrösse  $m^2$  bzw.

$$m = l \sqrt[4]{\frac{\mu \kappa^2}{\alpha}} \quad (l \text{ Länge des Stabes})$$



Figur 5

Dritte Frequenzkurve  $m_3^2(\phi)$  für 3 verschiedene  $\nu$ -Werte.

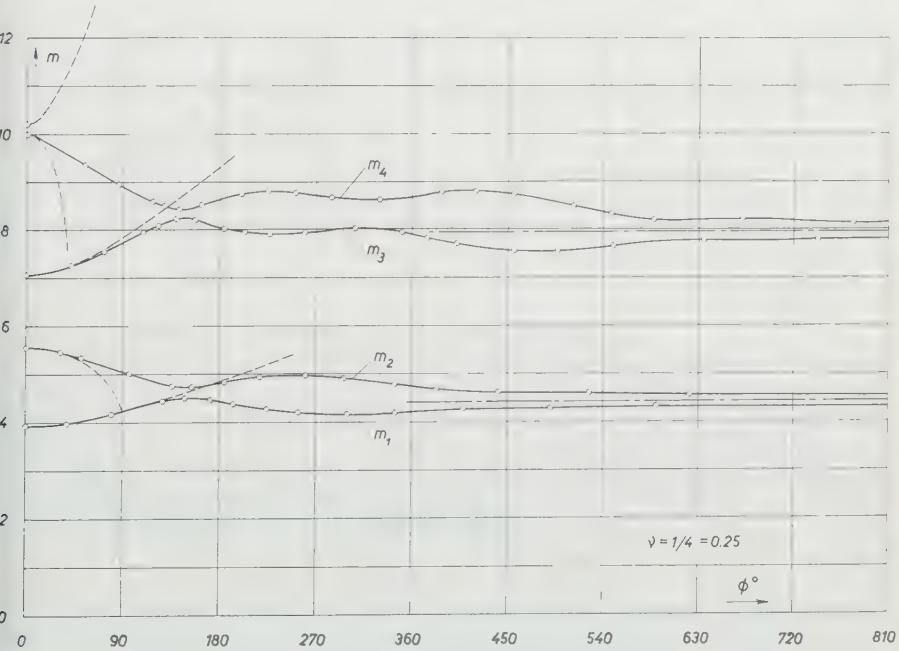
<sup>3)</sup> Das heisst eine der Biegesteifigkeiten wird als unendlich gross, die andere als endlich angenommen.

für 3 verschiedene Werte von  $\nu$  als Funktion des totalen Verdrehungswinkels  $\varphi$  aufgetragen. Dabei sind durch kleine Kreise die exakt berechneten Punkte gekennzeichnet. Die gestrichelten und strichpunktierten Linien stellen Näherungslösungen dar und wurden rein analytisch mit Hilfe von Reihenentwicklungen ermittelt.

Wie aus diesen Figuren hervorgeht, hängt der Verlauf der Frequenzfunktionen  $m(\varphi)$  insbesondere im praktisch interessanten Bereich  $0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$  stark von der Verwindung ab. Ausserdem zeigt sich der Einfluss der Schlankheit des Querschnittes recht deutlich. So steigt zum Beispiel  $m_1(\varphi)$  bei kleinen  $\varphi$  um so steiler an, je schmaler der Querschnitt ist, während  $m_3(\varphi)$  mit abnehmendem  $\nu$  zuerst ansteigt, dann abfällt. Bei grossen  $\varphi$  stellt man fest, dass je zwei aufeinanderfolgende Frequenzkurven  $m_{2j-1}$  und  $m_{2j}$  der gleichen Asymptote zustreben<sup>4)</sup>.

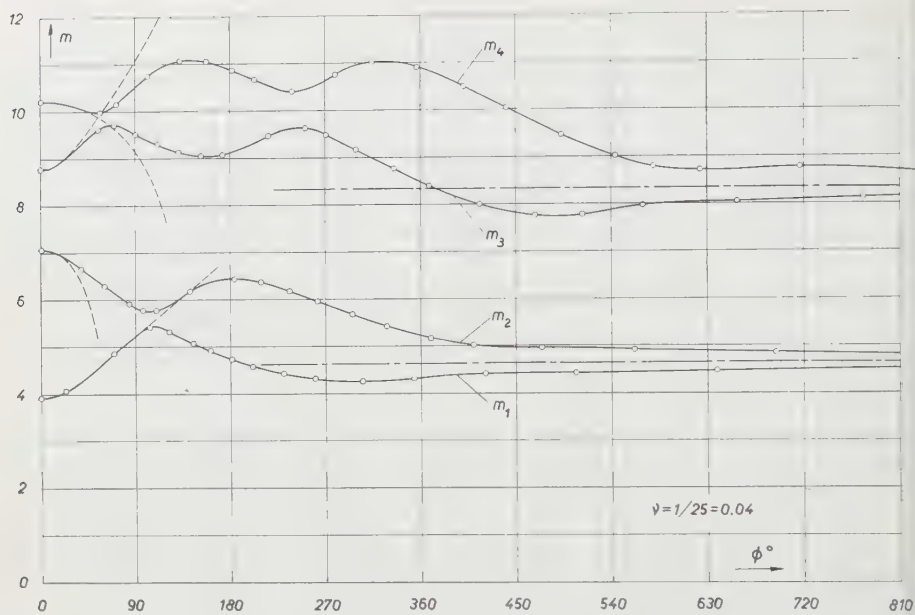
Der Verfasser ist zur Zeit mit der Untersuchung weiterer Fälle (das heisst anders gelagerter Stäbe) beschäftigt und beabsichtigt, die zugehörigen Resultate später zu veröffentlichen.

Bei dieser Gelegenheit möchte der Verfasser dem Direktor des Institutes für angewandte Mathematik der ETH, Herrn Prof. Dr. E. STIEFEL, sowie dem Präsidenten des Schweizerischen Schulrates, Herrn Prof. Dr. H. PALLMANN, für die wohlwollende Unterstützung und Förderung dieser Arbeit bestens danken.

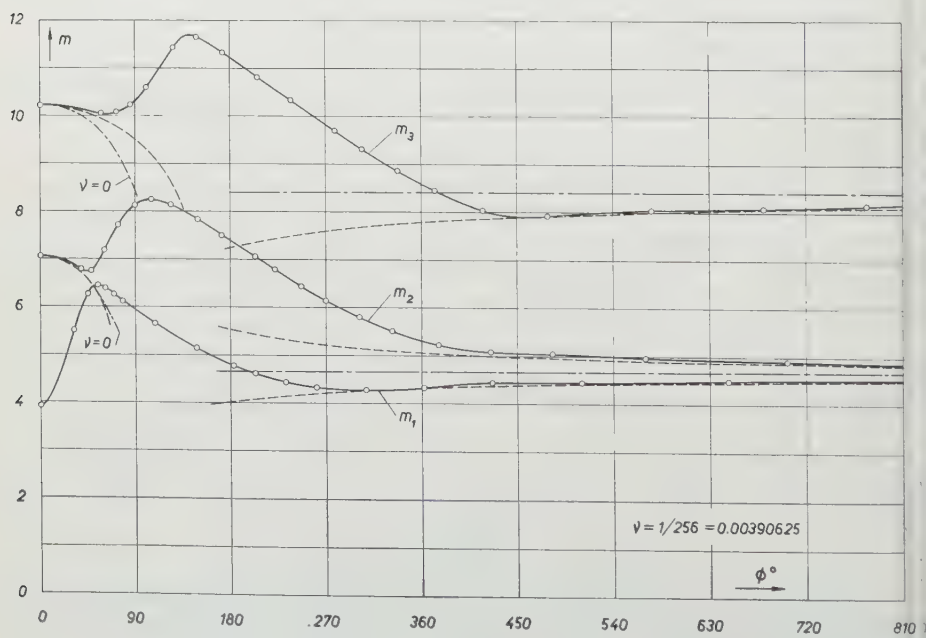


Figur 6  
Die ersten 4 Frequenzkurven für  $\nu = 1/4$ .

<sup>4)</sup> Eine ausführliche Darstellung dieser Resultate findet sich in der von der Eidgenössischen Technischen Hochschule genehmigten Promotionsarbeit *Biegeschwingungen verwindener, einseitig eingespannter und am andern Ende gelenkig gelagerter Stäbe*, vorgelegt von M. ANLIKER.



Figur 7. Die ersten 4 Frequenzkurven für  $\nu = 1/25$ .



Figur 8. Die ersten 3 Frequenzkurven für  $\nu = 1/256$ .



*Summary*

The lateral and torsional vibrations of twisted rods can be treated separately if we consider as usual only first order terms. The eigen-frequencies of the lateral vibrations can be calculated exactly if we restrict ourselves to isotropic homogeneous rods with constant mass and twist per unit length and constant principal flexural rigidities. In this paper the eigen-frequencies for a rod built in at one end and supported at the other are given for 3 different cross-sections.

(Eingegangen: 9. November 1955.)

## Der symmetrische Kardankreisel unter einem Moment an der Achse des äusseren Rings

VON HANS ZIEGLER, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Problemstellung

Einer der bekanntesten Kreiselversuche besteht darin, dass man versucht, den äusseren Ring eines sonst kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels um seine Achse zu drehen. Solange die Figurenachse des Kreisels nicht mit der Drehachse dieses Rings zusammenfällt, kommt die angestrebte Bewegung nicht zustande; dagegen dreht sich der innere Ring im äusseren, bis die Vektoren, welche die Winkelgeschwindigkeiten der Eigenrotation und der angestrebten Drehung darstellen, gleichgerichtet sind.

Dieser Effekt, der sich mit Hilfe des Drallsatzes qualitativ leicht erklären lässt, scheint bisher quantitativ nicht untersucht worden zu sein. Er lässt sich aber unter der Annahme, dass der Kreisel schnell sei, elementar behandeln, vor allem, wenn die Massen der Kardanringe, ihre Elastizität und die Lagerreibung vernachlässigt werden.

### 2. Bewegungsdifferentialgleichungen

Unsere Abbildung zeigt schematisch einen symmetrischen Kardankreisel mit den Eulerschen Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\psi} = \omega_p$ ,  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\phi} = \omega_r$  unter dem Einfluss des an der Achse des äusseren Rings angreifenden Momentes  $M$ . Das raumfeste Koordinatensystem  $(x, y, z)$  ist so gewählt, dass die  $z$ -Achse, um die sich der äussere Ring dreht, vertikal nach oben weist. Die  $\xi$ -Achse des körperfesten Systems  $(\xi, \eta, \zeta)$  ist als Figurenachse so orientiert, dass sich der Rotor im Rechtsschraubensinn um sie dreht, mithin

$$\omega_r > 0 \quad (2.1)$$

st. Die Drehung des inneren Rings relativ zum äusseren erfolgt um die Knotenachse  $\kappa$ ; der Richtungssinn derselben wird beim Kardankreisel zweckmässig ein für allemal (wenn auch willkürlich) fixiert, so dass dem Winkel  $\vartheta$ , der mit  $\kappa$  zusammen der Rechtsschraubenregel genügt, das Intervall  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$  zugestanden werden muss. Die Knotenachse  $\kappa$  kann mit der Querachse  $\lambda$  und der Figurenchse  $\zeta$  zu einem dritten Bezugssystem  $(\kappa, \lambda, \zeta)$  zusammengefasst werden.

<sup>1)</sup> ETH.



gegeben ist,

$$\omega_p = 0, \quad \dot{\vartheta} = -\frac{M}{C \omega_r \sin \vartheta}, \quad \omega_r = \text{const.} \quad (2.7)$$

### 3. Integration

Nach (2.7) kommt beim schnellen Kreisel unter dem Moment  $M$  keine Präzession zustande; die Eigenrotation bleibt gleichförmig, und die Figurenachse hebt oder senkt sich, je nachdem das Moment  $M$  positiv oder negativ ist, das heisst eine Rechts- oder Linkspräzession anstrebt.

Die zweite Beziehung (2.7) lässt sich ohne weiteres integrieren. Führt man nämlich mit

$$\cos \vartheta = w \quad (3.1)$$

die  $z$ -Koordinate der Kreisel Spitze ein, dann geht sie in

$$\dot{w} = \frac{M}{C \omega_r} \quad (3.2)$$

über; es ist also

$$w = w_0 + \frac{1}{C \omega_r} \int_0^t M dt, \quad (3.3)$$

wenn mit  $w_0 = w(t=0)$  die anfängliche  $z$ -Koordinate der Kreisel Spitze bezeichnet wird.

*Fall a:* Setzt man zum Beispiel

$$M = M_0 |\sin \vartheta| \quad (3.4)$$

an, dann folgt aus der zweiten Beziehung (2.7)

$$\vartheta = \vartheta_0 \mp \frac{M_0}{C \omega_r} t \quad (\vartheta \geq 0); \quad (3.5)$$

man erhält also insbesondere für die volle Schwenkung der Figurenachse die Dauer

$$t^* = \pi \frac{C \omega_r}{|M_0|}. \quad (3.6)$$

*Fall b:* Nimmt man

$$M = M_0 \quad (3.7)$$

konstant an, dann liefert (3.3)

$$w = w_0 + \frac{M_0}{C \omega_r} t \quad (3.8)$$

und damit insbesondere die Schwenkdauer

$$t^* = 2 \frac{C \omega_r}{|M_0|}. \quad (3.9)$$

Den zweiten Beziehungen (2.7) und (2.3) zufolge kann freilich der Kreisel mit nahezu vertikaler Figurenachse nur dann als schnell gelten, wenn – wie im Falle a –  $|M|$  mindestens wie  $|\sin \vartheta|$  gegen Null geht. Trifft dies – wie im Falle b –

nicht zu, dann gilt (3. 3) nur in einem reduzierten Winkelbereich  $\varepsilon \leq |\vartheta| \leq \pi - \varepsilon$ , und für  $|\vartheta| < \varepsilon$  sowie  $|\vartheta| > \pi - \varepsilon$  müsste die Bewegung mit der strengen, auch für nicht-schnelle Kreisel gültigen Theorie ermittelt werden. Falls aber der Kreisel bei annähernd horizontaler Figurenachse genügend schnell ist, fällt  $\varepsilon$  sehr klein aus, und die im Falle b aus (3.9) folgende Zeit  $t^*$  kann dann als gute Näherung für die Dauer einer vollen Schwenkung, das heisst für praktische Zwecke doch wieder als volle Schwenkdauer angesprochen werden.

### Summary

The motion of a high speed gyroscope under the influence of a couple applied to the external Cardan ring is discussed.

(Eingegangen: 16. Februar 1956.)

## Measurement of the Thermoelectric Power of Lead Sulphide

By ALI ALI ARAFA, IBRAHIM SAYED SHAFIE, and FATHI SULTAN AHMED SULTAN, ,  
Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

### Abstract

The thermoelectric power of natural specimens of lead sulphide crystals has been measured between room temperature and 700° K. Specimens which are of the  $n$ -type remain as such throughout the temperature range. The  $p$ -type specimens, however, show an initial small rise followed by a gradual decrease and a subsequent change of sign at a temperature which, in some specimens, is well defined. Further increase of temperature results in a negative extremum. From this stage onwards there seems to develop a common behaviour for both types of specimens. Some crystals which were initially of the  $p$ -type changed over to the  $n$ -type and remained as such throughout subsequent investigation. Among the crystals one showed a metallic conduction and an extraordinary large thermoelectric power.

### Introduction

A good deal of literature is now available about the thermoelectric and other electrical properties of semiconductors. Recently much work has been devoted to the thermoelectric properties of germanium and silicon and a number of metal sulphides, selenides and tellurides. LARK-HOROVITZ *et al.* [2]<sup>2)</sup> obtained the thermoelectric power curves of aluminium-doped germanium samples with different carrier densities. MIDDLETON and SCANLON [3] investigated aluminium-doped ( $p$ -type) and antimony-doped ( $n$ -type) germanium samples. The sign of the thermoelectric power in the low temperature or impurity range is the sign of the carrier, i. e., the  $p$ -type samples have positive thermoelectric power and the  $n$ -type negative power. The thermoelectric power of an  $n$ -type sample remains negative throughout. Beginning at the low temperature end of the curve, the thermoelectric power increases in magnitude with rising temperature.

<sup>1)</sup> Physics Department, Faculty of Science, Alexandria University.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 264.

passes through an extremum and then decreases in magnitude, approaching a curve common to all samples. The behaviour at high temperatures is so similar that it may be considered as characteristic of the intrinsic material. Beginning at the low temperature end for a *p*-type sample, the positive thermoelectric power rises to a maximum, then decreases fairly rapidly, eventually changing sign. This is followed by an extremum value and a gradual approach to the intrinsic range.

PUTLEY [4] carried out similar work on lead selenide and telluride and obtained qualitatively the same behaviour.

The present work deals with experimental technique and results of measurements of the thermoelectric power of natural crystals of lead sulphide and its variation between room temperature and 700° K.

### Experimental Procedure

The crystals were cleaved into small rectangular blocks of approximate size  $4 \times 4 \times 2$  mm. The specimen is enclosed between two nickel sheets which at one end are connected to two copper-constantan thermocouples (Figure 1). At the other end they are connected to a multi-range Habicht galvanometer *M*. Pressed against the specimen and mica-insulated therefrom are two small hot plates *H* and *H'* which are electrically heated by two small variable A. C. voltages. A two-way key *A B* enables in position *A* a direct connection to a Tinsley potentiometer Type 3387 B which reads down to  $1 \mu\text{V}$ . Position *B* enables a measurement of the resistance of the specimen. Thus a simultaneous determination of thermoelectric power and conductance is possible at different temperatures of the crystal. The temperature of the crystal is taken as the mean of the temperatures of the two faces, the difference being kept small (12°). The thermoelectric power is obtained by dividing the potentiometer reading  $d\theta$  by the corresponding difference of temperature  $dT$ .

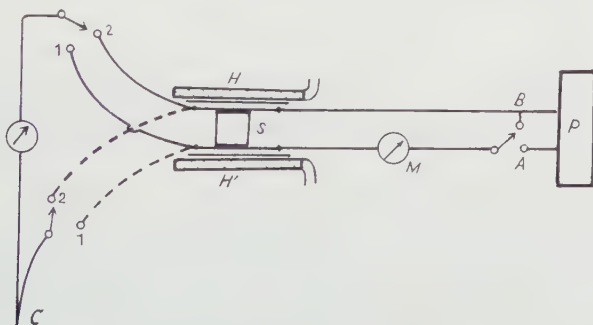


Figure 1

Electrical setup for measuring thermoelectric power.

### Results

Some specimens begin, in the low temperature or impurity range, as *p*-type, the carriers being predominantly positive holes. Figure 2 illustrates the behaviour of this type of specimen. The positive thermoelectric power  $d\theta/dT$  shows an initial small rise to a maximum of 0.27 to 0.35 mV/degree at about 380° K, followed

by a steady decrease. This indicates the onset of mixed conduction. As the temperature increases electrons become progressively the more dominant carriers and a change over in the sign of the thermo-electric power takes place. In three consecutive runs (1), (2) and (3) the thermoelectric power is measured at temperatures ranging between room temperature and about 700° K. The crystal is left to cool down to room temperature after each run. It is noted that the change of sign takes place at almost the same temperature of about 550° K. As the temperature is further increased  $d\theta/dT$  reaches an extremum at about 650° K, after which it decreases in magnitude.

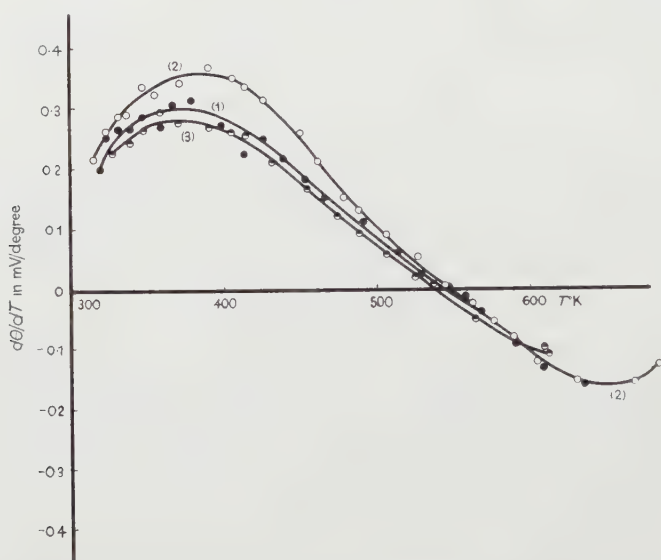


Figure 2

Crystal S-6. Temperature variation of the thermoelectric power of a *p*-type specimen. (1), (2) and (3) are three consecutive runs. After each run the specimen is left to cool down to room temperature.

Figure 3 illustrates the behaviour of an *n*-type specimen S-7. The thermoelectric power remains negative throughout; indicating a dominance of the electrons as carriers. Four consecutive runs are shown. In the first run (1),  $d\theta/dT$  decreases slowly in magnitude with rising *T*. In the following runs (2), (3) and (4) however,  $d\theta/dT$  increases in magnitude rather rapidly to an extremum at a temperature lying between 425° and 470° K. This indicates again the onset of mixed conduction due to thermal release of electrons from and holes in the full band. Further increase of temperature leads to the intrinsic range. The fact that  $d\theta/dT$  never changes sign in this type of specimen is due to the fact that the number of electrons is, at all temperatures, greater than the number of the less mobile holes.

Figure 4 refers to the same *n*-type specimen S-7. It shows the relation between the logarithm of conduction  $\sigma$  and the reciprocal of the absolute temperature. The initial thermoelectric and conduction behaviour of the specimen, as indicated by curves (1) in Figures 3 and 4 respectively, seem to obey the laws of classical



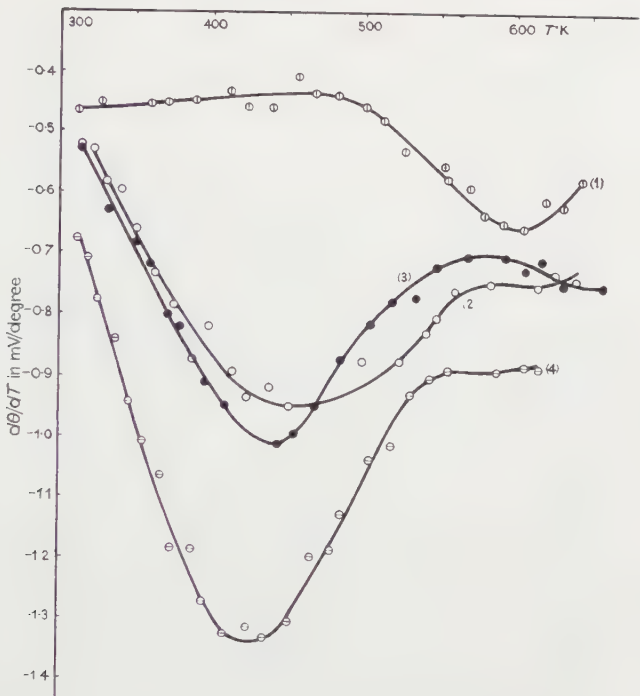


Figure 3

Crystal S-7. Temperature variation of the thermoelectric power of an *n*-type specimen. (1), (2), (3), and (4) are three consecutive runs.

semiconductor theory. The activation energy  $\varepsilon$  as calculated from the slope of the  $\log \sigma$  versus  $1/T$  line (1) is about 0.156 eV. It follows that the chemical potential, or free energy per electron, in this specimen is

$$\varepsilon' = -\frac{\varepsilon}{2} = -0.078 \text{ eV}.$$

Substituting this value in the classical expression for the thermoelectric power of an extrinsic semiconductor:

$$\frac{d\theta}{dT} = -\frac{k}{e} \left( 2 - \frac{\varepsilon'}{kT} \right)$$

where  $k$  is BOLTZMANN'S constant ( $0.68 \times 10^{-4}$  eV/degree), we have at room temperature

$$\frac{d\theta}{dT} = -0.86 \times 10^{-4} \left( 2 + \frac{0.078}{0.025} \right) \text{ V/degree} = -0.44 \text{ mV/degree}$$

which is in good agreement with the observed room temperature value  $-0.47$  mV per degree [Figure 3 (1)].

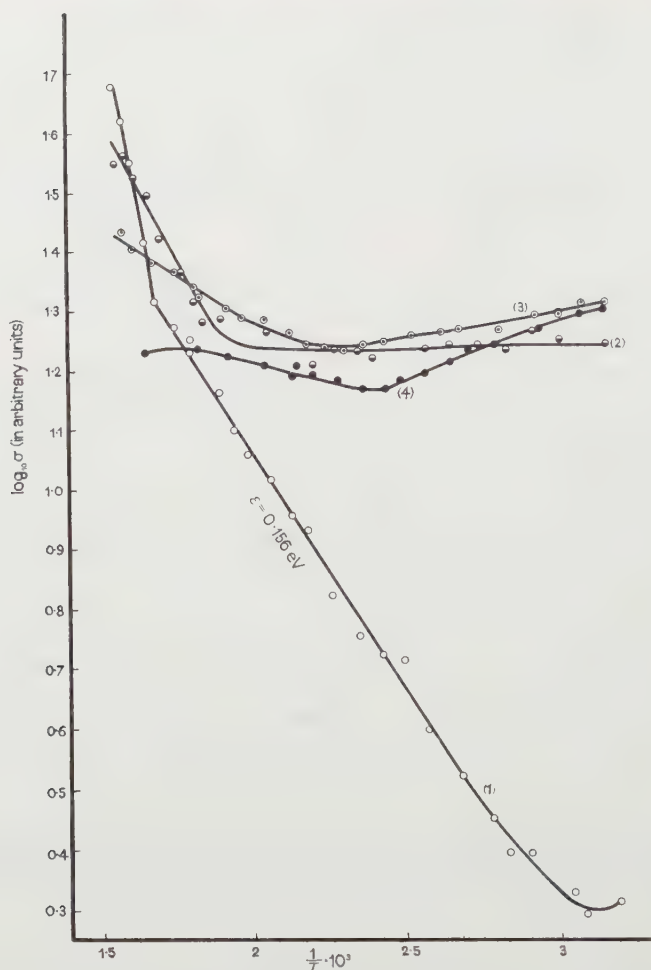


Figure 4

Crystal S-7. Logarithm of conductance against  $1/T$  in the same consecutive runs of Figure 3. The activation energy is about 0.16 eV. In the following runs it is almost negligible.

The rather abnormal behaviour exhibited by the nonlinear relations between the logarithm of conduction and the reciprocal of the absolute temperature [Figure 4 (2), (3), (3) and Figure 5 (1), (2), (3), (4), (5)] cannot be explained on the basis of the simple Wilson-Gudden model of a semiconductor, according to which such a relation is linear. The minimum of conductance [Figure 4 (4)] may be described as the boundary between two ranges: (a) the low temperature range where the conduction is determined almost entirely by the high mobility of the relatively small number of carriers, and (b) the high temperature range where

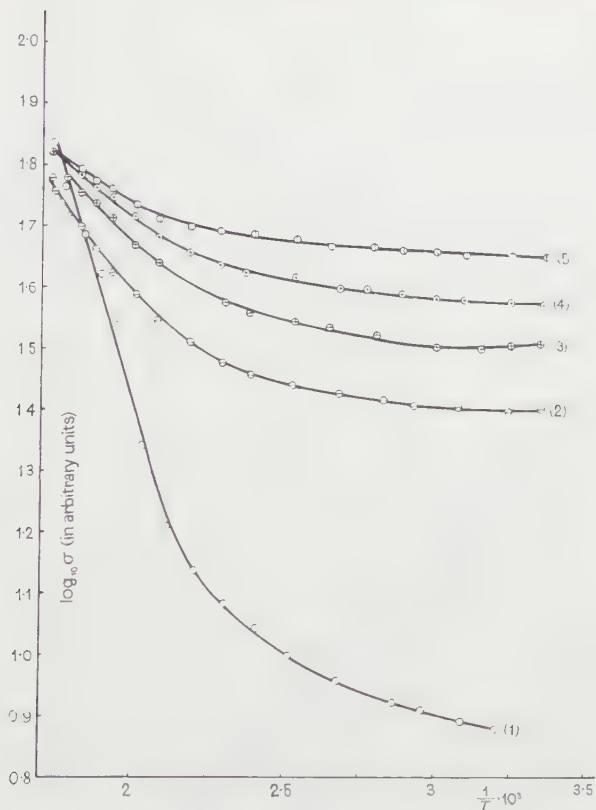


Figure 5  
Crystal S-4. Logarithm of conductance against  $1/T$  in five consecutive runs.

the mobility is much reduced and the conduction is determined by the large number of carriers. The maximum of conductance (Figure 7) is, however, difficult to explain on a similar basis. The appearance of maxima or minima or both in the conductance-temperature graphical relations as well as the 'metallic' behaviour of certain semiconductors seem to find explanation in a semiconductor model which was first proposed by GISOLF [1]. He assumes that deviations from stoichiometric composition, which are pronounced especially in the oxides, sulphides, selenides and tellurides of the multi-valent metals, give rise to donor levels whose energy lies above the bottom of the conduction band, or to acceptor levels whose energy lies below the top of the highest full band. The energy values associated with these impurity levels are unimportant, since the impurity atoms giving rise to them are almost completely ionized at all temperatures. Just below the conduction band GISOLF assumes a continuous band of levels into which free electrons may be trapped. The material is a typical semiconductor, i. e., possesses a negative temperature-resistance coefficient if the density of impurity donors (already ionized) is so much less than the density of electron traps that the

effect of temperature is a net increase of the number of free carriers contributed either from these traps or from any impurity levels that happen to lie below the conduction band. This condition is satisfied by most semiconducting materials. On the other hand if the density of the 'Gisolf impurities' is dominantly large, then the semiconductor is metallic. In this case the effect of temperature on the concentration of free carriers is neglected in comparison with its effect on their mobility. Under these conditions the impurities are so close together that appreciable overlapping of the impurity wave functions occurs and the impurity atoms play much the same role as the electrons and ions in a metal, and the excess electrons form a degenerate electron gas which moves through the irregularly distributed array of positive ions. As the intrinsic range is approached, however, the

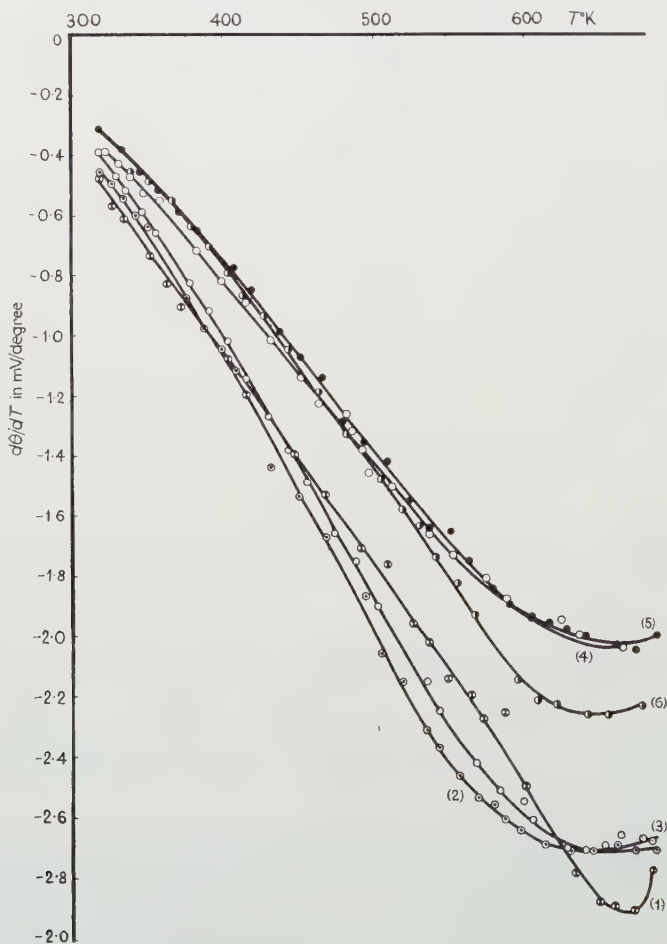


Figure 6

Crystal S-5. Temperature variation of the thermoelectric power of a metallic specimen.  $d\theta/dT$  is large and increases rapidly with  $T$ .

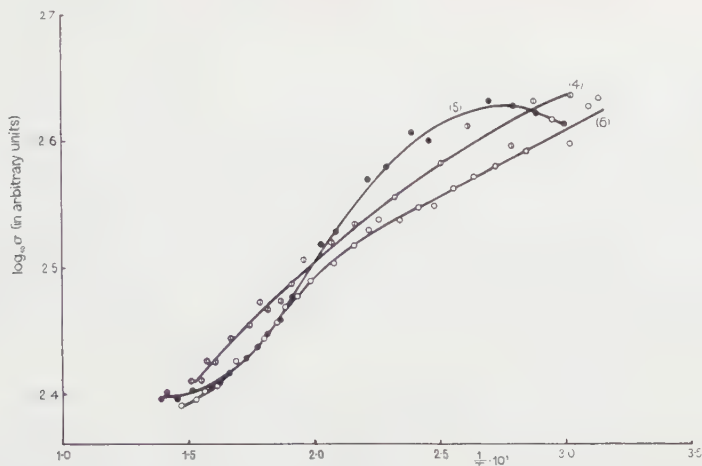


Figure 7

Crystal S-5. Logarithm of conductance against  $1/T$  for the metallic specimen.

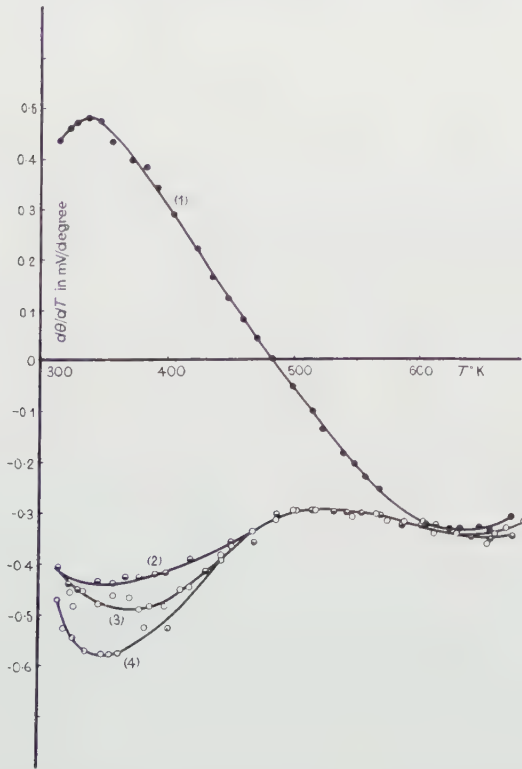


Figure 8

Crystal S-8. Irreversible change from  $p$ - to  $n$ -type after the first run.

number of the carriers and the conductivity begin to increase with increasing temperature.

There is evidence for the presence of impurity levels lying either just below or in the conduction band. It follows that the energies required to remove electrons from such impurities are so small that a negligible fraction of the excess electrons are bound to their impurities at room temperature. Referring to Figure 4, the initial room temperature behaviour as indicated by the curve S-7 (2) is almost temperature independent. This may be explained as due to a negligible activation energy; the small increase in the number of carriers due to increase of temperature being counterbalanced by the decrease in mobility.

Figures 6 and 7 illustrate the thermoelectric behaviour and conduction respectively with temperature of the specimen S-5. This specimen shows a metallic behaviour and, moreover, possesses a very high thermoelectric power lying between 2 and 3 mV/degree at a temperature of about 650° K.

The irreversible change over from *p*- to *n*-type exhibited by specimen S-8 (Figure 8) is due to the removal of acceptor impurities, e. g., evaporation of excess sulphur. Heat treatment to about 700° K causes this type of impurity to disappear.

The complete analysis of these results and quantitative determination of mobility and concentration of carriers at different temperatures will be possible when further experimental work on the Hall constant and conductivity of the same material is carried out. This work is in progress.

#### REFERENCES

- [1] J. H. GISOLF, Ann. Phys. Lpz. [Folge 6] 7 (Nos. 1-3), 3-26 (1947).
- [2] K. LARK-HOROVITZ, *et al.*, Phys. Rev. 69, 259 (1946).
- [3] A. E. MIDDLETON and W. W. SCANLON, Phys. Rev. 92, 219 (1953).
- [4] E. H. PUTLEY, Proc. phys. Soc. Lond. [B] 68, 35 (1955).
- [5] F. SEITZ, *Modern Theory of Solids* (MacGraw-Hill, New York 1940), p. 186 *et seq.*
- [6] W. SHOCKLEY, *Electrons and Holes in Semi-Conductors* (Van Nostrand, New York 1950).

#### Zusammenfassung

Die thermoelektrische Kraft von natürlichen Proben von Bleisulfid wurde von Zimmertemperatur bis 700° K gemessen. Proben vom *n*-Typ blieben über den ganzen Temperaturbereich unverändert. Proben vom *p*-Typ zeigten jedoch eine Änderung des Vorzeichens. Eine weitere Erhöhung der Temperatur führte zu einem negativen Extremwert der thermoelektrischen Kraft. Von dieser Temperatur an aufwärts scheint sich ein gleichartiges Verhalten der Proben beider Typen zu entwickeln. Einzelne Kristalle, die anfangs dem *p*-Typ angehörten, wechselten in den *n*-Typ über und behielten diese Eigenschaft während der ganzen folgenden Untersuchung bei. Von den Kristallen zeigte einer eine metallische Leitfähigkeit und eine ausserordentlich grosse thermoelektrische Kraft.

(Received: January 12, 1956.)



---

 Varia – Miscellaneous – Divers
 

---

**Conference on Nuclear Structure**

The University of Pittsburgh announces its third *Conference on Nuclear Structure*, to be held in Pittsburgh during June 6, 7, and 8 of 1957. Communications regarding the conference should be addressed to N. AUSTERN, at the Sarah Mellon Scaife Radiation Laboratory, University of Pittsburgh, Pittsburgh 13, Pennsylvania, U.S.A. It is expected that this conference will be held regularly thereafter at two-year intervals.

N. AUSTERN

---

**Jahrestagung GAMM 1957**

Die nächste wissenschaftliche Jahrestagung der GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik) findet vom Dienstag, dem 23., bis Samstag, dem 27. April 1957 an der Universität Hamburg statt. Die örtliche Tagungsleitung liegt in Händen von Prof. Dr. KARL WIEGHARD (Universität Hamburg).

J. HEINHOLD

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Theorie der linearen Wechselstromschaltungen.** VON WILHELM CAUER. 2. revidierte Auflage, herausgegeben und aus dem Nachlass ergänzt von WILHELM KLEIN und FRANZ M. PELZ (Akademie-Verlag, Berlin 1954). 769 S., 461 Abb.; DM 48.—.

Es ist sehr erfreulich, dass das Werk des 1945 kurz vor dem Ende des Krieges in Berlin tragisch ums Leben gekommenen Ingenieur-Mathematikers eine Neuauflage erfährt. Bei den Ingenieuren galt die erste Auflage als schwer lesbar. Sie enthielt allerdings Ideen und Entwicklungen, für welche die Technik erst heute reif ist. Deshalb wird die Neuauflage durchaus modern wirken, ja erst wirklich fruchtbar sein. Die Herausgeber haben es übrigens verstanden, bei pietätvoller Respektierung des Buches von CAUER, durch Umstellungen in der Kapitelreihenfolge, einfügen von Untertiteln, Kleindruck von nicht absolut notwendigen Beweisen, erläuternden Fussnoten und Literaturhinweisen bis 1953, den Inhalt dem Leser näherzubringen. In der Netzwerktheorie unterscheidet man Analyse und Synthese. In beiden Richtungen wirkte CAUER bahnbrechend. Die Revision bezog sich hauptsächlich auf das Kapitel über die Betriebsparametertheorie, wobei die Abschnitte 13 bis 16 neu hinzukamen. Ebenfalls aus dem Nachlasse von CAUER stammt der Abschnitt über Filter mit Elektronenröhren (VI./19, S. 275). Ein Einführungskapitel, das den Stoff des ganzen Buches zusammenfassend behandelt, erleichtert dem Leser die Übersicht. Die Anhänge zu den einzelnen Kapiteln in der 1. Auflage wurden an den Schluss des Buches verwiesen, ebenfalls die für den Ingenieur sehr wertvollen Hilfsmittel für den Entwurf von Filtern, genannt nach der Wellenparametertheorie und nach der Betriebsparametertheorie. Die Erläuterungen zum Entwurf von Filtern nach der Wellenparametertheorie wurden von den Herausgebern überarbeitet und erweitert, so dass es auch den

mit der Theorie weniger Vertrauten mit diesen Hilfsmitteln möglich sein sollte, Filter zu berechnen, die bestimmten Anforderungen genügen. Für Leser, welche das Buch von CAUER noch nicht kennen, folgen einige Titel von Kapiteln: 1. Aufgabenstellungen und Beispiele, 2. Berechnung der Eigenschaften gegebener Schaltungen (unter anderem Topologie), 3. Vierpole, 4. Positive Funktionen und positive Matrizen, 5. Reaktanztheoreme, 6. Wellenparametertheorie der Tiefpass-Reaktanzfilter, 7. Wellenparametertheorie allgemeiner Filter, 8. Reaktanzvierpole mit vorgegebenen Betriebseigenschaften, 9. Frequenzweichen, 10. Äquivalenz von Reaktanzschaltungen. Anhänge: I. Hilfsmittel aus der linearen Algebra, II. Elemente der Theorie der analytischen Funktionen, III. Vierpol-Formelsammlung, IV. Lösung einiger Tschebyscheffscher Extremalprobleme, V. Hilfsmittel für den praktischen Entwurf von Filtern nach der Wellenparametertheorie, VI. desgleichen von Filtern und Frequenzweichen nach der Betriebsparametertheorie.

Druck und Einband entsprechen dem innern Wert des Buches, sind also gut. Druckfehler sind bei einer solchen Fülle des Stoffes kaum zu vermeiden und darum entschuldbar. Möge diese Neuauflage eine weite Verbreitung finden als Unterstützung der Ingenieure in der Netzwerk-Analyse und Synthese. Zugleich ist das Buch ein Beweis dafür, was angewandte Mathematik zu leisten vermag.

*H. Weber*

**Existence Theorems for Ordinary Differential Equations.** Von F. J. MURRAY und K. S. MILLER (New York University Press, New York 1954). 164 S., 6 Fig.; \$5.00.

Das Buch umfasst die klassischen Theoreme und bringt zunächst den fundamentalen Existenzsatz von Peano und den Eindeutigkeitssatz für Systeme von beliebig vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen in expliziter oder impliziter Form; für dieselben Fälle wird mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen die Stetigkeit in den Anfangswerten und Parametern nachgewiesen. Als dann werden die Eigenschaften der Lösungen, wie Differenzierbarkeit nach den Anfangsbedingungen und Parametern, untersucht und schliesslich kurz die linearen Differentialgleichungen im Reellen und Komplexen betrachtet. Die Darstellung ist übersichtlich und klar, die Voraussetzungen werden sorgfältig hervorgehoben und die Beweise auch im allgemeinen Falle ausführlich dargestellt. Die Verfasser weisen auf die Bedeutung dieser Sätze bei der Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe von Rechenmaschinen (Analogiegeräten) hin. – Das Buch ist in erster Linie für Studenten in mittleren Semestern gedacht. *E. Roth-Desmeules*

**Die Messwandler, ihre Theorie und Praxis.** Von J. GOLDSTEIN (Verlag Birkhäuser, Basel 1952). 2. Auflage, 224 S., 210 Fig.; Ganzleinen Fr. 29.10, broschiert Fr. 24.95.

Der Autor war früher bei der AEG., Berlin, und später als beratender Ingenieur der Firma Moser-Glaser & Co. in Muttenz als anerkannter Spezialist auf dem Wandlergebiet tätig. Die hier vorliegende 2. Auflage berücksichtigt die Weiterentwicklung der Wandler und behandelt auch die amerikanischen Arbeiten.

Zuerst wird die Theorie des Stromwandlers, der Stromfehler und der Fehlwinkel an Hand von Zeigerdiagrammen klargestellt, anschliessend kommen die Materialeigenschaften der modernen magnetischen Blechsorten, die Dimensionierung der Kerne, die Berechnung und Messung der Streuung zur Behandlung. Die nächsten Kapitel beschäftigen sich mit den Mitteln zur Verbesserung der Wandlereigenschaften, nämlich mit dem Zweistufenwandler, der Wilson-Kompensation und der Methode von A. C. SCHWAGER, dem kompensierten und insbesondere dem

vom Autor geförderten vormagnetisierten Wandler. Es folgen nun die für die Praxis wichtigen Probleme des konstruktiven Aufbaues, der dynamischen und thermischen Kurzschlussfestigkeit, der Überstromziffer und der Stoßspannungsfestigkeit. Der Gleichstrommesswandler wird nur kurz gestreift, da für diesen noch keine Fehlertheorie vorliegt. Den Abschluss bilden Betrachtungen über den Spannungswandler und die Präzisionsmesstechnik für Wandlerprüfungen.

Der Text ist klar geschrieben und durch viele Zeigerdiagramme, Kurven und Photographien erläutert. Da das Buch sich an einen grösseren Kreis von Elektroingenieuren, Messtechnikern und Betriebsingenieuren richtet, ist von der komplexen Rechnung kein Gebrauch gemacht worden, obschon dadurch gewisse Überlegungen gewonnen hätten. Die drucktechnische Ausstattung ist hervorragend. Leider war bei der Drucklegung die Publikation Nr. 192df des SEV. noch nicht erschienen, so dass von den SEV.-Symbolen und ferner vom Giorgi-System noch kein Gebrauch gemacht werden konnte. Das Buch kann warm empfohlen werden.

*Ed. Gerecke*

### **Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen.**

Von Dr. FRIEDRICH LÖSCH (Springer-Verlag, Berlin 1954). 331 S.; DM. 49.80.

Zu jedem Argument  $x$  (Bogenmass) sind tabelliert die Funktionen  $\arcsin x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arccos x$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$ ,  $e^{-x}$  und die hyperbolischen Funktionen  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\operatorname{tgh} x$ ,  $\operatorname{arsinh} x$ ,  $\operatorname{artgh} x$ , und zwar in Tafel I für  $x = 0$  (0,0001) 0,1 neunstellig und in Tafel II für  $x = 0,1$  (0,0005) 3,15,  $x = 3$  (0,01) 10 und  $x = 10$  (0,1) 20 siebenstellig. Die ersten Differenzen sind durchweg mitgedruckt, wobei in konsequenter Weise als Schritt immer eine Einheit der letzten Stelle von  $x$  zugrunde gelegt ist. In allen Tafeln ergibt lineare Interpolation einen Fehler von höchstens 2 Einheiten in der letzten Stelle des Funktionswerts. Verschiedene weitmaschigere Hilfstabellen beschliessen das Buch, das wegen seiner übersichtlichen Anordnung und bequemen Handhabung verdient, als Standardwerk der elementaren Transzendenten zu gelten.

*E. Stiefel*

**Dictionary of Conformal Representations.** Von H. KOBER (Dover Publications 1952) 208 S., 447 Fig.; \$3.95.

Dieses sehr nützliche Handbuch erfüllt einen doppelten Zweck. Es enthält einerseits in zeichnerischer Darstellung die konformen Abbildungen, welche durch gegebene analytische Funktionen von einfachem Typus hergestellt werden, und es erlaubt andererseits, die konforme Abbildung von gegebenen Bereichen aufeinander zu konstruieren, insofern dies durch geschlossene Ausdrücke möglich ist. Behandelt werden: Die ganze und die gebrochene lineare Funktion, quadratische und Potenzfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus, elliptische und Modulfunktionen. Hervorgehoben sei die ausführliche Behandlung der durch elementare Funktionen realisierbaren Schwarz-Christoffelschen Abbildungen sowie die Beispiele, welche die Abbildung von Tragflügelprofilen betreffen. Das Buch ist für die Behandlung von Randwertaufgaben der mathematischen Physik und speziell für die Strömungslehre ein ausgezeichnetes und zeitsparendes Hilfsmittel.

*E. Stiefel*

**Numerical Solution of Differential Equations.** Von W. E. MILNE (John Wiley & Sons, New York 1953) 275 S.; \$6.50.

Wer oft mit Differentialgleichungen zu tun hat, weiss, wie häufig man auf numerische Lösungsmethoden angewiesen ist. Das vorliegende Lehrbuch gibt einen Querschnitt durch das gesamte Gebiet der numerischen Behandlung von

Differentialgleichungen. Dabei ist es dem Verfasser gelungen, den Umfang zu beschränken, ohne auf die Behandlung der zahlreichen rechentechnischen Kunstgriffe verzichten zu müssen.

Nach einem einleitenden Kapitel über die Grundbegriffe der numerischen Integration behandelt der Verfasser im 2. Kapitel die einfachsten Integrationsmethoden (zum Beispiel die Trapezregel). Es folgt ein Kapitel 3 über theoretische Grundlagen, worauf in den Kapiteln 4, 5, 6 die verfeinerten Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen zur Sprache kommen. Kapitel 7 ist den Randwertproblemen gewidmet, wobei auch die Verfahren von RITZ und GALERKIN gestreift werden. Der zweite Teil des Lehrbuches befasst sich mit partiellen Differentialgleichungen, mit einer starken Betonung der elliptischen Gleichungen. Demgemäss ist auch ein beträchtlicher Teil (Kapitel 9) den weiteren Ausführungen der Lösung linearer Gleichungssysteme gewidmet. Auch die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix kommt in Kapitel 9 zur Sprache, obwohl sich das Lehrbuch sonst nur wenig (in Kapitel 11) mit Eigenwertproblemen befasst. Das Werk schliesst mit einem überaus reichen Literaturverzeichnis.

*H. Rutishauser*

**Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists.** Von PAUL F. BYRD und MORRIS D. FRIEDMAN (Springer-Verlag, Berlin 1954). 355 S., 22 Fig.; DM. 36.–/39.60.

Den Hauptinhalt des Buches bilden etwa 3000 Formeln zur Berechnung elliptischer Integrale, wobei sehr breit die verschiedenen Spezialfälle des unter der Wurzel stehenden Polynoms vierten Grades berücksichtigt sind. Das Buch leistet daher nützliche Dienste zur Abkürzung der an sich elementaren Reduktion eines elliptischen Integrals auf Normalform. Die Verfasser benutzen ausschliesslich die Jacobischen elliptischen Funktionen für ihre Formeln; zur Berechnung der Integrale dritter Gattung wird ausserdem die Heumansche Funktion herangezogen, die zusammen mit den Normalintegralen erster und zweiter Gattung sowie der  $Z$ -Funktion am Schluss des Buches kurz tabelliert ist. Die Weierstraßschen Funktionen und die  $\vartheta$ -Reihen werden nur im Anhang kurz berührt, sind aber nicht in die Formelsammlung eingebaut. Das Buch ist so angelegt, dass es ohne tieferes Eindringen in die Theorie der elliptischen Funktionen benutzt werden kann.

*E. Stiefel*

**Projektive Geometrie.** Von W. BLASCHKE (Birkhäuser Verlag, Basel 1954), 197 S. mit 71 Abb., geb. sFr. 19.60, brosch. sFr. 16.65.

Die Kenntnis der Figuren und Sätze der projektiven Geometrie ist unerlässliche Voraussetzung für jede Beschäftigung mit irgendeinem Zweige der Geometrie. Die projektive Geometrie gehört daher zum Unterrichtsstoff der unteren Semester des Mathematikstudiums. Aus einer derartigen Vorlesung ist BLASCHKES «Projektive Geometrie» hervorgegangen.

Zur Behandlung der projektiven Geometrie stehen zwei Wege offen, der analytische und der synthetische. Dem propädeutischen Charakter des Buches entsprechend wählt der Verfasser die analytische Methode. Als Koordinatenkörper ist der Körper der komplexen Zahlen zugrunde gelegt.

Gegenstand der projektiven Geometrie ist die Untersuchung jener Eigenschaften von Figuren, die gegenüber Kollineationen invariant sind. Dass bei einer Einschränkung der Transformationsgruppe der Invariantenschatz grösser wird, führt der Verfasser an einigen Beispielen ausführlich vor. Insbesondere werden die Affingeometrie, die Euklidische Geometrie und die Nichteuklidische Geometrie unter diesen Gesichtspunkten behandelt.



Verschiedentlich werden auch Brücken zur darstellenden Geometrie geschlagen, indem etwa ebene Figuren als Projektionen gewisser räumlicher Figuren interpretiert werden. Der Leser gewinnt dadurch auch einen kleinen Einblick in die synthetische Methode. Weitere Querverbindungen reichen zur algebraischen Geometrie, zur graphischen Statik und zur Algebra. Dazu gehört insbesondere die Aufnahme des von STAUDT'Schen Hauptsatzes über die Abbildungen, welche die harmonische Lage von 4 Punkten bewahren.

Das Buch gliedert sich in folgende Abschnitte: I. Einleitung, II. Homogene Koordinaten, Kollineationen und Korrelationen, III. Das Doppelverhältnis IV. Kegelschnitte, V. Liniengeometrie, VI. Quadriken, VII. Nichteuklidische Geometrie, VIII. Möbiussche Vierflachpaare, IX. Gewebe und Gruppen.

Im letzten Teil über Gewebe und Gruppen werden einige axiomatische Fragen der projektiven Geometrie gestreift unter Verwendung neuerer Begriffsbildungen.

Die «Projektive Geometrie» BLASCHKE'S ist äusserst ansprechend geschrieben und kann zur Einführung in dieses Gebiet bestens empfohlen werden. Neben dem Neuling wird aber auch der Kenner mit Vergnügen darnach greifen, enthält doch das Buch eine Reihe von weniger bekannten geometrischen Zusammenhängen.

M. Jeger

**Nutshell Tables of Mathematical Functions for Interpolation with Calculating Machines.** VON R. A. HIRVONEN. 24 S. Sonderdruck aus Bull. géodésique 30 (1953).

Auf 4 Druckseiten zusammengedrängte 10stellige Tafeln der sogenannten elementaren Funktionen ( $\log x$ ,  $10^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\arctg x$ ) sowie 3 Seiten Tabellen für die Berechnung geodätischer Linien.

Der Verfasser teilt das Argument in relativ grosse Intervalle ein und gibt dann für jedes dieser Intervalle ein Polynom vierten Grades an, welches dort um höchstens  $0,5 \cdot 10^{-10}$  von der betreffenden Funktion abweicht. Das Aufschlagen eines Funktionswertes ist also mit der Auswertung eines Polynoms vierten Grades verbunden, was aber bei Vorhandensein einer kleinen Rechenmaschine durchaus erträglich ist.

H. Rutishauser

**Mathematics and Plausible Reasoning.** VON GEORGE POLYA. I. *Induction and Analogy in Mathematics*. II. *Patterns of Plausible Inference* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1954). Bd. 1: 292 S., 64 Fig.; \$5.50. Bd. 2: 200 S., 13 Fig.; \$4.50.

Es gehört seit den Zeiten EUKLID'S zum Charakter der Mathematik, dass die Darstellung eines Sachverhaltes in eine möglichst unpersönliche und in gewissem Sinne endgültige Form gebracht wird. Mit der grössten Sorgfalt werden die Spuren, die zu einem Satz oder seinem Beweis führten, ebenso alle Umwege verwischt, und vieles erscheint dann als ein «Deus ex machina». Es gibt nur wenige Mathematiker, man denke etwa an EULER, die in aller Offenheit auch ihre unfruchtbaren Versuche erwähnen. Dass gerade das Finden des Weges zur Lösung eines Problems das Wichtigste ist, ist offensichtlich; aber diese Seite der Mathematik wird in den allermeisten Büchern über Mathematik vernachlässigt.

Nun hat G. POLYA seine Erfahrungen auf dem Gebiete des plausiblen Denkens, über das er schon an den verschiedensten Orten Vorlesungen hielt und eine Reihe von Abhandlungen veröffentlicht hat, in einem ausgezeichneten, zweibändigen Werk zusammengefasst. Das erste Buch zeigt an Hand sehr instruktiver Beispiele aus der elementaren und höhern Mathematik und der mathematischen Physik die Bedeutung auf, welche die Analogie und die Induktion im allgemeinen

Sinne (das induktive Denken spielt ja in den Naturwissenschaften und im täglichen Leben eine hervorragende Rolle) beim Auffinden von Vermutungen und schliesslich beim deduktiven Beweisen besitzen. Damit wird gleichzeitig der Grund gelegt für die Ausführungen des zweiten Bandes. Dieser bringt zunächst eine Systematisierung der plausiblen Schlüsse, ihre gegenseitigen Beziehungen, und nach einem Überblick über die Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt der bemerkenswerte Versuch einer Verbindung derselben mit dem plausiblen Schliessen, indem an Stelle der Wahrscheinlichkeit die Glaubwürdigkeit gesetzt wird. Selbstverständlich kann es sich dabei nur um qualitative Aussagen handeln, doch erscheint der Weg vielversprechend. – Allen Kapiteln sind sorgfältigst ausgewählte Übungen und Ergänzungen zum Text beigelegt.

Das Werk von G. POLAY, das eine Hilfe (a guide to the art of plausible reasoning) für Studenten und Lehrer sein will, ist gleichzeitig in einem gewissen Sinne ein philosophischer Essay und stellt einen wichtigen Beitrag zu dem wenig beachteten Gebiet der Psychologie des Erfindens dar. Es besteht kein Zweifel, dass das feine Werk, welches die jahrzehntelangen Erfahrungen eines gewiegten Mathematikers, Problemstellers und -lösers enthält, vor allem den Studenten, aber auch dem Praktiker in seinen Mussestunden tiefe und wertvolle Einsichten vermittelt. So ist zu hoffen, dass das Buch die weiteste Verbreitung finden und die Bemühungen des Verfassers reiche Früchte tragen werden.

E. Roth-Desmeules

**The Statistical Approach to X-ray Structure Analysis.** Von V. VAND und R. PEPINSKY (The Pennsylvania State University 1953). 109 S., 18 Fig.; \$1.50.

Die Monographie ist im wesentlichen eine kritische Betrachtung des Werkes von H. HAUPTMANN und J. KARLE: *Solution of the Phase Problem I. The Centrosymmetric Crystal*, ACA Report 3 (The Letter Press, Wilmington, Del., 1953), in welchem eine statistische Behandlung des Phasenproblems in der Kristallstrukturanalyse unternommen worden war. Die Autoren zeigen die Korrelation der abgeleiteten statistischen Formeln mit Modifikationen von Patterson- und Patterson-Harker-Analysen und den Vorzeichenkriterien von SAYRE-COCHRAN-PATTERSON und weisen am Beispiel einfacher Punktstrukturen und durch allgemeine Überlegung nach, dass die genannten statistischen Formeln keine allgemeine Gültigkeit besitzen können.

W. Hoppe

**Vorlesungen über Baustatik**, Vol. II. Par FRITZ STÜSSI (Birkhäuser, Basel 1954). 313 p., 217 fig.; reliure toile fr. 37.45, broché fr. 33.30.

Dans le *premier volume* de son «Cours de statique des constructions», dont la première édition est parue en 1946 et la seconde en 1953, le professeur FRITZ STÜSSI expose les théories et les méthodes permettant de calculer les tensions et les déformations des systèmes statiquement déterminés.

Le *second volume*, qui vient de paraître et que nous présentons aujourd'hui aux lecteurs du ZAMP, traite avant tout les *systèmes statiquement indéterminés*. Il s'agit donc d'un ouvrage qui vient heureusement compléter la matière du tome I.

Le *premier chapitre* de ce nouveau livre est consacré aux propriétés fondamentales des déformations élastiques des éléments de construction situés dans un plan. Dans le *second chapitre*, l'auteur expose les principales méthodes permettant de calculer les systèmes statiquement indéterminés. Avec juste raison, il insiste sur la méthode classique consistant à remplacer le système étudié par un système



*fondamental* convenablement choisi, sur lequel sont appliquées non seulement les forces données, mais encore les *grandeurs surabondantes*. Il décrit aussi en détail les méthodes de calcul permettant de résoudre élégamment, par rapport à ces grandeurs, les équations régissant les déformations.

Les autres chapitres (III à VII) sont consacrés à l'application à divers systèmes statiquement indéterminés, des méthodes décrites dans la première partie. Il s'agit principalement de la *poutre continue* sur appuis fixes ou élastiquement déformables, des *arcs à deux et à trois articulations*, de l'*arc encastré*, de différents types de *cadres*, y compris la *poutre Vierendeel*, des *poutres renforcées par une chaînette* et des *systèmes triangulés statiquement indéterminés*. Quelques considérations sur les *tensions secondaires* dues à la rigidité des attaches des barres dans les systèmes triangulés terminent l'ouvrage.

Comme le premier volume, ce livre est très bien présenté. Il est écrit dans un style clair, précis et agréable à lire. Il rendra donc service non seulement aux étudiants des écoles techniques de degré universitaire, mais aussi aux ingénieurs de la pratique, qui seront heureux d'y trouver d'abord une remarquable vue d'ensemble sur les questions traitées, puis un outil précieux pour l'élaboration de leurs projets.

H. Favre

**Theoretische Bodenmechanik.** Von K. TERZAGHI, übersetzt von R. JELINEK. (Springer-Verlag, Berlin 1954). 505 S., 153 Abb.; Ganzleinen DM. 48.—.

Das Buch über «Theoretical Soil Mechanics» erschien 1942 in den USA. Es fand bald Eingang in weiteste Fachkreise und stellt heute eines der massgebenden Werke in der Erdbaumechanik dar, besonders auch deshalb, weil es für den Bauingenieur geschrieben worden ist. Die Übersetzung von Dr. JELINEK schliesst nun auch im deutschen Sprachgebiet eine oft empfundene Lücke.

Die «Theoretische Erdbaumechanik» führt den Leser nicht, wie auf Grund des Titels zu vermuten wäre, in das rein abstrakte Wissensgebiet der Erdbaumechanik, sondern sucht vielmehr eine Brücke zwischen Theorie und Praxis zu schlagen. Der Verfasser weist darauf hin, dass in Analogie zu den andern Fachgebieten der Ingenieurwissenschaften die bodenphysikalischen Eigenschaften weitgehend idealisiert worden sind, so dass deren Verhalten in Form einfacher Gesetze wiedergegeben werden kann. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wurde auf die Wiedergabe von Herleitungen verzichtet und manche numerisch nicht lösbare Probleme durch Näherungen ersetzt.

Das Buch behandelt folgende Fachgebiete:

1. Allgemeine Grundlagen, umfassend die Grundelemente, die plastischen Grenzzustände im isotropen Halbraum und theoretische Grundlagen für die Lösung praktischer Aufgaben. Die Mohrsche Bruchhypothese findet weitgehende Anwendung.

2. Brucherscheinungen in idealen Böden, Erddruck und Erdwiderstand, Tragfähigkeit, Standsicherheit von Böschungen und Spundwände. Von besonderer Bedeutung für das Bauwesen ist das Kapitel über die Tragfähigkeit der Böden. Seine Anschauungen waren richtunggebend für die Entwicklung der Fundamentechnik. Es ist dem Verfasser hoch anzurechnen, dass er aus den vielen Theorien besonders über das Gebiet der Standsicherheit von Böschungen in klarer Form die massgebenden Faktoren herausgearbeitet hat, um so dem weniger Fachkundigen einen guten Überblick zu verschaffen.

3. Mechanische Wirkung des Wassers im Boden. Behandelt werden die Sickerströmung und deren Einfluss auf die Beanspruchung des Bodens, Setzungsvorgänge (Konsolidationstheorie) und Kapillarscheinungen. Die von K. TERZAGHI

und O. K. FRÖHLICH ausgearbeitete Konsolidationstheorie verdient besondere Beachtung, da es heute möglich ist, damit die Spannungsverhältnisse im Baugrund während eines Setzungs Vorganges abzuschätzen.

4. Elastizitätsaufgaben der Erdbaumechanik unter Berücksichtigung der Spannungsverteilung im elastisch-isotropen Halbraum, der Theorie elastischer Schichten auf starrer Unterlage und dynamischer Lasten.

Obwohl seit dem Erscheinen der 1. Auflage (1942) die Erkenntnisse enorme Fortschritte gemacht haben, verlor das Buch keineswegs an Wert, wurde es doch für die folgenden Auflagen laufend ergänzt und dem neuesten Stand angepasst. Der besondere Vorzug dieses Buches liegt in der leichten Überblickbarkeit der Materie und der kritischen Betrachtung der Theorien.

Die Übersetzung von Dr. JELINEK ist präzise und hält sich genau an den amerikanischen Originaltext. Es ist nur zu hoffen, dass auch das 2. Buch von Prof. TERZAGHI: *Soil Mechanics in Engineering Practice*, im deutschen Sprachgebiet Eingang findet.

J. Zeller

**Electron Optics.** Von O. KLEMPERER, 2. Aufl. (Cambridge University Press 1953). 471 S., 167 Fig., 50 s.

Die erste Auflage ist 1939 erschienen. Dass der Umfang von etwa 100 Seiten dieser ersten Auflage auf über 450 Seiten der zweiten Auflage angewachsen ist, wird nicht überraschen. Einmal, weil die technische Bedeutung der Elektronenoptik erheblich grösser geworden ist; dann aber auch, weil in den seit der ersten Auflage verstrichenen Jahren sehr viele neue und wesentliche Erkenntnisse rein wissenschaftlicher Art hinzugekommen sind.

Es ist deshalb eher erstaunlich, dass es dem Verfasser gelungen ist, auf dem relativ geringen Raum von 450 Seiten eine Darstellung zu geben, welche ein recht vielseitiges Bild vom heutigen Stand der experimentellen und theoretischen Elektronenoptik zu vermitteln vermag. Allerdings ist das Schlusskapitel über Anwendungen der Elektronenoptik summarisch geraten und eher als ein erster Hinweis zu betrachten. Demgegenüber sind alle anderen Kapitel eine stellenweise sehr ins einzelne gehende Beschreibung, die der zweifachen Zielsetzung des Buches – es soll einerseits eine Einführung für Studierende sein, andererseits dem Fachmann die numerischen Unterlagen für seine Entwicklungsarbeit vermitteln – voll gerecht wird. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt mehr auf der experimentellen Seite. Auf die Wiedergabe der Zwischenrechnungen wird häufig verzichtet. Es mag vielleicht als ein Nachteil bewertet werden, wenn der Leser gewissen Formeln gegenübergestellt wird, ohne in der Lage zu sein, den Rechnungsgang zu wiederholen; es geht damit der Darstellung eine gewisse Zwangsläufigkeit verloren. Jedoch nur auf diese Weise war es möglich, den Umfang des Buches derart zu halten, dass der Leser den Überblick über das Wesentliche nicht verliert. Jedenfalls kennen wir heute kein anderes neueres Werk, welches als erste Einführung in die experimentelle Elektronenoptik besser geeignet wäre.

Das Buch umfasst folgende Kapitel: Historical Introduction: The Fundamental Principles of Electron Optics. The Cardinal Points of an Electron Lens. Field Plotting and Ray Tracing. Some Electrostatic Electron Lenses. Magnetic Electron Lenses. Lens Errors: Geometrical Aberrations. Electronic Aberrations. Electron Optics and Space Charge. Emission Systems. Electron Lenses and Emission Systems with Line Focus. Deflecting Fields. Application of Electron Optics in Industry and Research. Ein Verzeichnis von etwa 500 Veröffentlichungen sowie eine Anzahl von Tabellen sind beigefügt,

A. A. Rusterholz

# Einige unstetige stochastische Prozesse

Von ANDREAS DALCHER, Zürich<sup>1)</sup> und Cambridge (England)<sup>2)</sup>

## Inhalt

1. Kapitel: Allgemeines . . . . .	273
§ 1. Einleitung . . . . .	273
§ 2. Beispiele . . . . .	275
§ 3. Die Hauptformel . . . . .	276
2. Kapitel: Lösung durch Integralgleichungen . . . . .	277
§ 4. Herleitung der Integralgleichung . . . . .	277
§ 5. Eigenschaften der Kerne und elementare Lösungsmethoden für Volterra-Gleichungen . . . . .	279
§ 6. Anwendungen . . . . .	285
3. Kapitel: Lösung durch die Laplace-Transformation . . . . .	288
§ 7. Herleitung der Differentialgleichung . . . . .	288
§ 8. Lösung der Gleichungen erster Ordnung . . . . .	289
§ 9. Die Gleichungen höherer Ordnung im stationären Fall . . . . .	292
§ 10. Partielle Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	297
§ 11. Stationärer Zustand bei exponentiell verteilter Sprunghöhe. . . . .	298
4. Kapitel: Diverses . . . . .	301
§ 12. Ansatz für den mehrdimensionalen Fall . . . . .	301
§ 13. Berechnung von Näherungen . . . . .	301
§ 14. Anmerkungen über Existenzsätze . . . . .	303
Literaturverzeichnis . . . . .	303

## 1. Kapitel: Allgemeines

### § 1. Einleitung

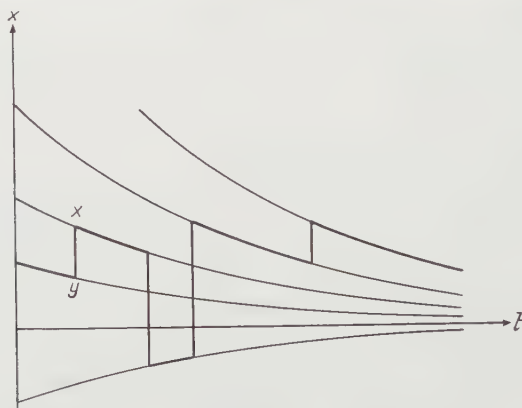
a) Das Problem. Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Die Zeit  $t$  sei die unabhängige,  $x$  die abhängige Variable. Die Gleichung kann in der Form

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(x, t) \tag{1}$$

<sup>1)</sup> Assistenz für Mathematik, ETH.  
<sup>2)</sup> Statistical Laboratory, The University.

geschrieben werden. Wir betrachten nun den folgenden stochastischen Prozess  $x(t)$ .

In jedem Zeitintervall  $(t, t + dt)$  besteht eine Wahrscheinlichkeit  $w(x, t) dt$ , dass  $x$  einen Sprung ausführt. Wenn dieser zur Zeit  $t$  stattfindet und wenn die abhängige Variable in  $(t - 0)$  den Wert  $y$  angenommen hat, so hat  $x$  unmittelbar nachher die Verteilung  $G(y, x, t)$ . Vom so erreichten Punkt  $x$  aus folgt der Prozess bis zum nächsten Sprung der durch  $(x, t)$  gehenden Lösung der Differentialgleichung. In Figur 1 sind einige Kurven der Lösungsschar und ein möglicher



Figur 1

Möglicher Verlauf eines Prozesses.

Verlauf des Prozesses  $x(t)$  dargestellt. Der Anfang des Prozesses sei durch die Verteilung  $F(x, 0)$  gegeben.

Wir kennen also

die Differentialgleichung

$$\dot{x}(x, t),$$

die Dichte der Sprünge

$$w(y, t),$$

die Verteilung nach diesen

$$G(y, x, t),$$

die Anfangsverteilung

$$F(x, 0)$$

und wollen berechnen<sup>3)</sup>

die Verteilung von  $x$  zu irgendeiner Zeit

$$F(x, t).$$

b) Methoden und Resultate. Die Lösungen werden auf zwei Arten erhalten. Mit Integralgleichungen gewinnt man einen besondern Aspekt und allgemeiner. Ergebnisse des «Queueing»-Problems und ähnlicher Fragen (vgl. KENDALL[6]<sup>4)</sup>). Durch die Laplace-Transformation lässt sich unter anderem das «Geräusch»

<sup>3)</sup> Auf das Problem der Verteilung im Funktionenraum [im Lehrbuch von DOOB [3] mit  $\Omega$  bezeichnet:  $x_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ ] treten wir hier nicht ein. Auch die Autokorrelation des Prozesses wird nicht untersucht.

<sup>4)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 303.



problem» behandeln. Hier wird die Störung jedoch als unstetig angenommen, während in der Literatur das Hauptgewicht auf den kontinuierlichen Fall gelegt wird.

## § 2. Beispiele

a) Wir betrachten ein Reservoir in einer wasserarmen Gegend (zum Beispiel Jura). Dieses werde direkt durch Regenwasser und nicht durch eine Quelle gespeisen.  $x(t)$  sei das Volumen des gespeicherten Wassers. Wir nehmen an, Regengüsse erfolgen mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(t)$  und seien nur von kurzer Dauer. Wenn das Wasser sofort in das Reservoir geleitet wird, so nimmt  $x$  jeweils sprunghaft zu.  $-\dot{x}(x, t)$  ist die pro Zeiteinheit gebrauchte Wassermenge. Bei leerem Reservoir ist  $\dot{x}(0, t) = 0$ . Wenn mehr Wasser als die maximale Kapazität  $A$  anfällt, so überläuft es sofort. Dies bedeutet  $\dot{x}(x, t) = -\infty$  für  $x \geq A$ . Im Intervall  $0 < x < A$  ist  $\dot{x}$  negativ.

Ähnlich verhält es sich mit Stauseen für Kraftwerke. Die Bedingung, dass das Regenwasser sofort in den See gelangt, ist allerdings oft nicht erfüllt, besonders wenn Gletscher oder Wälder im Einzugsgebiet liegen. Ein stetiger Zufluss kann jedoch berücksichtigt werden, indem dieser zu  $\dot{x}$  addiert wird. Für die folgenden Rechnungen muss aber  $\dot{x}$  eine bestimmte Funktion von  $x$  und  $t$  sein. Weder der allfällige stetige Teil des Zuflusses noch der für die Kraft-erzeugung benötigte Abfluss dürfen ein stochastisches Element enthalten.

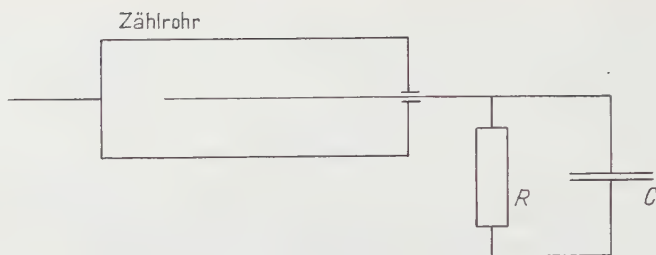
b) Im Lagerungsproblem ist  $x(t)$  die Menge der zur Zeit  $t$  gelagerten Güter.  $w$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass eine neue Sendung eintrifft.  $G(y, x, t)$  ist die Verteilung von  $x$  nach deren Ankunft, wenn vorher die Warenmenge  $y$  betragen hat. Wir nehmen an, der Verkauf erfolge stetig.  $-\dot{x}$  ist die Verkaufsgeschwindigkeit. Auch hier hat man die Bedingung

$$\dot{x}(0, t) = 0, \quad \dot{x}(x, t) < 0 \quad \text{für } x > 0.$$

c) Auch das Warteproblem (queueing problem) kann in dieser Form dargestellt werden.  $x(t)$  ist jedoch nicht die Anzahl wartender Personen, sondern die durch diese für den Bedienenden aufgespeicherte Arbeit.  $w(y)$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich jemand anschliesst, wenn die Länge der Schlange, ausgedrückt in Arbeit,  $y$  beträgt.  $G(x - y)$  ist die Verteilung der Arbeit, die ein Ankommender bringt.  $-\dot{x}(x, t)$  ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Bedienende arbeitet.

d) Ein Geiger-Müller-Zählrohr löst bei jedem registrierten Partikel einen kurzen Stromstoss aus. Dieser gelange auf einen  $CR$ -Kreis. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spannung  $x$  am Kondensator? Bei jedem Stromstoss nimmt letztere sprunghaft zu und folgt zwischen den Unstetigkeiten der Differentialgleichung

$$\dot{x} = -\frac{x}{CR}.$$

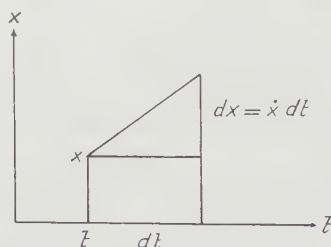


Figur 2  
Die Schaltung eines Zählrohrs.

Ähnlich sind die Verhältnisse bei den Störungen in einem Radio, wenn diese unstetig, und nicht, wie meist angenommen wird, kontinuierlich erfolgen.

### § 3. Die Hauptformel

Ableitungen seien im Sinn von SCHWARTZ [10] verstanden. Wir betrachten die Änderungen von  $F(x, t)$  längs einer Lösung der Differentialgleichung. Es ist also  $dx = \dot{x} dt$ .  $F(x + dx, t + dt)$  setzt sich aus zwei Teilen zusammen: wenn



Figur 3

$y < x$  ist und kein Sprung stattfindet, was mit der Wahrscheinlichkeit

$$\int_{-\infty}^x [1 - dt w(y, t)] dF(y, t)$$

erfolgt, bleibt  $F$  längs der Lösung der Differentialgleichung konstant. Dann ist noch der Einfluss eines Sprunges zu berücksichtigen. Wir erhalten die Gleichung

$$F(x + dx, t + dt) = \int_{-\infty}^x [1 - dt w(y, t)] dF(y, t) + dt \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t) G(y, x, t) dF(y, t) .$$



Nun führen wir das totale Differential  $dF$  ein und dividieren durch  $dt$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} = - \int_{-\infty}^x w(y, t) dF(y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t) G(y, x, t) dF(y, t).$$

Wir bezeichnen mit  $E(z)$  die Heavisidesche Funktion

$$E(z) = 1 \quad \text{für } z \geq 0, \quad E(z) = 0 \quad \text{für } z < 0,$$

und definieren  $H(y, x, t)$  durch

$$H(y, x, t) = E(x - y) - G(y, x, t). \quad (2)$$

Damit erhalten wir die fundamentale Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t) H(y, x, t) dF(y, t). \quad (3)$$

## 2. Kapitel: Lösung durch Integralgleichungen

### § 4. Herleitung der Integralgleichung

Diese Methode ist geeignet zur Lösung des stationären Falles der Beispiele a), b) und c) von § 2.

$x$  sei eine nicht negative Variable. Wir setzen  $a(x) = -\dot{x}$  und verlangen

$$a(0) = 0, \quad a(x) > 0 \quad \text{für } x > 0. \quad (4)$$

Es sei  $f(x, t) = \partial F / \partial x$ . Wenn wir die Abhängigkeit von  $t$  nicht mehr explizit ausdrücken, erhält (3) die Form

$$f(x) a(x) - \frac{\partial F}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} w(y) H(y, x) dF(y).$$

Da  $x$  nicht negativ ist, genügt es, die Integration von  $-\infty$  bis  $\infty$  auszuführen. Wir zerlegen den Bereich in  $(-0, +0)$  und  $(+0, \infty)$ . Für alle positiven  $x$  dürfen wir durch  $a$  dividieren und erhalten nach einer kleinen Umstellung

$$f(x) - \int_{+0}^{\infty} \frac{w(y) H(y, x)}{a(x)} f(y) dy = \frac{w(0) H(0, x)}{a(x)} F(0) + \frac{1}{a(x)} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5)$$

Diese Gleichung hat die Form

$$f(x) - \int_0^{\infty} K(x, y) f(y) dy = \varphi(x) \quad (6)$$

mit

$$K(x, y) = \frac{w(y) H(y, x)}{a(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{w(0) H(0, x)}{a(x)} F(0) + \frac{1}{a(x)} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Im stationären Zustand fällt der letzte Term weg. Damit wird (6) eine Integralgleichung vom Typ von FREDHOLM. Zur Lösung benützen wir die Neumannsche Reihe. Wir setzen

$$K^1(x, y) = K(x, y),$$

$$K^n(x, y) = \int_0^\infty K(x, u) K^{n-1}(u, y) du = \int_0^\infty K^{n-1}(x, u) K(u, y) du,$$

$$K^*(x, y) = K + K^2 + K^3 + K^4 + \dots + K^n + \dots.$$

Ferner brauchen wir die Reziprozitätsformeln

$$K^* = K + \int_0^\infty K(x, u) K^*(u, y) du = K + \int_0^\infty K^*(x, u) K(u, y) du. \quad (7)$$

Im stationären Fall ist

$$\varphi(x) = F(0) K(x, 0). \quad (8)$$

Somit erhält man aus (6)

$$f(x) = \int_0^\infty K(x, y) f(y) dy = F(0) K(x, 0).$$

Die Lösung davon ist

$$f(x) = F(0) K(x, 0) + \int_0^\infty K^*(x, u) F(0) K(u, 0) du = F(0) K^*(x, 0).$$

Integriert man die Gleichung über  $x$ , so ergibt sich

$$1 - F(0) = F(0) \int_0^\infty K^*(x, 0) dx,$$

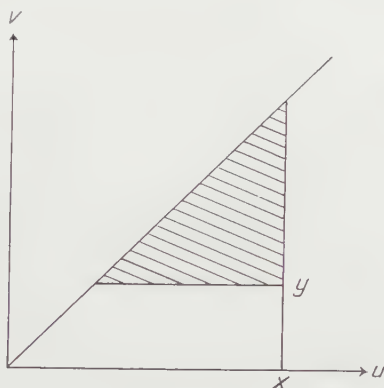
$$F(0) = \frac{1}{1 + \int_0^\infty K^*(x, 0) dx}, \quad f(x) = \frac{K^*(x, 0)}{1 + \int_0^\infty K^*(x, 0) dx}. \quad (9)$$

Dies ist die Lösung für den stationären Fall.

Falls alle Sprünge positiv sind, was wir für dieses Kapitel im folgenden voraussetzen wollen, so ist  $G(y, x) = 0$  für  $y > x$ . Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf  $H(y, x)$  und damit auf  $K(x, y)$ . In diesem Fall ist das Integral in (6) nur bis  $x$  zu erstrecken; die Gleichung ist vom Typ von VOLTERRA.

§ 5. *Eigenschaften der Kerne  
und elementare Lösungsmethoden für Volterra-Gleichungen*

a)  $K^*(x, y)$  hängt von  $x, y$  und von der Funktion  $K(u, v)$  ab, jedoch nur von den Werten im Bereich  $y \leq v \leq u \leq x$ .



Figur 4

Der Bereich, in dem  $K(u, v)$  auf  $K^*(x, y)$  einen Einfluss ausübt.

Beweis durch Induktion nach  $n$ . Da es sich um Volterra-Gleichungen handelt, ist  $K^n(x, y) = 0$  für  $y > x$ . Man kann daher den Integrationsbereich auf  $y \leq u \leq x$  beschränken und erhält

$$K^n(x, y) = \int_y^x K^{n-1}(x, u) K(u, y) du.$$

Nach der Induktionsannahme hängen nun die Faktoren des Integrals und die Grenzen nur von  $x, y$  und von  $K(u, v)$  im angegebenen Bereich ab, und somit gilt dies auch von der linken Seite. Für  $n = 1$  ist die Behauptung erfüllt. Durch die Summenbildung wird die Eigenschaft nicht zerstört und gilt daher auch für  $K^*(x, y)$ .

b) Wenn

$$L(x, y) \geq K(x, y) \geq 0,$$

ann ist

$$L^*(x, y) \geq K^*(x, y) \geq 0. \quad (10)$$

Denn bei der Bildung der iterierten und lösenden Kerne werden nur Produkte, Integrale und Summen positiver Grössen gebraucht. Somit bleiben die Ungleichungen erhalten. (Dieser Satz gilt allgemein für Fredholm-Gleichungen, wenn die Neumannsche Reihe konvergiert.)

Es ist  $w \geq 0$  und  $a > 0$ . Da nach Voraussetzung alle Sprünge positiv sind, ist  $H \geq 0$ . Somit ist auch  $K(x, y)$  nicht negativ.

$$c) \quad K(x, y) = M(x, y) + L(x, y).$$

$L$  sei eine kleine Korrektur, so dass die höhern Iterierten davon vernachlässigt werden können. Diejenigen von  $M$  sollen aber alle berücksichtigt werden. Wir führen noch den Einheitskern  $I(x, y)$  ein durch die Definition

$$I(x, y) = \delta(x - y) \quad (\text{Diracsche } \delta\text{-Funktion, vgl. SCHWARTZ [10]}).$$

Wir schreiben hier die Faltung kurz als Produkt:

$$\int_0^\infty K(x, u) L(u, y) du = KL.$$

Für jeden Kern ist  $M - MI = IM$ . Ferner setzen wir  $M' = I + M^*$  und behaupten

$$K^* = M^* + M' LM' + M' LM' LM' + \dots \quad (11)$$

Wir verifizieren die Gleichung durch die Reziprozitätsformel. Es ist

$$\begin{aligned} K + KK^* &= M + L + (M + L) (M^* + M' LM' + M' LM' LM' + \dots) \\ &= M + MM^* + MM' LM' + MM' LM' LM' + \dots \\ &\quad + L + LM^* + LM' LM' + \dots \end{aligned}$$

Nun ist nach (7)  $M + MM^* = M^*$ , und aus der Definition von  $M'$  folgt

$$L + LM^* = LM' \quad \text{und} \quad I + MM' = I + M + MM^* = I + M^* = M'.$$

Also wird

$$K + KK^* = M^* + M' LM' + M' LM' LM' + \dots = K^*,$$

was zu zeigen war. (Auch dies gilt, falls die Reihe konvergiert, im Fredholm'schen Fall.)

d)  $K$  sei ein Faltungskern:  $K(x, y) = K(x - y)$ . Durch Induktion folgt dass  $K^n$  und  $K^*$  auch nur von  $x - y$  abhängen. Wir führen die Laplace-Transformation ein:

$$M(s) = \int_0^\infty e^{sz} K(z) dz.$$

Die Transformierte von  $K^n$  ist die  $n$ -te Potenz von  $M$ . So wird

$$M^*(s) = M(s) + M^2(s) + \cdots = \frac{M(s)}{1 - M(s)} \quad \text{für } |M(s)| < 1. \tag{12}$$

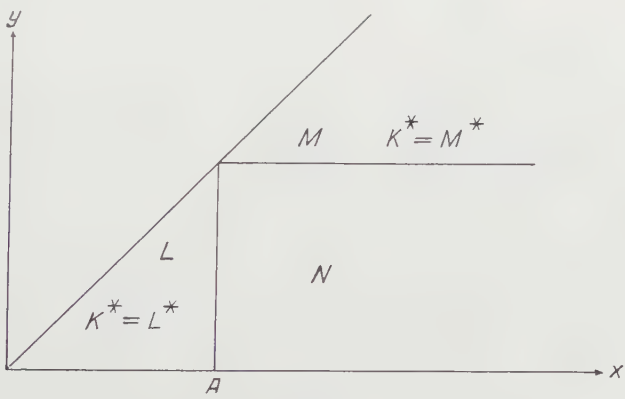
Von  $M^*$  erhält man  $K^*(x)$  durch Umkehrung der Transformation.

Wenn  $K(x - y)$  nicht analytisch ist, so ist im allgemeinen auch  $K^*$  nicht analytisch. In diesem Fall dürfte die Umkehrung der Laplace-Transformation schwierig sein. Hingegen erhält man auch in diesem Fall leicht

$$\int_0^\infty K^*(x) \, dx = M^*(0) = \frac{M(0)}{1 - M(0)} \quad \text{wenn } |M(0)| < 1. \tag{13}$$

Dadurch sind die Normierung von  $F$  und mit den Ableitungen von  $M^*(s)$  in  $O$  auch die Momente gegeben.

Diese Methode ist nicht identisch mit der von Kapitel 3. Hier wird die Laplace-Transformation zur Lösung der Integralgleichung (6), dort zur Lösung der Integro-Differentialgleichung (3) verwendet.



Figur 5  
Die Zerlegung des Gebietes  $0 \leq y \leq x$ .

e)

$$\begin{aligned} K(x, y) &= L(x, y) \text{ in } x < A, \\ K(x, y) &= M(x, y) \text{ in } y \geq A, \\ K(x, y) &= N(x, y) \text{ in } x \geq A, y < A \end{aligned}$$

vgl. Figur 5). Nach a) ist im Dreieck  $0 \leq y \leq x < A$   $K^* = L^*$  und im Bereich von  $M$   $K^* = M^*$ . Im Gebiet von  $N$  gehen wir von den Reziprozitätsformeln

aus. Es ist

$$\begin{aligned} K^*(x, y) &= K(x, y) + \int_y^A K(x, u) K^*(u, y) du + \int_A^x K(x, u) K^*(u, y) du \\ &= N(x, y) + \int_y^A N(x, u) L^*(u, y) du + \int_A^x M(x, u) K^*(u, y) du . \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden sind bekannt. Nun halten wir  $y$  fest und benutzen die Abkürzungen

$$f_y(x) = K^*(x, y) , \quad g_y(x) = N(x, y) + \int_y^A N(x, u) L^*(u, y) du .$$

Damit erhalten wir die Integralgleichung

$$f_y(x) = g_y(x) + \int_A^x M(x, u) f_y(u) du .$$

Diese hat die Lösung

$$f_y(x) = K^*(x, y) = g_y(x) + \int_A^x M^*(x, u) g_y(u) du . \quad (14)$$

Damit ist das Problem gelöst.

Das Verfahren kann auch iteriert werden, indem die Definitionsbereiche von  $M$  oder  $L$  wieder unterteilt werden.

Zwei Spezialfälle:

1. 
$$\begin{aligned} K(x, y) &= L(x, y) \quad \text{für } x < A , \\ &= 0 \quad \text{für } x \geq A , \\ K^*(x, y) &= L^*(x, y) \quad \text{für } x < A , \\ &= 0 \quad \text{für } x \geq A . \end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned} K(x, y) &= L(x, y) \quad \text{in } x < A , \\ &= N(x, y) \quad \text{in } x \geq A, y < A , \\ &= 0 \quad \text{in } y \geq A . \end{aligned}$$

Hier ist  $M = 0$ . Also verschwindet auch  $M^*$ , und wir haben

$$K^*(x, y) = N(x, y) + \int_y^A N(x, u) L^*(u, y) du \quad \text{in } x \geq A, y < A .$$

f) Es sei

$$K(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)} L(x, y) .$$



Im Zähler steht eine beliebige Funktion von  $x$ , im Nenner dieselbe Funktion von  $y$ . Mit Hilfe der Reziprozitätsformeln verifiziert man leicht

$$K^*(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)} L^*(x, y). \quad (15)$$

g) Es sei

$$K(x, y) = f(x) g(y) \quad \text{für } x \geq y, \quad K(x, y) = 0 \quad \text{für } x < y. \quad (16)$$

GOURSAT [5] hat auch die Verallgemeinerung auf

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y) \quad \text{für } x \geq y, \quad K(x, y) = 0 \quad \text{für } x < y$$

behandelt. Aus der Reziprozitätsformel erhalten wir

$$K^*(x, y) = f(x) \left[ g(y) + \int_y^x g(u) K^*(u, y) du \right].$$

Nun leiten wir partiell nach  $x$  ab (auch hier im Sinn von SCHWARTZ):

$$K_x^*(x, y) = f'(x) \frac{K^*}{f(x)} + f(x) g(x) K^*(x, y) = K^*(x, y) \left( \frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) g(x) \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln K^*(x, y) = \frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) g(x),$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln K^*(x, y) = \frac{g'(y)}{g(y)} + f(y) g(y).$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass das Integral hier nach der untern Grenze abgeleitet wird. Durch Integration erhält man

$$\ln K^*(x, y) = \ln f(x) g(y) + \int_y^x f(u) g(u) du. \quad (17)$$

h)  $K(x, y)$  könne im Dreieck  $0 \leq y \leq x < A$  durch die Potenzreihe

$$K(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j$$

dargestellt werden. Für  $K^*(x, y)$  setzen wir die Reihe

$$K^*(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} x^n y^m$$

an. Wir setzen diese in die Reziprozitätsformel

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} a_{nm} x^n y^m &= \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j + \int_y^x \sum_{i,j} b_{ij} x^i u^j \sum_{k,l} a_{kl} u^k y^l du \\ &= \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j + \sum_{i,j,k,l} b_{ij} a_{kl} \left( \frac{x^{i+j+k+1} y^l}{j+k+1} - \frac{x^i y^{l+j+k+1}}{j+k+1} \right) \end{aligned}$$

ein. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$a_{nm} - b_{nm} + \sum_{i,j=0,1,2,\dots,i+j \leq n-1} a_{n-i-j-1,m} b_{ij} \frac{1}{n-i} = \sum_{j,k=0,1,2,\dots,j+k \leq m-1} b_{nj} a_{k,m-j-k-1} \frac{1}{j+k+1}. \quad (18)$$

Die Koeffizienten können rekursiv berechnet werden. Insbesondere ist

$$a_n = a_{n0} = b_{n0} + \sum_{i,j} b_{ij} a_{n-i-j-1} \frac{1}{n-i} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, i+j \leq n-1). \quad (19)$$

Da wir nur  $K^*(x, 0)$  brauchen, führen wir den Konvergenzbeweis nur für  $\sum a_n x^n$  durch. Für jedes  $B < A$  konvergiert die Reihe für  $K(x, y)$  in  $x \leq B$  absolut und gleichmässig. Also gilt in diesem Bereich

$$L(x, y) = \sum_{i,j} |b_{ij}| x^i y^j \leq M.$$

Wenn wir in (19)  $b_{ij}$  durch  $|b_{ij}|$  ersetzen, erhalten wir statt der  $a_n$  Koeffizienten, die wir mit  $c_n$  bezeichnen. Es sind alle  $c_n \geq 0$ . Der Konvergenzradius von  $\sum c_n x^n$  sei  $\varrho$ . In  $0 \leq x < \varrho$  wird  $L^*(x, 0)$  durch diese Reihe dargestellt. Wir müssen zeigen, dass  $\varrho \geq B$  ist.

Wir wählen  $N$  so, dass

$$\sum_{i+j > N} |b_{ij}| B^i B^j < \varepsilon, \quad \varepsilon < \frac{1}{3B}$$

und setzen

$$C_n = \text{Max}(c_0, c_1 B, c_2 B^2, \dots, c_{n-1} B^{n-1})$$

und

$$\beta_n = \text{Max}(|b_{n0}| B^n, |b_{n+1,0}| B^{n+1}, |b_{n+2,0}| B^{n+2}, \dots).$$

Es ist

$$\begin{aligned} c_n B^n &= |b_{n0}| B^n + \sum_{i,j} |b_{ij}| B^{i+j} B^{n-i-j-1} c_{n-i-j-1} \frac{1}{n-i} \\ &\leq \beta_n + B C_n \sum_{i,j} |b_{ij}| B^{i+j} \frac{1}{n-i}. \end{aligned}$$

Wir zerlegen die Summe in  $i + j \leq N$  und  $i + j > N$ . Es sei  $n > N$ .

$$c_n B^n \leq \beta_n + C_n B \frac{1}{n - N} M + B C_n \varepsilon.$$

Wir wählen nun  $n$  so gross, dass

$$n - N \geq 3 B M \quad \text{und} \quad \beta_n < \frac{|b_{00}|}{3} \leq \frac{C_n}{3}.$$

Damit wird

$$c_n B^n \leq C_n.$$

Daraus folgt, dass die  $c_n B^n$  beschränkt sind. Also konvergiert die Reihe in  $x < B$ . Da dies für jedes  $B < A$  gilt, ist der Konvergenzradius mindestens  $A$ . Nun ist aber  $|a_n| \leq c_n$ , man hat also eine konvergente Majorante der Reihe  $K^*(x, 0) = \sum a_n x^n$ .

### § 6. Anwendungen

a) Die Sprunghöhe sei exponentiell verteilt, das heisst

$$G(y, x) = 1 - e^{-(x-y)k} \quad \text{für} \quad x \geq y$$

(vgl. § 11). Es ist somit

$$H(y, x) = e^{(y-x)k} \quad \text{für} \quad x \geq y, \quad H(y, x) = 0 \quad \text{für} \quad x < y; \quad a = a(x), \quad w = w(y).$$

$a$  und  $w$  sind beliebig. Dies bedeutet im Beispiel des Schlangestehens, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der Beamte arbeitet, und die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich jemand anschliesst, beliebig von der Länge der Schlange abhängen können. Es ist

$$K(x, y) = \frac{e^{-kx}}{a(x)} e^{ky} w(y) = f(x) g(y) \quad \text{für} \quad x \geq y.$$

Somit erhält man nach § 5 g)

$$\ln K^*(x, y) = k(y - x) - \ln w(y) - \ln a(x) + \int_y^x \frac{w(u)}{a(u)} du$$

und damit insbesondere

$$K^*(x, 0) = \frac{w(0)}{a(x)} e^{-kx} e^{\int_0^x \frac{w(u)}{a(u)} du}. \quad (20)$$

b) Beschränkung der Variablen. Bei Reservoiren wird  $\dot{x} = -\infty$  für  $x \geq A$ , und somit  $K = 0$ . Aus § 5 e) ist ersichtlich, dass  $K^*(x, 0) = 0$  für  $x \geq A$ , während für  $x < A$   $K^*$  nicht von  $A$  abhängt. Aus Gleichung (9) ist leicht der Einfluss auf  $F(x)$  abzulesen, der von einer Veränderung von  $A$  herrührt: die Verteilung wird in  $A$  abgeschnitten (truncated) und neu normiert.

$K = 0$  für  $y \geq A$  kann im Schlangenproblem auftreten, wenn zum Beispiel ein Arzt keine neuen Anmeldungen entgegennimmt, falls er mit Arbeit überlastet ist. Wenn also  $y \geq A$  ist, so wird  $w = 0$ .

c) Ein von BLANC-LAPIERRE und FORTET [1], Seite 31, angegebenes Beispiel (Ausfluss von Wasser aus einem Gefäß, das unten eine Öffnung hat und tropfenweise aufgefüllt wird). Hier ist  $a(x) = 1/\sqrt{x}$ . Wenn die Verteilung der Tropfengröße (also der Sprunghöhe) exponentiell ist, so wird nach dem obigen, mit  $w = 1$

$$K^*(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-kx} e^{\int_0^x 1/\sqrt{u} du} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-kx + 2\sqrt{x}}. \quad (21)$$

Das zur Normierung notwendige Integral kann durch die Substitution  $v = \sqrt{x}$  auf ein Fehlerintegral zurückgeführt werden.

Wenn die Sprunghöhe konstant  $= c$  ist, so wird  $K(x, y) = w(y)/\sqrt{x}$  im Halbstreifen  $0 \leq x - y < c$ ,  $y \geq 0$ , sonst 0. Mit einer ähnlichen Methode wie in § 5 e) kann  $K^*(x, y)$  sukzessive in  $0 \leq x - y < c$ ,  $c \leq x - y < 2c$ , ... berechnet werden. Die Rechnungen werden jedoch bald umständlich.

Wenn die Sprunghöhe klein ist im Verhältnis zum mittleren Wasserstand, so kann  $\dot{x}$  näherungsweise linearisiert werden. Falls ausserdem  $w$  in bezug auf  $y$  linearisiert werden darf und  $G$  nur von  $x - y$  und  $t$  abhängt, so lässt sich die Lösung auch im nichtstationären Fall mit der Methode des § 8 berechnen.

d) Ein Beispiel, wie die Methode von § 5 e) weitergeführt werden kann. Die Sprunghöhe sei konstant  $= 1$ ,  $a$  und  $w$  seien konstant. Wir setzen  $w/a = c$ . Somit wird,  $0 \leq y \leq x$  stillschweigend vorausgesetzt,

$$K(x, y) = c \quad \text{in} \quad 0 \leq x - y < 1, \quad K(x, y) = 0 \quad \text{in} \quad 1 \leq x - y. \quad (22)$$

In  $0 \leq x < 1$  ist

$$K^*(x, y) = c e^{c(x-y)}.$$

In  $1 \leq x < 2$  wird

$$g_0(x) = N(x, 0) + \int_0^1 N(x, u) L^*(u, 0) du = 0 + \int_{x-1}^1 c c e^{cu} du = c e^c - c e^{c(x-1)}.$$

Wegen  $K = K(x - y)$  ist in  $1 \leq u \leq x < 2$

$$M^*(x, u) = K^*(x - u) = c e^{c(x-u)}.$$

Setzt man dies in (14) ein, so erhält man durch Integration

$$K^*(x, 0) = e^{c(x-1)} (c e^c + c^2 - c - c^2 x).$$

Dieses Resultat legt den Ansatz nahe

$$K_n^*(x, 0) = P_n(z) e^{cz}, \quad z = x - n.$$

Der Index von  $K^*$  gibt an, dass die Formel für  $n \leq x$  und  $n+1$  gilt.  $P_n$  ist ein Polynom  $n$ -ten Grades. Wir verifizieren die Gleichung durch die Reziprozitätsformel. Für  $n \geq 1$  ist

$$\begin{aligned} K^*(x, 0) &= K(x, 0) + \int_0^{x-1} 0 K^* du + \int_{x-1}^n c K^*(u, 0) du + \int_n^x c K^*(u, 0) du \\ &= 0 + 0 + \int_z^1 c P_{n-1}(u) e^{cu} du + \int_0^z c P_n(u) e^{cu} du. \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$e^{cz} R_n(z) = \int_0^z P_n(u) e^{cu} du,$$

also

$$P_n(z) = c R_n(z) - R'_n(z).$$

Damit wird

$$P_n(z) e^{cz} = c R_{n-1}(1) e^c - c R_{n-1}(z) e^{cz} + c R_n(z) e^{cz} - c R_n(0).$$

Die Glieder mit  $e^{cz}$  ergeben

$$P_n(z) = c R_n(z) - c R_{n-1}(z).$$

Wenn wir noch den Zusammenhang von  $P$ ,  $R$  und  $R'$  berücksichtigen:

$$R'_n(z) = -c R_{n-1}(z).$$

Der Vergleich der Konstanten ergibt

$$R_n(0) = e^c R_{n-1}(1).$$

so erhält man rekursiv

$$\left. \begin{aligned} R'_1(z) &= -cz + e^c \\ P_1(z) &= -c^2 z + c e^c - c, \\ R'_2(z) &= \frac{c^2}{2} z^2 - c e^c z - c e^c + e^{2c} \\ P_2(z) &= \frac{c^3}{2} z^2 - c^2 z (e^c - 1) + c e^{2c} - (c + c^2) e^c, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

auf diese Art kann  $K^*$  etappenweise berechnet werden.

e) In gewissen Fällen ist auch die Kombination von § 5 d) und e) vorteilhaft. So könnte im vorigen Beispiel, da  $K = K(x - y)$  ist, die Laplace-Transformation gebraucht werden. Bereits durch  $M(0) = c$  erhält man nach (13) die Normierung

$$\int_0^{\infty} K^*(x, 0) dx = \frac{c}{1 - c}, \quad F(0) = \frac{1}{1 + [c/(1 - c)]} = 1 - c.$$

Kombiniert man die Methoden, so erhält man schrittweise die exakte Dichtefunktion  $f(x)$ .

Der Vorteil der Laplace-Transformation liegt darin, dass die Normierung und die Momente leicht exakt erhalten werden. Mit der Methode von § 5 e) erhält man die Normierung – wenn  $x$  nicht beschränkt ist – erst asymptotisch, dafür die (allerdings noch nicht normierte) Dichtefunktion exakt. Der Hauptvorteil liegt jedoch darin, dass sie auch für den Fall gilt, wo  $K$  nicht Funktion von  $x - y$  ist. Dies kommt besonders zur Geltung, falls  $a(x)$  sprunghaft variiert. Dies tritt ein, wenn in einem Kraftwerk die Anzahl der in Betrieb gesetzten Turbinen vom Wasserstand des Stausees abhängt. Auch bei einem Schalter kann dies vorkommen: ein Beamter bedient, wenn die Schlange kurz zwei, wenn sie lang ist.

### 3. Kapitel: Lösung durch die Laplace-Transformation

#### § 7. Herleitung der Differentialgleichung

Wir üben auf (3) die zweiseitige Laplace-Transformation aus.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( f \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) e^{sx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dx \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t) H(y, x, t) dF(y, t). \quad (24)$$

$w$ ,  $H$  und die Lösung  $F$  seien so, dass in einem Bereich  $B$  der  $s$ -Ebene die verwendeten Integrale existieren. Nun setzen wir voraus, dass  $H$  eine Funktion von  $x - y$  und  $t$  ist, dass also die Höhen der Sprünge nicht davon abhängen, wo wo aus dieselben erfolgen. Denn unter dieser Voraussetzung erhält man recht eine Faltung. Nicht angegebene Integrationsgrenzen sind in diesem Kapitel (ausser § 11)  $-\infty$  und  $+\infty$ . Die rechte Seite von (24) wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\iint H(x - y, t) e^{s(x-y)} e^{sy} w(y, t) dF(y, t) dx = \int H(z, t) e^{sz} dz \int w(y, t) e^{sy} dF(y, t).$$

Damit wir die Transformation der Produkte bilden können, setzen wir zunächst voraus, dass

$$-\dot{x}(x, t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) x^k, \quad w(y, t) = \sum_{k=0}^N p_k(t) y^k. \quad (25)$$



Wir definieren nun

$$M(s, t) = \int e^{sx} f(x, t) dx, \quad h(s, t) = \int e^{sx} dH(x, t), \quad (26)$$

und setzen voraus, dass in einem Teilbereich  $B'$  von  $B$  für alle  $t$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{sx} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{sx} H(x) = 0. \quad (27)$$

Somit erhält man durch partielle Integration

$$\int e^{sx} F(x) dx = -\frac{1}{s} M(s), \quad \int e^{sx} H(x) dx = -\frac{1}{s} h(s).$$

$\dot{M}$  bedeute die partielle Ableitung von  $M$  nach  $t$ ,  $M^{(n)}$  die  $n$ -te nach  $s$ . So ist

$$M^{(n)}(s, t) = \int x^n e^{sx} f(x, t) dx.$$

Damit erhält man die Gleichung

$$-\sum a_n M^{(n)}(s) - \frac{1}{s} \dot{M} = \frac{h}{s} \sum p_n M^{(n)}$$

oder

$$\sum_{n=0}^N M^{(n)}(s, t) [a_n(t) s + p_n(t) h(s, t)] + \dot{M}(s, t) = 0. \quad (28)$$

Man hat also hier eine partielle Differentialgleichung  $N$ -ter Ordnung für  $M$  mit der Anfangsbedingung, dass  $M(s, 0)$  die Laplace-Transformierte von  $f(x, 0)$  ist.

### § 8. Lösung der Gleichungen erster Ordnung

Im Fall  $N = 1$  setzen wir  $\dot{x}(x, t) = a(t) + b(t)x$  und  $w(y, t) = p(t) + q(t)y$ . Somit lautet die Differentialgleichung

$$[a(t)s + p(t)h(s, t)]M + [b(t)s + q(t)h(s, t)]M' + \dot{M} = 0. \quad (29)$$

Für  $K = \ln M$ , die erzeugende Funktion der Kumulanten (Semiinvarianten), lautet die Gleichung

$$(as + ph) + (bs + qh)K' + \dot{K} = 0. \quad (30)$$

Wir führen statt  $s$  eine neue Variable  $u = u(s, t)$  ein. Es ist

$$dK - \frac{\partial K}{\partial u} du + \frac{\partial K}{\partial t} dt = \frac{\partial K}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial s} ds \right) + \frac{\partial K}{\partial t} dt,$$

$$\left( \frac{\partial K}{\partial t} \right)_s = \frac{\partial K}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \dot{K}}{\partial t}, \quad \left( \frac{\partial K}{\partial s} \right)_t = \frac{\partial K}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}.$$

In die Gleichung für  $K$  eingesetzt

$$(a s + p h) + \frac{\partial K}{\partial u} \left( b s + q h \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t} = 0.$$

Der Faktor von  $\partial K / \partial u$  kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn für  $u = \text{const}$  die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = b s + q h \quad (31)$$

benützt werden. Man erhält somit mit  $s = s(u, t)$  und  $u = s$  für  $t = 0$

$$K(s(u, T), T) = - \int_0^T [a s(u, t) + p h(s(u, t), t)] dt + K(u, 0). \quad (32)$$

Die Integration ist längs  $u = \text{const}$  auszuführen. Am Schluss ist die Koordinatentransformation von  $s$  nach  $u$  wieder rückgängig zu machen.

Zunächst einige Spezialfälle.

a) Wenn  $q$  für alle  $t$  verschwindet,  $w$  also nicht von  $y$  abhängt, so ist die Koordinatentransformation von  $h$ , und damit von  $G$  unabhängig. Man erhält

$$\frac{ds}{dt} = b(t) s, \quad s = u e^{\int_0^t b(\tau) d\tau}.$$

Wir setzen

$$S = u e^{\int_0^T b(\tau) d\tau}, \quad \text{also} \quad s = S e^{-\int_0^T b(\tau) d\tau}.$$

Somit erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} K(S, T) = & - \int_0^T p(t) h \left( S e^{-\int_0^T b(\tau) d\tau}, t \right) dt \\ & - \int_0^T a(t) S e^{-\int_0^T b(\tau) d\tau} dt + K \left( S e^{-\int_0^T b(\tau) d\tau}, 0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$= K_1 + K_2 + K_3.$$

$K$  ist eine Summe von erzeugenden Funktionen von Kumulanten. Also ist  $F(x, t)$  eine Faltung von drei unabhängigen Verteilungen.

$K_1$  hängt von  $S, T, b, p$  und  $h$ , aber nicht von  $a$  und  $F(x, 0)$  ab.

$K_2$  hängt von  $S, T, a$  und  $b$ , aber nicht von  $p, h$  und  $F(x, 0)$  ab.

$K_3$  hängt von  $S, T, b$  und  $F(x, 0)$ , aber nicht von  $a, p$  und  $h$  ab.

Wenn wir  $p = 0$  setzen, so bleiben  $K_2$  und  $K_3$  ungeändert. Diese Funktionen geben also nur an, wie die Anfangsverteilung längs den Lösungen der Differentialgleichung (1) geführt wird. Der Einfluss der Sprünge wird durch  $K_1$  dargestellt (vgl. LÉVY [7], § 12,1<sup>0</sup>).

b) Die Differentialgleichung (31) lässt sich auch noch leicht lösen, wenn  $b, q$  und  $h$  nicht von  $t$  abhängen. In diesem Fall kann die Gleichung separiert werden.

$$\frac{ds}{b s + q h} = dt, \quad \int \frac{ds}{b s + q h} = t + u. \quad (34)$$

Durch Umkehrung dieser Gleichung erhält man  $s(u, t)$ . Dies setzt man in (32) ein, integriert und drückt dann wieder  $u$  durch  $s$  und  $t$  aus.

c) Die äusseren Bedingungen seien konstant. Wenn eine stationäre Verteilung existiert, so ist  $\dot{K} = 0$ , und man erhält

$$K'(s) = -\frac{a s + p h}{b s + q h}. \quad (35)$$

Bei der Lösung tritt eine Integrationskonstante auf. Diese kann nicht aus der Anfangsbedingung erhalten werden, wie bei der Lösung der partiellen Differentialgleichung, da  $F(x, 0)$  im stationären Fall nicht bekannt ist. Da aber  $K$  die erzeugende Funktion der Kumulanten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss  $K(0) = 0$  sein. Somit wird

$$K(s) = -\int_0^s \frac{a z + p h(z)}{b z + q h(z)} dz. \quad (36)$$

Nun zurück zum allgemeinen Fall. Wir lösen das Problem ohne den Umweg über die Variablentransformation mit Hilfe der Taylor-Reihen in bezug auf  $s$ . Wir bilden

$$\left. \begin{aligned} (a s + p h) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) s^n, & (b s + q h) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) s^n, \\ M(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} m_n(t) s^n, & K(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t) s^n. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$n! m_n (= M_n)$  ist das  $n$ -te Moment von  $F(x, t)$ , insbesondere ist also  $m_0 = 1$ .  $n! k_n$  sind die entsprechenden Semiinvarianten (Kumulanten). Da  $H$  die Differenz der Verteilungen  $E$  und  $G$  ist, wird

$$h(0) = 0, \quad n! h^{(n)}(0) = -n\text{-tes Moment von } G.$$

Also

$$A_0 = 0, \quad A_1 = a - p \cdot \text{mittlere Sprunghöhe,}$$

$$n! A_n = -p \cdot n\text{-tes Moment der Sprunghöhenverteilung } G.$$

Analog mit den  $B_n$ . Man kann diese in (29) einsetzen und erhält sukzessive lineare, inhomogene Differentialgleichungen für die Momente  $m_1(t), m_2(t), \dots$ . Da in (30)  $(a s + p h)$  als Summand und nicht als Faktor auftritt, werden die Differentialgleichungen für die Kumulanten etwas einfacher. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$A_n(t) + \sum_{i=0}^n \dot{B}_{n-i}(t) k_{i+1} (i+1) + \dot{k}_n = 0. \quad (38)$$

$n = 1$  ergibt die Gleichung

$$\dot{k}_1 + k_1 B_1 + A_1 = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für  $k_1(t)$ .  $n = 2$  gibt

$$\dot{k}_2 + 2 k_2 B_1 + (k_1 B_2 + A_2) = 0.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nach dem vorigen bekannt. Somit kann auch  $k_2(t)$  berechnet werden. Solange die Momente von  $G$  existieren, erhält man lineare Differentialgleichungen für  $k_1, k_2, k_3, \dots$ . Die Anfangswerte  $k_n(t)$  sind durch die Semiinvarianten von  $F(x, 0)$  gegeben.

### § 9. Die Gleichungen höherer Ordnung im stationären Fall

Wir betrachten zunächst den Fall  $N = 2$  von (28). Es sei

$$w(y) = p + q y + r y^2, \quad -\dot{x}(x) = a + b x + c x^2.$$

Somit erhält man im stationären Fall

$$M''(c s + r h) + M'(b s + q h) + M(a s + p h) = 0. \quad (39)$$

In der Lösung treten zwei Integrationskonstanten auf. Diese müssen so gewählt werden, dass  $M$  die Laplace-Transformierte einer Verteilung ist. Die Bedingung  $M(0) = 1$  liefert sofort eine der Konstanten, die ausdrückt, dass die gesamte Wahrscheinlichkeit  $= 1$  ist. Die andere muss zum Ausdruck bringen, dass die Dichtefunktion  $f(x) \geq 0$  ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen, dass  $M(i s)$  eine charakteristische Funktion ist, sind bekannt. Diejenigen, welche sich auf globale Eigenschaften beziehen, können nur dann ohne weiteres angewandt werden, wenn (39) geschlossen integriert werden kann. Im Falle, dass die Differentialgleichung durch eine MacLaurin-Reihe integriert wird, lassen sich diese Kriterien nicht gut anwenden. Hingegen können unter dieser Annahme wenigstens Ungleichungen für die Koeffizienten dieser Reihe hergeleitet werden.

Wir benützen wieder den Ansatz (37) und die analoge Gleichung

$$c s + r h = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n.$$

Wir führen dies in (39) ein und setzen den Koeffizienten von  $s^n = 0$ :

$$\sum_{i=0}^n [(i+2)(i+1)m_{i+2}C_{n-i} + (i+1)m_{i+1}B_{n-i} + m_i A_{n-i}] = 0. \quad (40)$$

Dabei ist  $m_0 = 1$ , während  $m_1 = m$  noch bestimmt werden muss. Wir gewinnen Ungleichungen für  $m$ , wenn wir diejenigen für die absoluten Momente (siehe zum Beispiel CRAMÉR [2], Seite 176) benützen. Wenn wir folgern können, dass  $x$  sicher nicht negativ ist, so stimmen die gewöhnlichen Momente mit den absoluten überein. Es muss also, wenn

$$M_n = n! m_n$$

die Momente von  $F(x)$  sind, gelten

$$M_n^2 \leq M_{n+1} M_{n-1}. \quad (41)$$

Diese Ungleichung ist schärfer als die öfters gebrauchte

$$M_n^{1/n} \leq M_{n+1}^{1/(n+1)}$$

und führt in unserm Fall überdies auf einfachere Rechnungen. Beispiel:

$$w(y) = 2 + y, \quad -\dot{x} = x^2, \quad \text{also} \quad x(t) = \frac{1}{t - t_0}.$$

Wenn alle Sprünge die Höhe 1 haben, ist

$$-h = s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots$$

Man erhält also aus (39),

$$s M'' + (2M + M')h = 0,$$

$$M'' = - (2M + M') \frac{h}{s},$$

$$M_2 + M_3 s + M_4 \frac{s^2}{2} + \dots = \left( 2 + m + (2m + M_2)s + (2M_2 + M_3) \frac{s^2}{2} + \dots \right) \times \left( 1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} \dots \right),$$

$$M_2 = 2 + m,$$

$$M_3 = 2m + M_2 + 1 + \frac{m}{2} = \frac{7}{2}m + 3,$$

$$M_4 = \frac{2}{3} + \frac{m}{3} + 2m + M_2 + 2M_2 + M_3 = 9\frac{2}{3} + 8\frac{5}{6}m,$$

.....

Nun bilden wir die Ungleichungen

$$M_2 - m^2 = 2 + m - m^2 \geq 0 \quad (m \leq 2),$$

$$M_3 m - M_2^2 - \frac{7}{2} m^2 + 3 m - 4 - 4 m - m^2 \geq 0,$$

$$5 m^2 - 2 m - 8 \geq 0 \quad (m \geq 1,48).$$

$M_4 M_2 - M_3^2 \geq 0$  und  $M_5 M_3 - M_4^2 \geq 0$  geben keine Verschärfung der Ungleichungen für  $m$ , hingegen eine Relation zwischen den absoluten Zentralmomenten:  $\mu_4 \geq \sigma^4$ . Allerdings ist dies eine Gleichung vierten Grades in  $m$ .

$$\mu_4 - \sigma^4 = M_4 - 4 m M_3 + 6 m^2 M_2 - 3 m^4 - (2 + m - m^2)^2 \geq 0,$$

$$5 \frac{2}{3} - 7 \frac{1}{6} m + m^2 + 8 m^3 - 4 m^4 \geq 0 \quad (m \leq 1,83),$$

also  $1,48 \leq m \leq 1,83$ .

Wenn  $h$  rational ist, so werden nach Multiplikation mit dem Nenner die Klammern in (39) Polynome in  $s$ . Man erhält so eine Rekursionsformel für die Momente  $M_n$ .

Beispiel. Die Sprunghöhe sei exponentiell verteilt. Also ist  $H = e^{-kx}$  für  $x \geq 0$ , und es wird

$$-\frac{1}{s} h(s) = \int_0^{\infty} e^{(s-k)x} dx = \frac{-1}{s-k},$$

$$h(s) = \frac{s}{s-k}. \quad (42)$$

Wir dividieren (39) durch  $h$  und erhalten

$$M''(cs - ck + r) + M'(bs - bk + q) + M(as - ak + p) = 0.$$

Auf die Integration dieser Gleichung durch die Methode von LAPLACE kommen wir in § 11 zurück. Hier verwenden wir die Momente. Wir leiten  $n$ -mal ab und setzen  $s = 0$ .

$$M_{n+2}(r - ck) + M_{n+1}(q - bk + cn) + M_n(p - ak + bn) + M_{n-1}an = 0.$$

Es sei nun

$$k = 1, \quad -\dot{x} = 5x + x^2, \quad w(y) = 10 + y.$$



Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} M_{n+2} &= M_{n+1} (n - 4) + M_n (5 n + 10) , \\ M_0 &= 1 , \\ M_1 &= m , \\ M_2 &= 10 - 4 m , \\ M_3 &= -30 + 27 m , \\ M_4 &= 260 - 134 m , \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Da hier  $x \geq 0$  ist, können wir (41) anwenden.

$$\begin{aligned} n = 1: \qquad & 10 - 4 m - m^2 \geq 0 \quad (m \leq 1,742) , \\ n = 2: \qquad & 11 m^2 + 50 m - 100 \geq 0 \quad (m \geq 1,503) , \\ n = 3: \qquad & 1700 - 760 m - 193 m^2 \geq 0 \quad (m \leq 1,593) . \end{aligned}$$

Die folgenden Ungleichungen ergeben

$$m \geq 1,544, \quad m \leq 1,578 \quad \text{und} \quad m \geq 1,547 ,$$

also

$$1,547 \leq m \leq 1,578 .$$

Die Ungleichung  $\mu_4 \geq \sigma^4$  liefert hier keine Verschärfung. Dass die Einschränkung von  $m$  hier viel besser ist als im ersten Beispiel, liegt daran, dass hier  $\dot{x}(x)$  weniger von einer Geraden abweicht als dort.

Anhand eines Beispiels wollen wir noch den Fall diskutieren, dass  $\dot{x}$  ein Polynom dritten Grades ist. Dies führt auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Wir beschränken uns wieder auf den stationären Fall. Das Problem wird mit der Momentenmethode behandelt. Es sei

$$-\dot{x} = 2 x - 2 x^2 + x^3 , \quad -h = \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} + \dots , \quad w = 1 .$$

Wir setzen dies in Gleichung (28) ein und erhalten

$$-M(s) \left( \frac{1}{2} + \frac{s}{6} + \dots \right) + 2 M'(s) - 2 M''(s) + M'''(s) = 0 .$$

Eine Integrationskonstante ist  $M(0) = 1$ , die beiden andern  $x = M'(0)$  und  $y = M''(0)$ , sind, wie  $m$  in den vorherigen Beispielen, noch unbekannt. Wir

bilden die Taylorentwicklung der obigen Gleichung und erhalten

$$\left. \begin{aligned} & - (1 + s x + \dots) \left( \frac{1}{2} + \frac{s}{6} + \dots \right) + 2 (x + s y + \dots) \\ & \quad - 2 (y + s M_3 + \dots) + (M_3 + s M_4 + \dots) = 0, \\ & - \frac{1}{2} + 2 x - 2 y + M_3 = 0, \quad M_3 = 2 y - 2 x + \frac{1}{2}, \\ & - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} + 2 y - 2 M_3 + M_4 = 0, \quad M_4 = 2 y - \frac{7}{2} x + \frac{7}{6}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Nun betrachten wir die Ungleichungen (41) für die Momente.

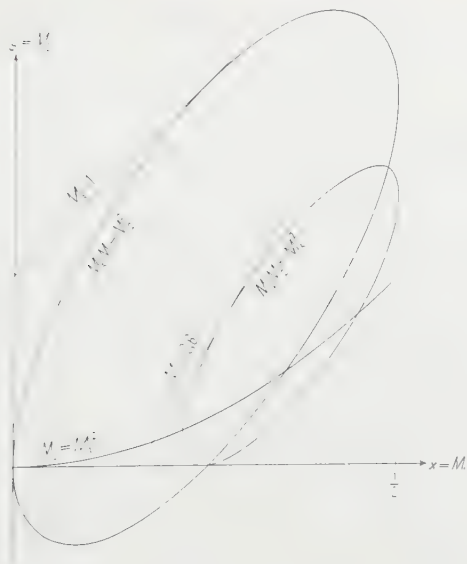
$$\left. \begin{aligned} & M_2 M_0 - M_1^2 \geq 0, \quad y - x^2 \geq 0, \\ & M_3 M_1 - M_2^2 \geq 0, \quad 2 x y - 2 x^2 + \frac{x}{2} - y^2 \geq 0, \\ & M_4 M_2 - M_3^2 \geq 0, \quad 2 y^2 - \frac{7}{2} x y + \frac{7}{6} y - \left( 2 y - 2 x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0, \\ & \quad - 2 y^2 - 4 x^2 + \frac{9}{2} x y - \frac{5}{6} y + 2 x - \frac{1}{4} \geq 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

In Figur 6 sind die Parabel und die beiden Ellipsen eingezeichnet. Bereitet man sich aus der Tatsache, dass die mittlere Sprunghöhe  $1/2$  ist, folgt, dass  $(x, y)$  in der grösseren Ellipse liegt. Man erhält die Ungleichung  $M_3 \leq 1$ , unabhängig von der Streuung  $\sigma_s^2$  der Sprungverteilung: diese braucht nicht einmal zu existieren. Analog folgt aus  $\sigma_s^2 = 2/6 - (1/2)^2$ , dass  $(x, y)$  in der kleineren Ellipse liegt und dass  $M_4 \leq 0,6$  ist. Auch dies gilt unabhängig von den höhern Momenten von  $G$ . Dass  $F$  mehr Momente als  $G$  hat, hängt mit dem Umstand zusammen, dass  $x(t)$  eine senkrechte Asymptote hat. Dadurch werden extrem grosse  $x$ -Werte rasch verkleinert.

Wenn noch mehr Momente von  $G$  bekannt sind, erhält man analog weitere Kegelschnitte. So wird das Gebiet, in dem  $(x, y)$  liegen kann, weiter verkleinert. Dieses schränkt sich jedoch im allgemeinen nicht auf einen Punkt zusammen. Dies rührt daher, dass die Ungleichungen (41) nicht hinreichend sind, damit  $M(s)$  die Laplace-Transformierte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Man kann die Beziehung noch verallgemeinern, indem man statt  $n$  ein beliebiges reelles  $z$  setzt. So erhält man

$$M_{z+\varepsilon} M_{z-\varepsilon} - M_z^2 \geq 0.$$

Der Beweis erfolgt genau gleich wie bei ganzen  $n$  (siehe CRAMÉR [2], Seite 176).



Figur 6  
Die durch Gleichung (44) dargestellten Kegelschnitte.

Auch diese Ungleichungen genügen nicht, dass die  $M_z$  die Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind. Wir zeigen dies durch ein Gegenbeispiel. Es sei

$$M(z) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq z < 2, \quad M(z) = 2^{(z-2)} \quad \text{für} \quad z \geq 2.$$

Wenn ein  $F$  mit diesen absoluten Momenten existiert, so ist insbesondere

$$\int dF(x) = 1, \quad \int |x| dF(x) = 1, \quad \int x^2 dF(x) = 1.$$

Die Verteilung von  $|x|$  hat die gewöhnlichen Momente  $M_0 = M_1 = M_2 = 1$ , und somit ist deren Streuung  $= 0$ , also  $|x| = 1$  mit  $W = 1$ . Dies steht aber im Widerspruch zu den angegebenen höhern absoluten Momenten.

§ 10. Partielle Gleichungen zweiter Ordnung

Im Fall

$$-\dot{x}(x, t) = a(t) + b(t) x + c(t) x^2, \quad w(y, t) = p(t) + q(t) y + r(t) y^2$$

erhält man nach (28) die partielle Differentialgleichung

$$M''(c s + r h) + M'(b s + q h) + M(a s + p h) + \dot{M} = 0.$$

Noch einen andern Fall können wir auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Es sei

$$w(y, t) = p(t) + q(t) y,$$

$\dot{x}$  sei aber kein Polynom, sondern von der Form

$$-\dot{x}(x, t) = a(t) - \frac{b(t)}{x}. \quad (45)$$

Während die vorherigen Probleme in diesem Kapitel dem Charakter des Beispiels d) von § 2 entsprechen, hat dieses den einer «Queue» (Schlange):  $\dot{x} = 0$  für ein festes  $x$  und annähernd konstant für grosse  $x$ .

Um in diesem Fall die Differentialgleichung zu erhalten, multiplizieren wir (3) mit  $x e^{sx}$  und integrieren von  $-\infty$  bis  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} & - \int f(a x - b) e^{sx} dx + \frac{\partial}{\partial t} \int x F(x) e^{sx} dx \\ & = - \int dx \int (\dot{p} + q y) x H(x - y) e^{sx} f(y) dy \\ & = - \iint (\dot{p} + q y) e^{s(x-y)} e^{sy} ((x - y) + y) H(x - y) f(y) dy dx. \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} & -a M' + b M + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{-1}{s} M \right)' \\ & = -\dot{p} \left( \frac{-1}{s} h \right)' M - p \frac{-1}{s} h M' - q \left( \frac{-1}{s} h \right)' M' - q \frac{-1}{s} h M'' \end{aligned}$$

Wenn wir noch mit  $s$  multiplizieren und zusammenfassen

$$\left. \begin{aligned} & \dot{M}' + q h M'' + \left[ a s + \dot{p} h + \left( h' - \frac{h}{s} \right) q \right] M' \\ & - \frac{1}{s} \dot{M} + \left[ p \left( h' - \frac{h}{s} \right) - b s \right] M = 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Im stationären Fall lässt sich diese Gleichung nach der Methode von § 9 lösen. Im allgemeinen jedoch ist dies auch bei einfachen Verteilungen  $G$  eine schwierige Differentialgleichung.

### § 11. Stationärer Zustand bei exponentiell verteilter Sprunghöhe

Es sei

$$G(x) = 1 - e^{-kx} \quad \text{für } x \geq 0, \quad G(x) = 0 \quad \text{für } x < 0.$$

Damit wird nach (42)

$$h(s) = \frac{s}{s - k}.$$

Wir setzen dies in (28) ein und dividieren durch  $h$ . Im stationären Fall erhält man somit

$$\sum_{n=0}^N M^{(n)}(s) (a_n s - a_n k + p_n) = 0. \quad (47)$$

Dies ist eine Laplacesche Differentialgleichung. Sie wird gelöst durch den Ansatz

$$M(s) = \int e^{sx} f(x) dx. \quad (48)$$

Dabei sind  $f(x)$  und die Integrationsgrenzen geeignet zu wählen. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\int s^{sx} s \sum a_n x^n f(x) dx + \int e^{sx} \sum (p_n - k a_n) x^n f(x) dx = 0.$$

Die Summen sind die Polynome  $-\dot{x}(x)$  und  $w(x) - k \dot{x}(x)$ . Das erste Integral wird nun partiell umgeformt.

$$-\int e^{sx} s \dot{x} f(x) dx = -e^{sx} \dot{x} f(x) \Big| + \int e^{sx} (\dot{x} f(x))' dx.$$

Somit erhalten wir

$$-e^{sx} \dot{x} f(x) \Big| + \int e^{sx} [(\dot{x} f(x))' + (w + k \dot{x}) f(x)] dx = 0. \quad (49)$$

Wir wählen nun  $f(x)$  so, dass die eckige Klammer verschwindet:

$$\dot{x} f'(x) + f(x) (\dot{x}' + w + k \dot{x}) = 0.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\dot{x}'}{\dot{x}} - \frac{w + k \dot{x}}{\dot{x}},$$

$$f(x) = \frac{c}{-\dot{x}} e^{-\int_{x_0}^x (k + w(u)/\dot{x}(u)) du}. \quad (50)$$

Nun werden die Integrationsgrenzen von (48) [nicht die im Exponenten von (50)] so bestimmt, dass  $e^{sx} \dot{x} f(x)$  in diesen verschwindet. Also muss in den Grenzen  $X$  gelten

$$\dot{x}(X) f(X) = c e^{-\int_{x_0}^X (k + w(u)/\dot{x}(u)) du} = 0. \quad (51)$$

Die Gleichung gelte in  $X (\geq -\infty)$  und in  $+\infty$ , aber nicht im Intervall  $X < x < \infty$ . So ist (47) erfüllt durch (48) und (50). Die Integrationskonstante wird durch  $M(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  erhalten. Da  $M(s)$  die Laplace-Transformierte der Verteilung ist, haben wir mit  $f(x)$  direkt die gesuchte Wahrschein-

lichkeitsdichte gefunden. Der Umweg über die Laplace-Transformation konnte also mit der Gleichung (50) abgeschnitten werden.

Bemerkenswert ist, dass in der Formel (50) gar nicht zum Ausdruck kommt, dass  $w$  und  $\dot{x}$  Polynome in  $x$  sind. Wir lassen nun beliebige Funktionen zu. Wir bilden  $f(x)$  nach (50) und müssen prüfen, ob durch diesen Ansatz Gleichung (3) erfüllt ist. Es ist also zu zeigen, dass

$$f(x) \dot{x} = - \int_{\dot{x}}^x w(y) e^{(y-x)k} f(y) dy.$$

Die linke Seite ist

$$f(x) \dot{x} = c e^{-\int_{x_0}^x k + w/\dot{x} du}.$$

Rechts erhalten wir

$$\begin{aligned} - \int_{\dot{x}}^x w(y) e^{(y-x)k} f(y) dy &= - \int_{\dot{x}}^x w(y) e^{(y-x)k} \frac{c}{\dot{x}(y)} e^{-\int_{x_0}^y k + w/\dot{x} du} dy \\ &= - c \int_{\dot{x}}^x e^{(y-x)k} e^{(x_0-y)k} \frac{w(y)}{\dot{x}(y)} e^{-\int_{x_0}^y w/\dot{x} du} dy \\ &= - c e^{(x_0-x)k} \int_{\dot{x}}^x \frac{d}{dy} - e^{-\int_{x_0}^y w/\dot{x} du} dy \\ &= c e^{(x_0-x)k} e^{-\int_{x_0}^x w/\dot{x} du} \Big|_{\dot{x}}^x. \end{aligned}$$

Wegen (51) verschwindet der Ausdruck an der untern Grenze. Somit stimmen die beiden Seiten der Gleichung überein.

Da alle Sprünge positiv sind, kann  $x$  nicht kleiner als  $z$  werden, falls  $\dot{x}(z) \geq 0$ . Eine Untermenge von  $x < z$  könnte zwar ergodische Klasse sein (siehe DOOB [3]). Da aber beliebig hohe Sprünge möglich sind, ist dies (ausser  $x = -\infty$ ) nicht möglich, wenn darin  $w = 0$ . Sonst ist im stationären Fall  $x \geq z$ .

Ferner beachten wir, dass (50) mit (20) übereinstimmt bis auf die untere Grenze des Integrals und die damit zusammenhängende Normierung. In (20) ist die Grenze 0, also die untere Schranke der  $x$ -Werte. In (50) würde nach (51) das Integral mit  $X$  als unterer Grenze divergieren. Deshalb wählten wir eine andere:  $x_0$ .

Die Divergenz des Integrals

$$\int_{\dot{x}}^X \frac{w}{\dot{x}} dx = \int \frac{w}{dx/dt} dx = \int w dt = \infty$$



bedeutet, dass mit  $W = 1$   $x > X$  bleibt, während nach (9)  $x = 0$  mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen wird. Die Lösungen (20) und (50) unterscheiden sich also durch die Verhältnisse an der untern Grenze.

Wenn  $\dot{x}$  und  $w$  in  $x_1$  verschwinden, so bleibt der Prozess in  $x_1$  konstant, sobald dieser Punkt erreicht ist. Wenn

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{w}{x} dx = \int w dt$$

konvergiert, so geschieht dies mit positiver Wahrscheinlichkeit;  $x_1$  ist in diesem Fall absorbierende Schranke.

#### 4. Kapitel: Diverses

##### § 12. Ansatz für den mehrdimensionalen Fall

$\vec{x}$  ist ein Vektor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Die entsprechende Differentialgleichung lautet

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}(\vec{x}, t)$$

oder, skalar geschrieben,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dies umfasst auch den Fall einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Wenn diese skalar ist, so setzen wir

$$\dot{x} = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}) ,$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad \text{für } i < n, \quad \dot{x}_n = \dot{x}_n(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) .$$

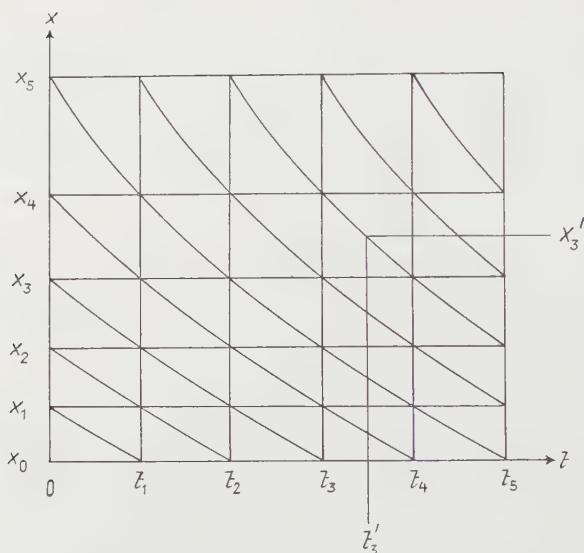
Auch die Anfangsverteilung, die Dichte der Sprünge und die Verteilung nach diesen sind Funktionen mehrerer Variablen:

$$F(\vec{x}, t), \quad w(\vec{y}, t), \quad G(\vec{y}, \vec{x}, t) .$$

Formal ändert sich bei der Ableitung der Hauptformel (3) nichts.

##### § 13. Berechnung von Näherungen

Auch im nichtstationären Fall lässt sich  $f(x, t)$  näherungsweise nach der folgenden Methode berechnen. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass  $\dot{x}$  nicht von  $t$  abhängt.  $x = 0$  sei untere Grenze. Wir teilen die Zeit in gleiche Intervalle  $\Delta t$ . Dann werden die in den Momenten  $t_i = i \Delta t$  null werdenden Lösungen der Differentialgleichung (1) eingetragen (siehe Figur 7). Durch diese und die Senkrechten  $t = t_i$  erhält man ein Netz von Schnittpunkten, und



Figur 7

damit die Ordinaten  $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Wir setzen  $t'_i = t_i + \Delta t/2$  und

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_{n,i} &= F(x_n, t_i) - F(x_{n-1}, t_i), \\ \Delta G_{k,n,i} &= G(x_k, x'_n, t'_i) - G(x_k, x'_{n-1}, t'_i) \end{aligned} \right\} n, k \geq 1.$$

(Für die Definition von  $x'_n$  siehe Figur 7.)

So wird

$$\begin{aligned} F(0, t_{i+1}) &= [1 - w(0, t'_i) \Delta t] F(x_1, t_i) + F(x_1, t_i) w(0, t'_i) \Delta t G(0, x'_0, t'_i) \\ &\quad + \sum_k \Delta F_{k+1,i} w(x_k, t'_i) \Delta t G(x_k, x'_0, t'_i), \\ \Delta F_{n,i+1} &= [1 - w(x_n, t'_i) \Delta t] \Delta F_{n+1,i} + F(x_1, t_i) w(x_n, t'_i) \Delta t \Delta G_{0,n,i} \\ &\quad + \sum_k \Delta F_{k+1,i} w(x_k, t'_i) \Delta t \Delta G_{k,n,i}. \end{aligned}$$

So erhält man für diese  $\Delta F_{n,i+1}$  lineare Kombinationen der  $\Delta F_{k,i}$ , die sukzessive gelöst werden können (zum Beispiel mit Rechenautomaten).

Wenn  $x$  mit  $t$  variiert, so werden die  $x_i$  von  $t$  abhängig. Im übrigen verändern sich jedoch die Methode nicht. Statt  $w(x_k, t'_i)$  kann auch das Mittel von  $w$  im Viereck

$$(x_{k+1}, t'_i) (x_k, t'_i) (x_{k-1}, t_{i+1}) (x_k, t_{i+1})$$

genommen werden.

Wenn das Problem auf eine Integralgleichung gebracht werden kann, so lässt sich diese durch ein System linearer Gleichungen annähern. Da es sich um Volterra-Gleichungen handelt, weist die Matrix Dreiecksform auf. Das (zunächst noch nicht normierte)  $f(x)$  kann rekursiv erhalten werden. Diese Methode gibt weniger Rechenarbeit als die erste, ist aber nur für den stationären Fall brauchbar. Auch ist nicht ersichtlich, wie schnell sich die Anfangsverteilung der asymptotischen nähert.

#### § 14. Anmerkungen über Existenzsätze

Zunächst muss die Differentialgleichung (1) in jedem Punkt  $(x, t)$ , der vom Prozess angenommen werden kann, eine eindeutige Lösung haben. Dies hat wenigstens für wachsende  $t$  zu gelten; für abnehmende  $t$  ist die Bedingung bei den Problemen des 2. Kapitels in  $x = 0$  nicht erfüllt.

Nun wenden wir uns der Frage zu, ob das Hauptproblem eine eindeutige Lösung habe. Wenn  $x = x(c, t)$  die Lösungen von (1) sind, so können wir eine Koordinatentransformation durchführen mit  $t$  und der Integrationskonstanten  $c$  als neue Variable. Damit sind die einzigen Veränderungen von  $c$  die Sprünge. So ist das Problem auf den «absolut unstetigen Fall» von W. FELLER [4] zurückgeführt.

Aber auch wenn die Existenz einer Lösung bewiesen ist, braucht es keine stationäre zu geben. Im «Queue»-Problem mit  $-\dot{x} = a$  und  $w = \text{const}$  ist bewiesen worden (zum Beispiel LINDLEY [8]), dass eine stationäre Lösung existiert, wenn  $pG < a$  ist. In der Integralgleichung äussert sich dies darin,

dass  $\int_0^{\infty} K^*(x, 0) dx$  konvergiert. Dies ist nicht auf den Spezialfall  $p = \text{const}$  und  $a = \text{const}$  beschränkt. Denn falls dieses Integral konvergiert, so erhält man mit (9) ein  $F(x)$ , das die Integralgleichung und damit auch (3) befriedigt.

Analog ist es mit der Laplace-Transformation. Wenn wir eine stationäre oder variable Lösung der Differentialgleichung (28) gefunden haben, so ist die Umkehrung der Laplace-Transformation eine Lösung von (3). Wenn diese eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, so ist mit der Lösung des Problems auch deren Existenz bewiesen. Weiteres über Existenzsätze findet sich in BLANC-LAPIERRE und FORTET [1] und in DOOB [3].

Es ist meine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. W. SAXER, Zürich, sowie auch Herrn Prof. Dr. A. PFLUGER, Zürich, und Herrn D. V. LINDLEY, Lecturer, Cambridge, für die wohlwollende Unterstützung meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. BLANC-LAPIERRE und FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires* (Masson Cie., Paris 1953).
- [2] HARALD CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University Press 1946).

- [3] J. L. DOOB, *Stochastic Processes* (John Wiley and Sons, New York; Chapman and Hall, London 1953).
- [4] WILLY FELLER, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse* (Existenz- und Eindeutigkeitssätze), *Math. Ann.* 113, 113–160 (1936).
- [5] E. GOURSAT, *Détermination de la résolvante d'une classe d'équations intégrales*, *Bull. Sci. math.* 68, 114–150 (1933).
- [6] DAVID G. KENDALL, *Stochastic Processes in the Theory of Queues*, *Ann. Math. Statist.* 24, 338 (1953).
- [7] PAUL LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement Brownien* (Gauthier-Villars, Paris 1948).
- [8] D. V. LINDLEY, *Theory of Queues with a Single Server*, *Proc. Camb. phil. Soc.* 48, 277 (1952).
- [9] WERNER SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik* (Geest und Portig, Leipzig 1950).
- [10] LAURENT SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris 1950).

### Summary

Stochastic processes of the following type are considered. At random time points  $t$ , the variable  $x(t)$  jumps from  $y$  to  $x$ , say. The heights  $x - y$  of the jumps have a given distribution  $G^*(x - y)$  that may depend on  $y$  or  $t$ . Between the jumps,  $x(t)$  is a solution to a given differential equation  $dx/dt = \dot{x}(x, t)$ . We look for the distribution  $F(x, t)$  of  $x$  at time  $t > 0$ ,  $F(x, 0)$  being given. In the stationary case, stable distributions are investigated.

If there is a lower boundary  $x_0$  and if  $F(x_0) > 0$ , the problem is similar to the queueing problem. We solve it in the stationary case with integral equations of the Volterra type. Other problems can be transformed to differential equations for the moment generating functions. These equations are partial in the non-stationary and ordinary in the stationary case.

(Eingegangen: 16. September 1955.)

## Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in Gebieten mit stückweise rationalen Randkurven

VON WILHELM KLINGENBERG, Hamburg<sup>1)</sup>

Wir betrachten ein Polynom  $w(z)$  mit komplexen Koeffizienten. Für viele Anwendungen ist es nützlich, wenn man nach einem einfachen Verfahren die Anzahl der Nullstellen in gewissen Gebieten der komplexen Zahlenebene bestimmen kann, ohne die genaue Lage der Nullstellen berechnen zu müssen.

Falls das Gebiet eine Halbebene oder eine Kreisscheibe ist, so kennt man seit HERMITE, HURWITZ, ROUTH, FROBENIUS u. a.<sup>2)</sup> mehr oder weniger vollständige

<sup>1)</sup> Mathematisches Seminar der Universität, Institut für angewandte Mathematik.

<sup>2)</sup> Für ausführliche Literaturangaben verweisen wir auf: M. MARDEN, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable* (New York 1949).

dige Lösungen des vorliegenden Problems; ein für numerische Zwecke besonders geeignetes Verfahren gibt WIELANDT<sup>3)</sup> an. Von allgemeineren Gebieten der komplexen Ebene scheint bisher nur der Winkelraum oder das Kreisbogenstück in einer Arbeit von SHERMAN<sup>4)</sup> behandelt zu sein.

Wir wollen in dieser Note zeigen (vgl. Satz 2 in Abschnitt 5 und die Ergänzung in Abschnitt 6), dass man auch für eine bedeutend allgemeinere Klasse von Gebieten die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem solchen Gebiet in endlich vielen Schritten durch rationale Operationen und Grössenvergleichung bestimmen kann; für den Spezialfall des Winkelraums und der Halbebene werden wir dabei auf das Verfahren von SHERMAN bzw. WIELANDT geführt. Und zwar brauchen wir bei unserem Verfahren von dem Gebiet nur vorauszusetzen, dass es einfach zusammenhängend ist und dass sein Rand sich aus endlich vielen Stücken von rationalen Kurven zusammensetzt.

Das Kernstück unserer Methode besteht in einem Verfahren, die Änderung

$$2\pi I = \int_{\mathfrak{C}} d \arg w \quad (1)$$

des Arguments von  $w$  zu berechnen, wenn  $w = w(t)$  ein Stück  $\mathfrak{C}$  einer rationalen Kurve durchläuft (siehe Abschnitte 3 und 4). Wir benutzen dabei ein Lemma (vgl. Abschnitt 4) über verallgemeinerte Sturmsche Ketten, das so formuliert ist, dass es vielleicht auch bei der Einsetzung noch allgemeinerer Kurvenstücke  $\mathfrak{C}$  in (1) von Nutzen sein kann.

## 1. Funktionentheoretische Vorbereitungen

Bei unserem Verfahren stützen wir uns auf den bekannten Cauchyschen Satz von der Windungszahl<sup>5)</sup>.

Es sei  $\mathfrak{c}$  eine geschlossene, orientierte und rektifizierbare Kurve in der komplexen  $z$ -Ebene.  $z_0$  liege nicht auf  $\mathfrak{c}$ . Dann heisst die Zahl

$$n(z_0, \mathfrak{c}) = (2\pi i)^{-1} \int_{\mathfrak{c}} (z - z_0)^{-1} dz \quad (2)$$

die Windungszahl von  $\mathfrak{c}$  bezüglich  $z_0$ .

Sei nun

$$w(z) = \prod_j (z - z_j)^{m_j} \quad (m_j \text{ ganz und } \neq 0) \quad (3)$$

eine rationale Funktion, so dass keine Nullstelle oder kein Pol auf  $\mathfrak{c}$  liegt.

<sup>3)</sup> H. WIELANDT, *Beiträge zur mathematischen Behandlung komplexer Eigenwertprobleme. I: Abzählung der Eigenwerte komplexer Matrizen*, Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht Nr. 1806/1. 13 S. (1943).

<sup>4)</sup> S. SHERMAN, *Generalized Routh-Hurwitz Discriminant*, Phil. Mag. [7] 37, 537-551 (1946).

<sup>5)</sup> Vgl. für das Folgende etwa: L. V. AHLFORS, *Complex Analysis* (New York 1953).

$\mathfrak{C}$  bezeichne das Bild  $w(\mathfrak{c})$  von  $\mathfrak{c}$  in der komplexen  $w$ -Ebene. Dann folgt aus (2) und (3)

$$\int_{\mathfrak{C}} w^{-1} dw = \sum_j \int_{\mathfrak{c}} m_j (z - z_j)^{-1} dz$$

oder

$$n(0, \mathfrak{C}) = \sum_j m_j n(z_j, \mathfrak{c}). \quad (4)$$

Das heisst: Aus der Windungszahl  $n(0, \mathfrak{C})$  der Kurve  $\mathfrak{C} = w(\mathfrak{c})$  in der  $w$ -Ebene bezüglich des Punktes  $w = 0$  bestimmt sich die in (4) rechtsstehende Summe.

Ist nun speziell  $\mathfrak{c}$  der positiv durchlaufene Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $\Gamma$  der  $z$ -Ebene und  $z_j$  ein nicht auf  $\mathfrak{c}$  gelegener Punkt, so ist die Windungszahl  $n(z_j, \mathfrak{c})$  gleich 1 oder gleich 0, je nachdem  $z_j$  zu  $\Gamma$  gehört oder nicht. Wenn nun also  $w(z)$  eine rationale Funktion (3) ist, für die keines der  $z_j$  zu  $\mathfrak{c}$  gehört, so folgt aus (4):  $n(0, \mathfrak{C})$  mit  $\mathfrak{C} = w(\mathfrak{c})$  ist gleich der Differenz  $N - P$  aus der Anzahl  $N$  der Nullstellen und der Anzahl  $P$  der Pole von  $w(z)$ , die zu  $\Gamma$  gehören.

Damit ist das Problem, die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms  $w(z)$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet zu bestimmen, auf die Berechnung der Windungszahl einer geschlossenen Kurve zurückgeführt.

## 2. Die Berechnung der Windungszahl einer geschlossenen Kurve, die sich aus endlich vielen Stücken von rationalen Kurven zusammensetzt

Wir betrachten eine geschlossene orientierte Kurve  $\mathfrak{C}$  in der komplexen  $w$ -Ebene, die nicht die Punkte  $w = 0$  und  $w = \infty$  enthält und die sich aus endlich vielen Stücken  $\mathfrak{C}_\varrho$  ( $\varrho = 1, \dots, r$ ) von rationalen Kurven zusammensetzt. Das bedeutet, dass jedes  $\mathfrak{C}_\varrho$  eine Parameterdarstellung

$$w_\varrho(t) = \frac{P_\varrho(t) + i Q_\varrho(t)}{R_\varrho(t)} \quad (a_\varrho \leq t \leq b_\varrho) \quad (5)$$

gestattet, wo  $P_\varrho(t)$ ,  $Q_\varrho(t)$ ,  $R_\varrho(t)$  reelle Polynome sind, von denen wir annehmen können, dass sie keinen gemeinsamen Teiler  $\neq \text{const}$  besitzen. Die Voraussetzung, dass  $\mathfrak{C}$  weder den Punkt  $w = 0$  noch den Punkt  $w = \infty$  enthält, bedeutet

$$R_\varrho(t) \neq 0 \quad \text{und} \quad P_\varrho^2(t) + Q_\varrho^2(t) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \in [a_\varrho, b_\varrho] \quad (6)$$

Die Windungszahl  $n(0, \mathfrak{C})$  ist wegen

$$n(0, \mathfrak{C}) = (2\pi i)^{-1} \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_\varrho} w^{-1} dw = (2\pi)^{-1} \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{C}_\varrho} d \arg w \quad (7)$$

<sup>6)</sup> Wir benutzen  $[a, b]$  zur Bezeichnung eines abgeschlossenen und  $]a, b[$  zur Bezeichnung eines offenen Intervalls mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ . Die zugehörigen links- bzw. rechts halboffenen Intervalle werden mit  $]a, b]$  und  $[a, b[$  bezeichnet.



durch die Änderung

$$2\pi I_{\mathfrak{C}_\varrho} = \int_{\mathfrak{C}_\varrho} d \arg w \quad (8)$$

des Arguments von  $w$  längs des rationalen Kurvenstücks  $\mathfrak{C}_\varrho$  bestimmt.

Offenbar hat das Integral  $I_{\mathfrak{C}_\varrho}$  in (8) denselben Wert, wenn wir die Kurve  $\mathfrak{C}_\varrho$  durch die Kurve  $\mathfrak{C}_\varrho^*$  mit der Parameterdarstellung

$$w_\varrho^*(t) = P_\varrho(t) + i Q_\varrho(t) \quad (a_\varrho \leq t \leq b_\varrho) \quad (9)$$

ersetzen.

### 3. Die Berechnung der Änderung von $\arg w$ längs eines orientierten Stücks einer rationalen Kurve<sup>7)</sup>

Wir wollen den Wert des Integrals (1) berechnen, wo  $\mathfrak{C}$  ein orientiertes Stück einer rationalen Kurve mit der Parameterdarstellung

$$w(t) = P(t) + i Q(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (10)$$

ist;  $P(t)$  und  $Q(t)$  sind hier reelle Polynome, nicht beide  $\equiv \text{const}$ , und mit der Eigenschaft:

$$P^2(t) + Q^2(t) \neq 0 \quad \text{für } t \in [a, b]. \quad (11)$$

Wir unterscheiden die beiden Möglichkeiten<sup>8)</sup>

$$\begin{array}{ll} \text{Fall 1: Grad } P(t) \geq \text{Grad } Q(t), & \left| \right. \\ \text{Fall 2: Grad } P(t) \leq \text{Grad } Q(t). & \left| \right. \end{array} \quad (12)$$

Hiermit definieren wir

$$\begin{array}{ll} \text{im Fall 1: } f_0(t) = P(t), \quad f_1(t) = -Q(t), & \left| \right. \\ \text{im Fall 2: } f_0(t) = Q(t), \quad f_1(t) = P(t), & \left| \right. \end{array} \quad (13)$$

so dass also in jedem Fall gilt:

$$\text{Grad } f_0(t) \geq \text{Grad } f_1(t) \quad \text{und} \quad \text{Grad } f_0(t) > 0. \quad (14)$$

Wir teilen die Punkte  $w \neq 0$  und  $\neq \infty$  in vier Klassen ein, je nachdem  $\arg w$  zu einem der Intervalle  $[0, \pi/2[$ ;  $[\pi/2, \pi[$ ;  $[\pi, 3\pi/2[$ ;  $[3\pi/2, 2\pi[$  gehört. Diese Klassen nennen wir beziehungsweise ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten und bezeichnen sie mit  $Q_I$ ,  $Q_{II}$ ,  $Q_{III}$  und  $Q_{IV}$ .

<sup>7)</sup> In dieser und der folgenden Nummer unterdrücken wir den Index  $\varrho$ . Insbesondere bezeichnet jetzt also  $\mathfrak{C}$  nicht, wie in Abschnitt 2, notwendig eine geschlossene Kurve, sondern nur ein Stück einer rationalen Kurve.

<sup>8)</sup> Wir vereinbaren, dass das Nullpolynom einen Grad  $< 0$  hat.

Die Änderung (1) von  $\arg w$  längs  $\mathfrak{C}$  wird davon abhängen, wie oft beim Durchlaufen von  $\mathfrak{C}$  Quadrantenübergänge im zunehmenden und im abnehmenden Sinn stattfinden.

Beschränken wir uns zunächst auf den Fall 1. Hier bedeutet eine Nullstelle  $t_0$  von  $f_0(t)$  [  $-P(t)$  ], dass  $\mathfrak{C}$  die imaginäre Achse trifft. Die Bedingung

(A) Es gibt  $\varepsilon > 0$  so, dass  $a_0 < t_0 - \varepsilon$  und dass für alle  $t$  mit  $t_0 - \varepsilon < t < t_0$  gilt:  $f_0(t) f_1(t_0) < 0$

besagt gerade: Es gibt eine dem auf der imaginären Achse gelegenen Punkt  $w(t_0)$  vorangehende Umgebung auf  $\mathfrak{C}$ , die in  $Q_I$  oder  $Q_{III}$  liegt; da die Punkte der imaginären Achse zu  $Q_{II}$  oder  $Q_{IV}$  gehören, bedeutet also eine Nullstelle  $t_0$  mit der Eigenschaft (A) einen Quadrantenwechsel im zunehmenden Sinn.

Ganz ebenso erkennt man, dass eine Nullstelle  $t_0$  von  $f_0(t)$  mit der Eigenschaft

(B) Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  so, dass  $t_0 + \varepsilon < b_0$  und dass für alle  $t$  mit  $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$  gilt:  $f_0(t) f_1(t_0) > 0$

einen Quadrantenwechsel im abnehmenden Sinne bedeutet.

Auf die gleiche Weise sind auch im Fall 2 die Bedingungen (A) und (B) gekennzeichnet, wobei nur an die Stelle der imaginären die reelle Achse tritt.

Wenn wir annehmen, dass  $R$ -mal eine Nullstelle von  $f_0(t)$  mit der Eigenschaft (A) und  $S$ -mal eine Nullstelle von  $f_0(t)$  mit der Eigenschaft (B) auftritt, so liefert offenbar die Zahl

$$\frac{R - S}{2} \quad (15)$$

eine erste Näherung für die Änderung von  $(2\pi)^{-1} \arg w$  längs  $\mathfrak{C}$ .

Eine genauere Näherung erhalten wir mit Hilfe der Funktion  $N(t)$ , die wir folgendermassen für die Werte  $t$  aus  $[a, b]$  definieren:

$$\left. \begin{aligned} \text{im Fall 1: } N(t) &= \begin{cases} 0, \text{ falls } \arg z(t) \text{ zu } Q_I \text{ oder zu } Q_{III} \text{ gehört,} \\ 1, \text{ falls } \arg z(t) \text{ zu } Q_{II} \text{ oder zu } Q_{IV} \text{ gehört;} \end{cases} \\ \text{im Fall 2: } N(t) &= \begin{cases} 0, \text{ falls } \arg z(t) \text{ zu } Q_{II} \text{ oder zu } Q_{IV} \text{ gehört,} \\ 1, \text{ falls } \arg z(t) \text{ zu } Q_I \text{ oder zu } Q_{III} \text{ gehört.} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wegen (12), (13) ist diese Definition offenbar gleichbedeutend mit der folgenden:

$$N(t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } f_1(t) = 0 \text{ oder } f_0(t) f_1(t) < 0, \\ 1, \text{ falls } f_0(t) = 0 \text{ oder } f_0(t) f_1(t) > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Hiermit erkennt man dann, dass die Zahl

$$\frac{R-S}{2} + \frac{N(a)-N(b)}{4} \quad (18)$$

gleich einem Viertel der Anzahl der gewonnenen oder verlorenen Quadranten ist, wenn man die Kurve  $\mathfrak{C}$  durchläuft. (18) stellt also, bis auf einen Fehler vom Betrag  $< \pi/2$ , die Änderung von  $(2\pi)^{-1} \arg w$  längs  $\mathfrak{C}$  dar.

Den genauen Wert von (1) benötigen wir für das in Abschnitt 2 aufgeworfene Problem nicht; wir wollen ihn aber doch der Vollständigkeit halber angeben. Dazu bestimmen wir aus

$$\alpha = \arg w(a) \quad \text{und} \quad \beta = \arg w(b) \quad (19)$$

die Werte  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$  durch

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha \bmod \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\beta} \equiv \beta \bmod \frac{\pi}{2} \quad \left(0 \leq \bar{\alpha}, \bar{\beta} < \frac{\pi}{2}\right). \quad (20)$$

Damit erhalten wir dann für (1) den Wert

$$I = (2\pi)^{-1} \int_{\mathfrak{C}} d \arg w = \frac{R-S}{2} + \frac{N(a)-N(b)}{4} + \frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{2\pi}. \quad (21)$$

#### 4. Die Berechnung der Differenz $R-S$ ; ein Satz über verallgemeinerte Sturmsche Ketten

Es bleibt für die Lösung der in Abschnitt 3 gestellten Aufgabe noch die Differenz  $R-S$  aus der Anzahl  $R$  der Nullstellen von  $f_0(t)$  mit der Eigenschaft (A) und der Anzahl  $S$  der Nullstellen von  $f_0(t)$  mit der Eigenschaft (B) zu bestimmen.

Dazu erklären wir mit Hilfe der Polynome  $f_0(t), f_1(t)$  eine Folge

$$F(t) = \langle f_0(t), \dots, f_l(t) \rangle \quad (l \geq 0) \quad (22)$$

von Polynomen nach folgender Vorschrift:

Falls  $f_1(t) \equiv 0$ , lassen wir  $F(t)$  mit  $f_0(t)$  abbrechen. Andernfalls bestimmen wir nach dem euklidischen Algorithmus ein Polynom  $f_2(t)$  durch

$$-f_{i+1}(t) = f_{i-1}(t) + g_i(t) f_i(t) \quad (23)$$

mit  $i = 1$ ;  $g_i(t)$  ist also ein Polynom, und es ist

$$\text{Grad } f_{i+1} \leq \text{Grad } f_i \quad \text{und} \quad \text{Grad } f_{i+1} < \text{Grad } f_{i-1}. \quad (24)$$

Falls  $f_2(t) \equiv 0$ , so lassen wir  $F(t)$  mit  $f_1(t)$  abbrechen; andernfalls bestimmen wir gemäss (23) mit  $i = 2$  ein Polynom  $f_3(t)$ . So fortfahrend gelangen wir wegen (24) nach endlich vielen Schritten zu einem Polynom  $f_{l+1}(t) \equiv 0$ ; die Folge  $F(t)$  lassen wir dann mit dem vorhergehenden Polynom  $f_l(t)$  abbrechen.

Mit  $W(t)$  bezeichnen wir die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge  $F(t)$  (22) an der Stelle  $t$ . Hiermit gilt dann die Beziehung

$$R - S = W(a) - W(b). \quad (25)$$

Den Beweis führen wir mit Hilfe des folgenden Lemmas<sup>9)</sup>:

*Lemma.* Es sei  $F(t) = \langle f_0(t), \dots, f_l(t) \rangle$  ( $l \geq 0$ ) eine Folge von  $l + 1$  auf dem Intervall  $[a, b]$  definierten und dort stetigen Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- I.  $f_i(t) \neq 0$  für  $t \in [a, b]$ .
- II. Die Anzahl der Nullstellen von  $f_0(t)$  auf  $[a, b]$  ist endlich.
- III. Falls  $f_i(t_0) = 0$  für  $t_0 \in [a, b]$  und  $0 < i < l$ , so gilt  $f_{i-1}(t_0) f_{i+1}(t_0) < 0$ .
- IV. Falls  $f_0(t_0) = 0$  für  $t_0 \in [a, b]$ , so gilt  $f_1(t_0) \neq 0$ .

Es bezeichne  $R$  bzw.  $S$  die Anzahl der Nullstellen von  $f_0(t)$  auf  $[a, b]$  mit der Eigenschaft (A) bzw. (B) aus Abschnitt 3.  $W(t)$  sei die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Folge  $F(t)$  an der Stelle  $t$ . Dann gilt die Beziehung (25).

*Beweis des Lemmas.* Wir verfolgen, wie sich  $W(t)$  als Funktion von  $t$  beim Durchlaufen des Intervalls  $[a, b]$  ändert.

Offenbar bleibt  $W(t)$  in der Umgebung solcher Werte  $t$  ungeändert, für die keines der  $f_i(t)$  aus  $F(t)$  verschwindet. Sei jetzt  $t_0$  eine Nullstelle von  $f_i(t)$  mit  $0 < i < l$ . Nach III besitzt dann die Folge  $\langle f_{i-1}, f_i, f_{i+1} \rangle$  an der Stelle  $t_0$  genau einen Vorzeichenwechsel. Da wegen der Stetigkeit  $f_{i-1}$  und  $f_{i+1}$  in einer Umgebung von  $t_0$  ihr Vorzeichen nicht ändern, erfährt  $W(t)$  in dieser Umgebung durch den Teil  $\langle f_{i-1}, f_i, f_{i+1} \rangle$  keine Änderung.

Es bleibt wegen I jetzt nur noch der Einfluss einer Nullstelle  $t_0$  von  $f_0(t)$  auf  $W(t)$  zu untersuchen. Diese Nullstellen sind isoliert, und  $f_0(t)$  und  $f_1(t)$  sind stetig. Für  $t = t_0$  besitzt die Folge  $\langle f_0, f_1 \rangle$  keinen Vorzeichenwechsel; in einer hinreichend kleinen Umgebung  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  von  $t_0$  (soweit sie zu  $[a, b]$  gehört), ändert  $f_1(t)$  sein Vorzeichen nicht, und  $f_0(t)$  hat ausser  $t = t_0$  keine Nullstelle. Die Bedingung (A) besagt nun nichts anderes, als dass die Folge  $\langle f_0, f_1 \rangle$  in der linksseitigen Umgebung  $]t_0 - \varepsilon, t_0[$  von  $t_0$  (soweit sie zu  $[a, b]$  gehört) einen Vorzeichenwechsel hat, das heisst:  $W(t_0) = W(t) - 1$  für  $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0[$ . Ebenso besagt die Bedingung (B), dass die Folge  $\langle f_0, f_1 \rangle$  in der rechtsseitigen Umgebung  $]t_0, t_0 + \varepsilon[$  von  $t_0$  (soweit sie zu  $[a, b]$  gehört) einen Vorzeichenwechsel hat, also  $W(t) = W(t_0) + 1$  für  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon[$ . Aus der Definition von  $R$  und  $S$  ergibt sich damit:  $W(b) = W(a) - R + S$ , was zu beweisen war.

Um dieses Lemma auf unser Problem anwenden zu können, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass unsere oben definierte Folge  $F(t)$  (22) von Polynomen die Eigenschaften I bis IV des Lemmas besitzt.

Eigenschaft I folgt aus der Bemerkung, dass das letzte Polynom  $f_l(t)$  in (22) der grösste gemeinsame Teiler von  $f_0(t)$  und  $f_1(t)$  ist und  $f_0(t)$  und  $f_1(t)$  keine

<sup>9)</sup> Vgl. zu dem Lemma: F. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, Kap. IV (Berlin 1928). Ferner: G. VALIRON, *Théorie des fonctions*, 2<sup>e</sup> éd., n° 53 (Paris 1948).

Nullstelle auf  $[a, b]$  gemeinsam haben. II ist erfüllt, da  $f_0(t)$  ein Polynom ist, III und IV folgen aus (23) und daraus, dass  $f_i(t)$  und  $f_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i < l$ , nicht gemeinsam verschwinden auf  $[a, b]$ .

## 5. Zusammenfassung der Ergebnisse

*Satz 1.* Wir betrachten eine geschlossen orientierte Kurve  $\mathfrak{C}$  der komplexen  $w$ -Ebene, die nicht die Punkte  $w = 0$  und  $w = \infty$  enthält und die sich aus  $r$  Stücken  $\mathfrak{C}_\varrho$  von rationalen Kurven zusammensetzt. Die Windungszahl  $n(0, \mathfrak{C})$  ist gemäss (7) gleich der Summe über die  $r$  Integrale  $I_\varrho$  (8) und damit nach den Betrachtungen von Abschnitt 3 und 4 durch

$$n(0, \mathfrak{C}) = \sum_{\varrho} \left\{ \frac{W_\varrho(a_\varrho) - W_\varrho(b_\varrho)}{2} + \frac{N_\varrho(a_\varrho) - N_\varrho(b_\varrho)}{4} \right\} \quad (26)$$

gegeben ( $\varrho = 1, \dots, r$ ). Die hier auftretenden Zahlen  $W_\varrho(a_\varrho)$ ,  $W_\varrho(b_\varrho)$ ,  $N_\varrho(a_\varrho)$ ,  $N_\varrho(b_\varrho)$  bestimmen sich folgendermassen:

(5) und (6) sei eine Parameterdarstellung  $w_\varrho(t)$  des Kurvenstückes  $\mathfrak{C}_\varrho$ . Zu den Zählerpolynomen  $P_\varrho(t)$  und  $Q_\varrho(t)$  bestimmt man gemäss (12) und (13) die Polynome  $f_{\varrho 0}(t)$  und  $f_{\varrho 1}(t)$  (in den Abschnitten 3 und 4 ist der Index  $\varrho$  unterdrückt). Durch (17) ist dann  $N_\varrho(t)$  und damit speziell  $N_\varrho(a_\varrho)$  und  $N_\varrho(b_\varrho)$  definiert. Zu  $f_{\varrho 0}(t)$  und  $f_{\varrho 1}(t)$  erklärt man dann mit Hilfe des euklidischen Algorithmus gemäss (23), (24) eine Folge

$$F_\varrho(t) = \langle f_{\varrho 0}(t), \dots, f_{\varrho l_\varrho}(t) \rangle \quad (l_\varrho \geq 0) \quad (27)$$

von Polynomen, wobei  $f_{\varrho l_\varrho}(t)$  der grösste gemeinsame Teiler von  $f_{\varrho 0}$  und  $f_{\varrho 1}$  bzw.  $P_\varrho(t)$  und  $Q_\varrho(t)$  ist.  $W_\varrho(t)$  bezeichnet dann die Anzahl der Vorzeichenwechsel von  $F_\varrho(t)$  in (27) an der Stelle  $t$ ; damit sind dann auch  $W_\varrho(a_\varrho)$  und  $W_\varrho(b_\varrho)$  in (26) bestimmt.

*Satz 2* (Eine Anwendung von Satz 1). Es sei  $\Gamma$  ein einfach zusammenhängendes endliches Gebiet der komplexen  $z$ -Ebene. Der Rand  $c$  von  $\Gamma$  setze sich aus  $r$  Stücken  $c_\varrho$  von rationalen Kurven zusammen. Ferner sei  $w(z)$  ein Polynom, das keine Nullstelle auf dem Rand  $c$  besitze. Dann erfüllt die Bildkurve  $\mathfrak{C} = w(c)$  von  $c$  die Voraussetzungen von Satz 1, und zwar setzt sich  $\mathfrak{C}$  aus den  $r$  rationalen Kurvenstücken  $\mathfrak{C}_\varrho = w(c_\varrho)$  zusammen, die Bilder von den  $c_\varrho$  unter der Abbildung  $z \rightarrow w(z)$  sind. Die Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $w(z)$  in  $\Gamma$  ist durch die Windungszahl  $n(0, \mathfrak{C})$  gegeben, die man nach dem in Satz 1 beschriebenen Verfahren bestimmen kann.

*Bemerkungen.* 1. Wenn man also nach dem in Satz 2 beschriebenen Verfahren die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms  $w(z)$  im Gebiet  $\Gamma$  bestimmen will, so wählt man zunächst eine gewisse Parameterdarstellung

$$z_\varrho(t) = \frac{p_\varrho(t) + i q_\varrho(t)}{r_\varrho(t)} \quad (a_\varrho \leq t \leq b_\varrho) \quad (28)$$



von  $c_q$ ; hier sind  $p_q(t)$ ,  $q_q(t)$ ,  $r_q(t)$  reelle Polynome ohne gemeinsamen Faktor  $\neq \text{const}$ , und  $r_q(t)$  verschwindet nicht auf  $[a_q, b_q]$ . Ist dann  $w(z)$  das zu untersuchende Polynom, so erhält man aus

$$w_q(t) = w(z_q(t)) \quad (29)$$

mit (28) eine Parameterdarstellung vom Typ (5), (6) der Bildkurve  $\mathfrak{C}_q = w(\mathfrak{c}_q)$ . Auf diese Darstellungen (5), (6) von  $\mathfrak{C}_q$  wird dann das in Satz 1 beschriebene Verfahren zur Bestimmung von  $n(0, \mathfrak{C})$  angewandt, womit man dann die Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $w(z)$  in  $I$  gefunden hat.

2. In Satz 2 wird vorausgesetzt, dass das Polynom  $w(z)$  keine Nullstelle auf dem Rand  $c$  des Gebiets  $I$  haben soll. Diese Voraussetzung lässt sich im Verlaufe der Rechnung nachprüfen, und zwar ist sie offenbar damit gleichbedeutend, dass keine der Bildkurven  $\mathfrak{C}_q = w(\mathfrak{c}_q)$  den Punkt  $w = 0$  enthält. Anders ausgedrückt: In der Parameterdarstellung (5) von  $\mathfrak{C}_q$  dürfen  $P_q(t)$  und  $Q_q(t)$  nicht gemeinsam in einem Punkt von  $[a_q, b_q]$  verschwinden. Nun bestimmt man aber bei der Aufstellung der Folge  $F_q(t)$  in (27) durch den euklidischen Algorithmus den grössten gemeinsamen Teiler  $f_{q,1}(t)$  von  $P_q(t)$  und  $Q_q(t)$ . Die in Rede stehende Voraussetzung ist also gleichbedeutend damit, dass das Polynom  $f_{q,1}(t)$  keine Nullstelle auf  $[a_q, b_q]$  besitzt, und dies kann man ja bekanntlich mit Hilfe der gewöhnlichen Sturmschen Kette nachprüfen.

## 6. Eine Erweiterung von Satz 2 für unendliche Gebiete

Wir ergänzen die in Satz 2 beschriebene Methode für die Berechnung der Anzahl der Nullstellen in gewissen Gebieten noch dahingehend, dass wir für diese Gebiete auch den Punkt  $z = \infty$  als Randpunkt zulassen. Auf diese Weise wird zum Beispiel ein durch eine Halbebene oder einen Winkelraum gegebenes Gebiet unserer Methode zugänglich.

Wir betrachten also ein einfachzusammenhängendes Gebiet  $I$  der komplexen  $z$ -Ebene, das von  $r$  rationalen Kurvenstücken  $\mathfrak{c}_q$  begrenzt ist, die ganz im Endlichen liegen, mit Ausnahme des Endpunktes von  $\mathfrak{c}_1$  und Anfangspunktes von  $\mathfrak{c}_2$ , die mit  $z = \infty$  zusammenfallen mögen. Wir fragen nach der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms  $w(z)$  in  $I$ , wobei keine Nullstelle von  $w(z)$  auf dem Rand  $c$  von  $I$  liegen soll.

Wir vermindern nun zunächst  $I$  um die zu einer Kreiseumgebung  $K$  von  $z = \infty$  gehörenden Punkte, wobei wir  $K$  so wählen, dass sie keine Nullstellen von  $w(z)$  enthält. Das Restgebiet bezeichnen wir mit  $I'$ .  $I'$  ist ganz im Endlichen gelegen und, wenn wir nur  $K$  hinreichend nahe an  $\infty$  wählen, einfachzusammenhängend. Der Rand  $c'$  von  $I'$  setzt sich aus  $r + 1$  rationalen Kurvenstücken zusammen, zu denen auch derjenige Kreisbogen  $\mathfrak{k}$  gehört, den der Randkreis von  $K$  mit  $I$  gemeinsam hat.



Wir können also auf  $\Gamma'$  die in Satz 2 beschriebene Methode zur Bestimmung der Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $w(z)$  in  $\Gamma'$  anwenden. Diese Anzahl stimmt mit der auf das Gebiet  $\Gamma$  bezüglichen überein.  $N$  ändert sich nicht, wenn wir die Kreisumgebung  $K$  sich auf den Punkt  $z = \infty$  zusammenziehen lassen. Dies läuft auf folgendes Verfahren für die Bestimmung von  $N$  hinaus:

*Ergänzung zu Satz 2.* Das einfach zusammenhängende Gebiet  $\Gamma$  der komplexen  $z$ -Ebene werde von  $r$  Stücken  $c_0$  von rationalen Kurven begrenzt, die ganz im Endlichen liegen mögen mit Ausnahme des Endpunktes von  $c_1$  und Anfangspunktes von  $c_2$ , die mit  $z = \infty$  zusammenfallen mögen.  $w(z)$  sei ein Polynom  $n$ -ten Grades, das keine Nullstellen auf dem Rand  $c$  von  $\Gamma$  besitzt. Dann ist die Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $w(z)$  in  $\Gamma$  durch

$$N = \sum_{\varrho} \left\{ \frac{W_{\varrho}(a_{\varrho}) - W_{\varrho}(b_{\varrho})}{2} + \frac{N_{\varrho}(a_{\varrho}) - N_{\varrho}(b_{\varrho})}{4} \right\} + \frac{n(\alpha_2 - \beta_1)}{2\pi} \quad (30)$$

gegeben. Hier sind  $\alpha_2$  und  $\beta_1$  mit Hilfe der Parameterdarstellung  $z_1(t)$ ,  $a_1 \leq t \leq b_1$ , und  $z_2(t)$ ,  $a_2 \leq t \leq b_2$ , von  $c_1$  und  $c_2$  definiert durch

$$\beta_1 = \lim_{t \rightarrow b_1 -} \arg z_1(t), \quad \alpha_2 = \lim_{t \rightarrow a_2 +} \arg z_2(t). \quad (31)$$

Die Zahlen  $W_{\varrho}(a_{\varrho})$ ,  $W_{\varrho}(b_{\varrho})$ ,  $N_{\varrho}(a_{\varrho})$ ,  $N_{\varrho}(b_{\varrho})$  ergeben sich ebenso wie in Satz 2 beschrieben, soweit es sich nicht um die auf den unendlichen Punkt

$$z_1(b_1) = z_2(a_2) = \infty$$

führenden Parameterwerte  $b_1$  und  $a_2$  handelt. In diesen Fällen definieren wir  $W_1(b_1)$  und  $W_2(a_2)$  als Grenzwert durch

$$W_1(b_1) = \lim_{t \rightarrow b_1 -} W_1(t), \quad W_2(a_2) = \lim_{t \rightarrow a_2 +} W_2(t), \quad (32)$$

während wir für die Definition von  $N_1(b_1)$  und  $N_2(a_2)$  auf die Formel (16) zurückgreifen und hier die Werte

$$\arg w_1(b_1) = \lim_{t \rightarrow b_1 -} \arg w_1(t), \quad \arg w_2(a_2) = \lim_{t \rightarrow a_2 +} \arg w_2(t) \quad (33)$$

einsetzen; hier sind  $w_1(t) = w(z_1(t))$  und  $w_2(t) = w(z_2(t))$  die Parameterdarstellungen von  $\mathfrak{C}_1 = w(c_1)$  und  $\mathfrak{C}_2 = w(c_2)$ .

*Bemerkung.* Im allgemeinen wird man im vorstehenden Fall die Parameterdarstellung  $z_1(t)$  von  $c_1$  so wählen, dass das Parameterintervall die Form  $[a_1, \infty]$  hat. In diesem Fall bestimmt sich der Wert  $W_1(b_1) = W_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_1(t)$  einfach als die Anzahl der Vorzeichenwechsel derjenigen Folge, die man erhält, wenn man in der Polynomfolge  $F_1(t)$  die Polynome  $f_{1,i}(t)$  durch ihre höchsten Koeffizienten ersetzt.

Entsprechend wird man in der vorstehenden Ergänzung zu Satz 2 für  $c_2$  die Parameterdarstellung  $z_2(t)$  so wählen, dass das Parameterintervall die Form  $[-\infty, b_2]$  hat. Der Wert  $W_2(a_2) = W_2(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} W_2(t)$  ist dann einfach gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in derjenigen Folge, die man erhält, wenn man in der Folge  $F_2(t)$  die Polynome  $f_{2i}(t)$  durch ihre höchsten Koeffizienten, multipliziert mit  $(-1)^{g_i}$ , ersetzt, wobei  $g_i$  der Grad von  $f_{2i}$  ist.

Insbesondere kann auch  $c_1 = c_2$  sein, das heisst:  $\Gamma$  wird durch ein einziges rationales Kurvenstück, das durch den Punkt  $z = \infty$  geht, begrenzt. In diesem Falle wird man eine Parameterdarstellung  $z_1(t)$  von  $c_1$  so wählen, dass die im Endlichen gelegenen Punkte von  $c_1$  dem Parameterintervall  $]-\infty, \infty[$  entsprechen. So wird man zum Beispiel für den Rand  $c$  der Halbebene  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , also für die imaginäre Achse, die Parameterdarstellung  $z(t) = it$  wählen; vergleiche auch das folgende Beispiel.

## 7. Ein Beispiel

Wir fragen nach der Anzahl der Nullstellen des Polynoms

$$w(z) = z^3 + z - 3 \quad (34)$$

in dem Gebiet  $\Gamma$ , das durch die Parabel  $c = c_1$ :

$$z_1(t) = t^2 - it \quad (-\infty \leq t \leq \infty) \quad (35)$$

begrenzt wird.

Nach dem in Satz 2 und der Ergänzung zu Satz 2 beschriebenen Verfahren bestimmen wir zunächst die Parameterdarstellung  $w_1(t) = w(z_1(t))$  der Bildkurve  $\mathfrak{C}_1 = w(c_1)$ :

$$w_1(t) = t^6 - 3t^4 + t^2 - 3 + i(-3t^5 + t^3 - t) = P_1(t) + iQ_1(t). \quad (36)$$

Wir befinden uns also gemäss (12) im Fall 1 und erhalten damit durch Anwendung des euklidischen Algorithmus gemäss (23), (24) für die Folge  $F_1(t)$  von Polynomen:

$$\left. \begin{array}{llll} f_0(t) = & t^6 & - 3t^4 & + t^2 & - 3 \\ f_1(t) = & 3t^5 & - t^3 & & + t \\ f_2(t) = & \frac{8}{3}t^4 & & - \frac{2}{3}t^2 & + 3 \\ f_3(t) = & & \frac{1}{4}t^3 & & + \frac{19}{8}t \\ f_4(t) = & & & 26t^2 & - 3 \\ f_5(t) = & & & & - \frac{125}{52}t \\ f_6(t) = & & & & 3. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Zur Bestimmung der Anzahlen  $W_1(-\infty)$  und  $W_1(\infty)$  der Vorzeichenwechsel in der vorstehenden Polynomfolge  $F_1(t)$  (36) für grosse negative  $t$  bzw. grosse positive  $t$  schreiben wir die Folgen

$$\left\langle 1, -3, \frac{8}{3}, -\frac{1}{4}, 26, \frac{125}{52}, 3 \right\rangle, \quad \left\langle 1, 3, \frac{8}{3}, \frac{1}{4}, 26, -\frac{125}{52}, 3 \right\rangle \quad (38)$$

der höchsten Koeffizienten der Polynome  $f_{1i}(t)$  auf, einmal multipliziert mit  $(-1)^{g_i}$ ,  $g_i = \text{Grad } f_{1i}(t)$ , das andere Mal ohne diesen Faktor. Hieraus ergibt sich:

$$W_1(-\infty) = 4, \quad W_1(\infty) = 2. \quad (39)$$

Ferner finden wir

$$\alpha_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arg z_1(t) = 0, \quad \beta_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \arg z_1(t) = 0. \quad (40)$$

Endlich bemerken wir für den (auch in unserem Beispiel vorliegenden) Fall, dass der Rand  $c$  von  $\Gamma$  sich aus einem einzigen rationalen Kurvenstück  $c_1$  mit dem Anfangs- und Endpunkt  $z = \infty$  zusammensetzt, dass gilt:

$$N_1(-\infty) - N_1(\infty) = 0. \quad (41)$$

Denn wenn wir für  $c_1$  eine Parameterdarstellung (28),  $q = 1$ , mit dem Parameterintervall  $[0, \infty, \infty]$  wählen, so erhalten wir wegen  $w_1(t) = w(z_1(t))$ ,  $w(z)$  ein Polynom:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \arg w(z_1(t)) - \lim_{t \rightarrow \infty} \arg w(z_1(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \arg \frac{w(z_1(-t))}{w(z_1(t))} = 0 \text{ oder } \pi. \quad (42)$$

Hieraus folgt aber mit der Definition (16) von  $N_1(t)$  Gleichung (41).

Für die Anzahl  $N$  der Nullstellen in unserem Beispiel finden wir nun nach Formel (30) mit (39), (41), (40) den Wert:

$$N = \frac{W_1(-\infty) - W_1(\infty)}{2} + \frac{N_1(-\infty) - N_1(\infty)}{4} + \frac{3(\alpha_1 - \beta_1)}{2\pi} = 1. \quad (43)$$

*Vereinfachungen für den Fall der Halbebene.* Wir betrachten als Gebiet  $\Gamma$  speziell eine Halbebene, deren Rand  $c = c_1$  durch

$$z_1(t) = c t + d; \quad -\infty \leq t \leq \infty \quad (c, d \text{ komplex und } c \neq 0) \quad (44)$$

gegeben sei. In diesem Fall vereinfacht sich die Formel (30) für die Anzahl  $N$  der Nullstellen eines Polynoms  $w(z)$  zu

$$N = \frac{W_1(-\infty) - W_1(\infty)}{2} + \frac{n}{2}; \quad (45)$$

hier sind  $W_1(-\infty)$  und  $W_1(\infty)$  ebenso wie früher definiert, und  $n$  ist der Grad des Polynoms  $w(z)$  (vgl. die Fussnoten 3 und 9).

Zum Beweis bemerken wir, dass auf die Halbebene  $\Gamma$  die Voraussetzungen zutreffen, die oben zu der Gleichung (41) geführt haben; der mittlere Term in (30) fällt also fort. Ausserdem folgt aus der Definition (31) von  $\beta_1$  und  $\alpha_2$  (die Indizes 1 und 2 bezeichnen in unserem Fall ja dasselbe!) mit  $w_1(t) = w(ct + d)$ :

$$\alpha_1 - \beta_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arg w(ct + d) - \lim_{t \rightarrow \infty} \arg w(ct + d) = \lim_{t \rightarrow \infty} \arg \frac{w(-ct + d)}{w(ct - d)} = \pi.$$

### Summary

We are dealing with the problem of calculating the number  $N$  of zeros of a polynomial  $w(z)$  in certain regions  $\Gamma$  of the complex plane. If  $\Gamma$  is a halfplane or a disc, there exist many well-known solutions of the problem. If  $\Gamma$  is of a more general type, there is only a paper of SHERMAN<sup>4)</sup> for the case, that  $\Gamma$  is the intersection of two halfplanes. In this paper we give the solution for the case that the region  $\Gamma$  is simply connected and the boundary of  $\Gamma$  is composed by a finite number of pieces of rational curves. Our method generalizes the method of WIELANDT<sup>3)</sup> for the halfplane and the method of SHERMAN<sup>4)</sup>. The core of our paper is the way of computing the variation of  $\arg w$ , if  $w$  runs along a piece of a rational curve. This computation is based on a lemma about generalized Sturm sequences.

(Eingegangen: 16. September 1955.)

## Über eine anschauliche Darstellung der Vorgänge bei der Fortpflanzung von unstetigen Signalen in Wellenleitern

VON ADALBERT RUBINOWICZ, Warschau<sup>1)</sup>

### 1. Wellenleiter mit beliebigem Querschnitt

Zur Darstellung der Vorgänge in elektromagnetischen oder akustischen Wellenleitern im Falle der Fortpflanzung von abgehackten, zeitlich periodischen Wellensignalen ist es sehr bequem, die gesamte Wellenbewegung in einzelne Wellentypen aufzulösen, von denen sich jede mit einer bestimmten Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ausbreitet. Solche Wellentypen ergeben sich, falls man die gesamte Wellenbewegung, ebenso wie im stationären Falle nach den Eigenschwingungen des Querschnitts des Wellenleiters entwickelt [5]<sup>2)</sup>. Insbesondere kann man durch Superposition von solchen Wellentypen die Vorgänge darstellen, die in einem Wellenleiter im akustischen Falle von einem

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität Warschau und der Polnischen Akademie der Wissenschaften.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 325.

punktförmigen Strahler nullter Ordnung und im elektromagnetischen Falle von einer punktförmigen Dipolquelle angeregt werden [2]. Speziell für die Anwendung in der Radartechnik ist eine solche Entwicklung von Bedeutung, weil hier die Wellenlänge der Dipolstrahlung und der Querschnitt des Wellenleiters in der Regel aneinander derart angepasst werden, dass im stationären Falle in weiterer Entfernung von der Strahlungsquelle nur ein einziger Wellentypus in Frage kommt.

Eine solche Zerlegung des Wellenvorganges hat aber den schwerwiegenden Nachteil, dass sie uns über den Entstehungsmechanismus der Vorläufer und ihre Eigenschaften gar keine Auskunft gibt. Um einen Einblick in das Wellenfeld der Vorläufer zu erhalten, muss man nämlich die Felder der Vorläufer aller Wellentypen superponieren, ohne Rücksicht darauf, ob für sie der Wellenleiter durchlässig oder undurchlässig ist. Dies führt notwendigerweise auf einen ganz unübersichtlichen Ausdruck für die gesamte Wellenbewegung.

Um uns eine Vorstellung von der Entstehung der Vorläufer zu verschaffen, müssen wir daher den Wellenvorgang als ein einheitliches Ganzes betrachten. Wir wollen dabei unseren Überlegungen den praktisch wichtigeren Fall der elektromagnetischen Wellen in einem von vollkommen leitenden Wänden begrenzten Wellenleiter zugrunde legen. Sie gelten aber im grossen und ganzen auch in dem einfacheren akustischen Falle.

Wir setzen voraus, dass die elektromagnetische Strahlung durch einen infinitesimalen elektrischen Dipol angeregt wird, der etwa zur Zeit  $t = 0$  zu schwingen beginnt. Der Beginn der zeitlichen Abhängigkeit seines Dipolmomentes soll dabei nur so beschaffen sein, dass die Wellenfront der Strahlung bei der freien Ausbreitung den Bedingungen genügt, die an einer sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegenden elektromagnetischen Sprungfläche erfüllt sein müssen (vgl. [6] und [7]). Der weitere Verlauf der Dipolschwingungen soll zunächst an keine Voraussetzungen gebunden sein.

Bis die Strahlung an die Wände des Wellenleiters gelangt, pflanzt sie sich zunächst als freie Strahlung fort, so als ob der Wellenleiter gar nicht vorhanden wäre. Dies ist intuitiv klar, kann aber auch ganz streng mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes für das gemischte Problem des elektromagnetischen Feldes [4], [6] bewiesen werden. Eine solche freie Strahlung besitzt ja die für unser Problem vorgeschriebene Singularität, genügt den Anfangsbedingungen und erfüllt bis zu ihrem Auftreffen an die Wände des Wellenleiters auch die Randbedingungen.

Weiter kann man behaupten, dass auch späterhin in der ganzen Wellenfront selbst und knapp dahinter die elektromagnetische Strahlung sich von der freien Strahlung des Dipols nicht unterscheidet. Der Grund dafür liegt darin, dass die Strahlung in der Wellenfront nur durch das von den Wänden des Wellenleiters reflektierte und abgelenkte elektromagnetische Feld abgeändert werden kann. Der Weg, den diese letztere Strahlung zurücklegen müsste, um zur Wellenfront zu gelangen, ist jedoch länger als der direkte Weg vom strah-



lenden Dipol. Auch diese Tatsache lässt sich mit Hilfe des erwähnten Eindeutigkeitssatzes streng beweisen [7]. Wir sehen somit, dass selbst im Falle eines punktförmigen Dipols die Wellenfront gar nicht eben ist, sondern durch eine Kugelfläche gegeben wird. Je weiter jedoch diese Wellenfront im Wellenleiter fortschreitet, um so mehr nähert sie sich einer Ebene, die senkrecht auf der Fortschrittingsrichtung steht. Dabei nehmen in der Wellenfront die Feldstärken ebenso wie bei der freien Ausbreitung ab. Hier macht sich also noch nicht die energiesammelnde Wirkung des Wellenleiters bemerkbar.

Die Wellenfront ist eine elektromagnetische Sprungfläche, da die Feldstärken an ihrer Vorderseite verschwinden und nur an ihrer Rückseite im allgemeinen von Null verschieden sind. Eine solche Sprungfläche pflanzt sich aber bekanntlich (vgl. etwa [6], [7]) wie eine Huygenssche Hüllfläche fort. Ihr Fortschreiten kann daher mit Hilfe des Huygensschen Enveloppenprinzips verfolgt werden. Bei der Reflexion und Beugung einer solchen Sprungfläche entsteht wieder eine Sprungfläche. Die Lage der reflektierten Wellenfront kann daher ebenfalls mit Hilfe des Huygensschen Enveloppenprinzips festgelegt werden. Jeder Punkt der, den Wellenleiter begrenzenden, Wand bildet dabei den Ausgangspunkt von Huygensschen Sekundärwellen. Die Lage der reflektierten Hüllfläche wird daher durch die Hüllfläche aller Kugeln gegeben, deren Mittelpunkte auf der reflektierenden Wand liegen, und die auch die ursprüngliche einhüllende Hüllfläche nach ihrem unbehinderten Durchgange durch die Wand einhüllen. Daraus folgt, dass die einfallende und die reflektierte Hüllfläche sich in einer auf der reflektierenden Wand liegenden Kurve schneiden und dass die Fortschrittingsrichtungen der beiden Einhüllenden an den Wänden des Wellenleiters mit dessen Längsrichtung die gleichen Winkel einschließen.

Die durch die Reflexion einer Wellenfront entstehende Sprungfläche stellt wieder eine Wellenfront dar, da auf ihrer Vorderseite die elektromagnetischen Feldstärken ebenso verschwinden wie bei der einfallenden Wellenfront, aus der sie entsteht. Durch Reflexion der zweiten Wellenfront entsteht eine dritte usw. Auf diese Weise wird das im Wellenleiter befindliche elektromagnetische Feld in jedem Zeitmoment  $t > 0$  von einer endlichen, im Laufe der Zeit aber ununterbrochen anwachsenden Anzahl von elektromagnetischen Sprungflächen durchsetzt. Alle die angeführten Tatsachen lassen sich mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes streng beweisen (vgl. [7], Kap. VI). In allen diesen elektromagnetischen Sprungflächen müssen selbstverständlich die hier geltenden Bedingungen (vgl. zum Beispiel [6]) erfüllt sein. Jede dieser Sprungflächen signalisiert die Ankunft eines neuen Wellenfeldes, das durch Reflexion und Beugung aus dem gerade ihm vorangehenden entsteht. Da die bereits vorhandene Wellenfront sich mit der aus ihr entstehenden neuen in einer längs der Wand verlaufenden Kurve schneidet, hängen alle die aufeinanderfolgenden Wellenfronten miteinander zusammen.



Bezeichnet  $\vartheta$  den Winkel zwischen der Normalen in einem gegebenen Punkte der Wellenfront und der Normalen an den Querschnitt des Wellenleiters, so bewegt sich die Wellenfront längs einer zur Längsrichtung des Wellenleiters parallelen Geraden mit der Geschwindigkeit  $c \cos \vartheta$ . Man kann dies leicht feststellen, wenn man sich in den beiden Zeitmomenten  $t$  und  $t + dt$  die Lagen der Wellenfronten vergegenwärtigt und beachtet, dass sich diese mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  in der Richtung ihrer Normalen bewegen. Je grösser somit der Winkel  $\vartheta$  ist, um so schneller schreitet die Wellenfront in der Längsrichtung des Wellenleiters fort. Nehmen wir an, dass die Vorderseite der Wellenfront in jedem ihrer Punkte nach aussen konvex ist, das heisst, dass der Winkel  $\vartheta$  monoton wächst, wenn wir ausgehend von dem vordersten Punkte der Wellenfront zu ihren rückwärts gelegenen Punkten fortschreiten. Es werden sich dann die weiter zurückliegenden Partien der Wellenfront schneller bewegen als die vorderen, und die Wellenfront wird daher bei ihrem Fortschreiten sich immer mehr einer senkrecht zur Längsrichtung des Wellenleiters liegenden Ebene nähern. Ist hingegen die Vorderseite der Wellenfront nach aussen konkav, so wird sie sich bei ihrem Fortschreiten immer schiefer gegenüber der Längsrichtung einstellen. Wie man sich aus der oben angegebenen Konstruktion der reflektierten Hüllflächen klarmachen kann, entsteht aus einer Hüllfläche, die an ihrer Vorderseite nach aussen konvex ist, eine ebensolche reflektierte Hüllfläche. Da im Falle eines Wellenleiters die vom Dipol bei der freien Ausstrahlung emittierte Wellenfront nach aussen konvex ist, so müssen auch alle aus ihr durch sukzessive Reflexionen und Beugungen entstehenden Wellenfronten an ihrer Vorderseite nach aussen konvex sein. Sie werden sich daher bei ihrem Fortschreiten in der Längsrichtung des Wellenleiters immer mehr Ebenen nähern, die senkrecht auf der Längsrichtung des Wellenleiters stehen. Da alle sukzessiven Wellenfronten längs der Wände des Wellenleiters miteinander zusammenhängen, bedeutet dies, dass sie sich auch einander immer mehr nähern müssen. Die sukzessiven Wellenfronten werden sich daher immer mehr an der vordersten Wellenfront zusammendrängen.

Es entsteht nun die Frage nach der Intensitätsverteilung in den auf diese Weise entstehenden Vorläufern. Um streng gültige Aussagen machen zu können, müsste man die Intensitätsverteilung in den durch wiederholte Reflexion und Beugung an den Wänden des Wellenleiters entstehenden Wellen zur Verfügung haben, die einzig in dem im nächsten Abschnitt zu besprechenden Spezialfall (wo nur Reflexionen an Ebenen stattfinden) bekannt ist.

Um die Entstehung der den verschiedenen Wellentypen entsprechenden Hauptwellen plausibel zu machen, betrachten wir zunächst die Gesamtheit der über einen Beobachtungspunkt  $P$  hinwegstreichenden Wellenfronten. Da sich diese in der Nähe der vordersten Wellenfront häufen, werden sie in dem Punkte  $P$  nach dem Eintreffen der vordersten Wellenfront zunächst in sehr rascher, mit der Zeit aber immer mehr abnehmender Aufeinanderfolge eintreffen. Eine

Hauptwelle mit einer gegebenen Frequenz kann sich in einem Punkte  $P$  erst dann bemerkbar machen, wenn die Frequenz der Aufeinanderfolge zweier Wellenfronten mit sich verstärkenden Feldstärkeverteilungen einer Eigenfrequenz des Querschnittes des Wellenleiters gleich wird. Um einzusehen, dass eine solche Hauptwelle auch späterhin bestehen bleibt, muss man noch annehmen, dass die Phasenflächen der nach den Wellenfronten ankommenden Teile der reflektierten und gebeugten Wellen im Takte der Wellenfronten den Punkt  $P$  passieren. Wir wollen jedoch hier auf dieses Problem nicht weiter eingehen. Im Abschnitt 2 wird sich dieser Tatbestand im Falle eines rechteckigen Querschnittes auf einem ganz elementaren Wege ergeben.

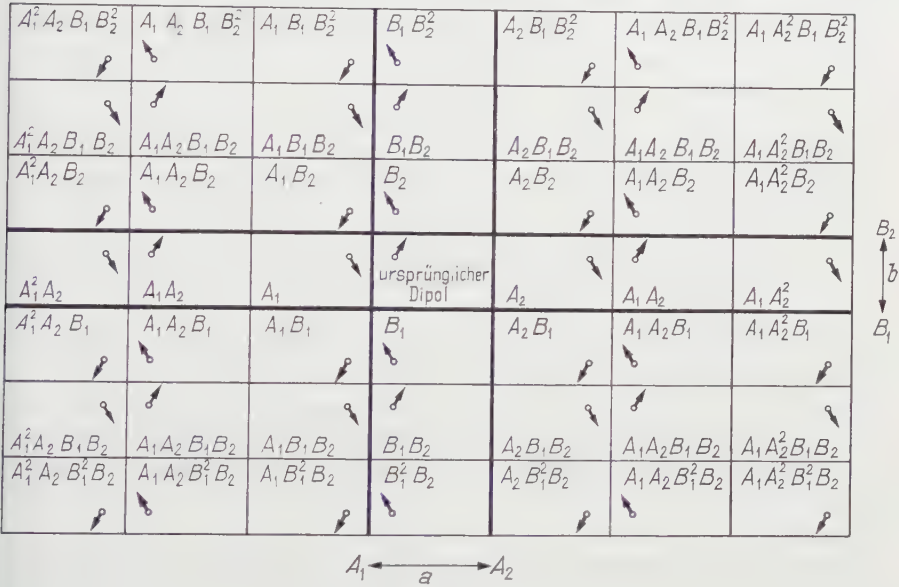
Offenbar kann die Zeit, die zwischen der Aufeinanderfolge zweier Wellenfronten verstreicht, nicht länger sein als die Periode der tiefsten Eigenschwingung des Querschnittes. Auf diese Weise versteht man, dass der Wellenleiter eine Sperrwirkung aufweisen muss für die Frequenzen, die kleiner sind als die, die dieser Schwingung entspricht.

## 2. Die Wellenbewegung in den Vorläufern in Wellenleitern mit Querschnitten, die sich mit Hilfe des Thomsonschen Spiegelungsverfahrens behandeln lassen

Um uns ein vollständigeres Bild von den Vorgängen in Wellenleitern zu verschaffen, wollen wir den Spezialfall in Betracht ziehen, bei dem die Lösung der Maxwellschen Gleichungen im stationären Falle mit Hilfe des Thomsonschen Spiegelungsverfahrens hergestellt werden kann. Der Querschnitt eines solchen Wellenleiters wird durch ein Dreieck oder Rechteck gegeben, und der ursprüngliche Dipol und die Gesamtheit seiner Bilder liegen in einer durch einen senkrechten Querschnitt hindurchgehenden Ebene in den Punkten eines zweidimensionalen Gitters. Figur 1 zeigt ein solches Gitter für den Fall eines rechteckigen Querschnittes, wobei der Einfachheit halber angenommen wird, dass das Dipolmoment in der Querschnittsebene liegt.

Um für einen Wellenleiter, der sich nach dieser Methode behandeln lässt, die Lösung im Falle eines abgehackten Wellensignals zu erhalten, muss man nur den ursprünglichen Dipol sowie seine sämtlichen Spiegelbilder synchron und nach ein und demselben, sonst aber beliebigen Zeitgesetze, etwa vom Zeitmoment  $t = 0$  an, schwingen lassen. Zu einer gegebenen Zeit  $t > 0$  besteht dann die Wellenbewegung in dem Wellenleiter aus der Welle des ursprünglichen Dipols sowie den Wellen aller seiner Bilder, von denen die Wellenbewegung in dem Zeitabschnitt  $(0, t)$  zu den Raumpunkten des Wellenleiters gelangen konnte. In jedem Raumpunkte  $P$  des Wellenleiters setzt sich somit das elektromagnetische Feld aus der Wellenbewegung zusammen, die von dem ursprünglichen Dipol sowie allen seinen Bildern ausgestrahlt wurde, die sich in einer Kugel befinden, deren Mittelpunkt in  $P$  liegt und deren Radius gleich  $ct$  ist.

( $c$  = Lichtgeschwindigkeit). Die Wellenbewegung in  $P$  wird somit stets durch die Superposition einer endlichen Anzahl von Kugelwellen erhalten. Man kann also in dem betrachteten Spezialfalle ganz einfach und elementar den sukzessiven Aufbau der Wellenbewegung verfolgen. Dies wird durch die Tatsache bedingt, dass hier (wie aus der Sommerfeldschen Theorie der Beugung an einem



Figur 1  
Der ursprüngliche Dipol und seine Bilder.

Keil oder Winkelspiegel bekannt ist) nur Reflexionen, aber keine Beugungserscheinungen auftreten.

Die angegebene Entstehungsweise der Wellenbewegung bestätigt zunächst im betrachteten Spezialfall das Ergebnis unserer allgemeinen Überlegungen in Abschnitt 1. Die von den einzelnen Dipolbildern emittierten Wellen entsprechen den an den Wänden des Wellenleiters reflektierten Strahlungen. In Figur 1 wurden in jedem zu einem Dipolbild gehörigen Rechteck die Wände  $A_1, A_2, B_1, B_2$  eingetragen, an denen die ursprüngliche Strahlung reflektiert werden musste, um die von dem betreffenden Bildpunkte ausgehende Strahlung zu ergeben. Der Reihenfolge der Wände ist dabei keine besondere Bedeutung beizumessen. Die Strahlung, die von dem rechts oben gelegenen, mit  $A_1 A_2 B_2$  bezeichneten Dipolbild ausgeht, können wir uns durch Reflexion an der Ebene  $A_1$ , sodann an der Ebene  $B_2$  (es ergibt sich auf diese Weise eine Strahlung, die dem Dipolbilde  $A_1 B_2$  entspricht) und schliesslich an der Ebene  $A_2$  entstanden denken. Wir können uns aber auch vorstellen, dass diese Welle durch sukzessive

Reflexionen an den Ebenen  $B_2$ ,  $A_1$  und  $A_2$  zustande kommt. Durch eine Reflexion an den gleichen Ebenen (in der Reihenfolge  $A_2$ ,  $A_1$ ,  $B_2$  oder  $B_2$ ,  $A_2$ ,  $A_1$ ) entsteht aber auch eine Strahlung, die wir in der Figur 1 dem links oben ebenfalls mit  $A_1 A_2 B_2$  bezeichneten Dipolbilde zuordnen. Unter der Annahme, dass der strahlende Dipol in einer Querschnittsebene liegt, sind in der Figur 1 die Lagen der Dipolbilder durch entsprechende Pfeile angedeutet. Man erkennt, dass das ganze Dipolgitter in vier ineinandergestellte einfache Dipolgitter zerfällt, von denen jedes einer bestimmten, durch Pfeile angedeuteten Dipolrichtung entspricht. Der ursprüngliche Dipol liegt in dem Felde, in dem keine Buchstaben eingetragen sind. Die Längen der Seiten des Periodizitätsrechteckes werden durch die doppelten Seitenlängen  $2a$  und  $2b$  des Rechteckes gegeben, das den Querschnitt des Wellenleiters darstellt.

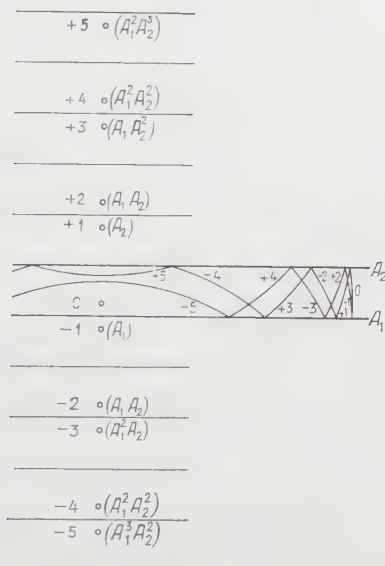
Die Wellenfronten der von den einzelnen Dipolbildern ausgehenden Kugeln stellen die Wellenfronten der einzelnen, an den Wänden des Wellenleiters reflektierten Wellen dar. Da zur Zeit  $t$  diese Wellenfronten auf Kugeln mit den Radien  $ct$  liegen, deren Mittelpunkte sich in den einzelnen Dipolbildern befinden, bestätigt es sich, dass die vorderste Wellenfront, die vom ursprünglichen Dipol stammt, kugelförmig ist und dass das elektromagnetische Feld auf ihr und knapp hinter ihr durch die freie Strahlung dieses Dipols gegeben wird. Auch alle nachfolgenden Wellenfronten sind Kugelflächen. Dass alle diese Wellenfronten in ihren Schnittkurven mit den Wänden des Wellenleiters miteinander zusammenhängen, folgt aus ganz einfachen elementargeometrischen Betrachtungen.

Einen Begriff von der gegenseitigen Lage der von den einzelnen Dipolbildern stammenden Wellenfronten vermittelt Figur 2. Sie stellt die Wellenfronten einer linearen Dipolreihe (etwa  $\dots A_1^2 A_2$ ,  $A_1 A_2$ ,  $A_1$ , ursprünglicher Dipol,  $A_2$ ,  $A_1 A_2$ ,  $A_1 A_2^2$ ,  $\dots$ ) in einer durch sie hindurchgehenden Ebene dar. Die Wellenfronten tragen die aus der Figur 2 zu entnehmenden Nummern der Dipolbilder, von denen sie ausgestrahlt wurden. Man sieht, dass alle sukzessiven Wellenfronten miteinander zusammenhängen und dass sie sich an der vordersten Wellenfront zusammendrängen. Es ist nicht schwer, sich klarzumachen, dass, je weiter die vorderste Wellenfront vorrückt, eine stets wachsende Anzahl nachfolgender Wellenfronten sich immer enger an sie anschliesst.

Um sich in dem betrachteten Spezialfall einen quantitativen Einblick in die Beschaffenheit des gesamten Feldes zu verschaffen, muss man nur von einer entsprechenden Darstellung der im rein periodischen Fall herrschenden Verhältnisse ausgehen. In diesem Fall kann man nämlich das in einem Beobachtungspunkte  $P$  des Wellenleiters auftretende Feld im wesentlichen mit Hilfe der Methode der stationären Phase berechnen. Dabei muss jedoch vorausgesetzt werden, dass die Entfernung des Punktes  $P$  von der Gitterebene im Vergleich mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  des rechteckigen Querschnittes hinreichend gross ist. Man hat die Rechnung zunächst für jedes einzelne der vier einfachen Dipol-



gitter durchzuführen, aus denen das gesamte in Figur 1 dargestellte Dipolgitter besteht [8], [1]. Das Ergebnis der Rechnung kann man dahin zusammenfassen, dass die in  $P$  eintreffende Strahlung in erster Näherung von gewissen um « wirksame Punkte » gelegenen « wirksamen Bereichen » zu kommen scheint, von denen jeder nur eine relativ kleine Gruppe von Dipolbildern umfasst. Vom Punkte  $P$  aus gesehen, liegen die wirksamen Punkte in Richtungen, in denen



Figur 2

Die Wellenfronten der Wellen des ursprünglichen Dipols und seiner Bilder.

das ebene Dipolgitter gemäß der Fraunhoferschen Beugungstheorie die Spektren der verschiedenen Ordnungen ausstrahlt. Dies findet statt, trotzdem wir es hier nicht mit der Fraunhoferschen, sondern mit der Fresnelschen Beugung zu tun haben. Wie aus der Figur 1 zu ersehen ist, haben von den vier ineinandergestellten einfachen Dipolgittern je zwei antiparallele Dipolmomente. Dies bedeutet, dass in erster Näherung das Spektrum nullter Ordnung, das senkrecht zur Dipolebene ausgestrahlt wird, nicht auftritt. Dieser Umstand hat aber nicht zur Folge, dass auch die Spektren anderer Ordnungen verschwinden. Bei schiefer Ausstrahlung treten nämlich zwischen den Strahlungen der vier ineinandergestellten einfachen Dipolgitter, da sie in der Gitterebene gegeneinander verschoben sind, noch zusätzliche Phasendifferenzen auf. Dass das Spektrum nullter Ordnung verschwindet, wird sozusagen durch das Verschwinden des Strukturfaktors bedingt.

Die Wellenfelder, die von den einzelnen wirksamen Punkten ausgestrahlt werden, können in der ersten, das heisst Fraunhoferschen Näherung als eine Superposition eines elektrischen und magnetischen Wellentypus von der gleichen Ordnung angesehen werden. Im Falle eines rechteckigen Querschnitts fallen nämlich die Phasengeschwindigkeiten dieser beiden Wellentypen im allgemeinen miteinander zusammen.

Aus der obigen Darstellung des Mechanismus des Zustandekommens der Wellenbewegung im periodischen Falle kann man bei abgehackten periodischen Signalen unmittelbar einige Folgerungen ziehen. Dabei soll angenommen werden, dass die vom ursprünglichen Dipol ausgesandte Strahlung nach einer sehr kurzen Anlaufzeit (die notwendig ist, damit die Strahlung an der Wellenfront die Bedingungen für die bewegten elektromagnetischen Sprungflächen erfüllt) praktisch periodisch wird. Ist der Radius  $ct$  der Kugel um  $P$  so klein, dass in dem Kreise, die diese Kugel aus der Dipolebene herausschneidet, nur der ursprüngliche Dipol liegt, so besteht im Punkte  $P$  die gleiche elektromagnetische Strahlung wie bei der freien Ausbreitung. Sobald aber dieser Schnittkreis bereits so gross geworden ist, dass er den ganzen wirksamen Bereich um den ursprünglichen Dipol enthält, so verschwindet in  $P$  die Strahlung in erster Näherung, da die von den vier verschiedenen einfachen Dipolgittern stammenden Wellen einander durch Interferenz zerstören<sup>3)</sup>.

Die Intensität der Strahlung steigt erst wieder an, sobald der Schnittkreis einen der übrigen wirksamen Bereiche erreicht. Dieser Zeitpunkt markiert den Beginn der Ankunft der Hauptwelle des elektrischen und magnetischen Wellentypus, denen der betreffende wirksame Punkt entspricht. Man kann dabei erwarten, dass dieses Anwachsen durch ein Fresnelsches Integral gegeben wird. Wie aus der Kirchhoffschen Theorie der Fresnelschen Beugungserscheinungen bekannt ist (vgl. [7]), ergibt sich nämlich immer ein solches Integral, sobald nur über ein Teilgebiet des wirksamen Bereiches integriert wird. Dass dies tatsächlich zutrifft, zeigt eine von PEARSON [3] im akustischen Falle abgeleitete, hier aber unverändert geltende Näherungsformel<sup>4)</sup>.

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von einem ins Auge gefassten wirksamen Punkt kommenden Hauptwelle festzulegen, bezeichnen wir mit  $\alpha$  den Winkel, den im Beobachtungspunkte  $P$  die Blickrichtung nach dem entsprechenden wirksamen Punkte mit der Normalen an die Gitterebene ein-

<sup>3)</sup> Auch in dem von SOMMERFELD [9] behandelten Falle eines in einem dispergierenden Medium sich fortplantenden abgehackten Wellensignals ist die Intensität der Feldstärken in den Vorläufern äusserst gering. Anders liegen die Verhältnisse im Falle eines akustischen Wellenleiters mit schallharten Wänden. Wegen der Grenzbedingung  $\partial\varphi/\partial n = 0$  für das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  haben die vier ineinandergestellten einfachen Schallquellengitter alle die gleichen Phasen. Hier findet also kein Absinken der Wellenamplitude in den Vorläufern statt.

<sup>4)</sup> Im akustischen Falle sind die Beiträge der übrigen wirksamen Bereiche kleiner als die des zentralen, in dem die ursprüngliche Schallquelle liegt. Infolge der zwischen den vier ineinandergestellten einfachen Gittern auftretenden Phasendifferenzen wird ja die Gesamtstrahlung eines solchen wirksamen Bereiches geschwächt.



schliesst. Sei  $t_H$  der Zeitpunkt, in dem die Hauptwelle in dem Punkte  $P$  eintrifft. Die Entfernung des Punktes  $P$  von der Gitterebene wird dann durch  $z = c t_H \cos \vartheta$  gegeben. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Hauptwelle wird somit gleich  $v_G = z/t_H = c \cos \vartheta$ .

Der Winkel  $\vartheta$  wird durch die gleiche Bedingung festgelegt, die im Falle der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen für ein ebenes rechteckiges Gitter die Richtung der Fortpflanzung der Spektren der verschiedenen Ordnungen bestimmt. Für ein Spektrum, dessen Ordnung durch die ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  festgelegt wird, wird  $\cos \vartheta_{mn}$  durch den Ausdruck

$$\cos \vartheta_{mn} = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

gegeben. Für die Geschwindigkeit  $v_i$  ergibt sich somit der bekannte Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit in einem Wellenleiter vom rechteckigen Querschnitt

$$v_G = c \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}.$$

Auch der Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = c/\cos \vartheta_{mn}$  lässt sich aus dem verwendeten Bilde einfach ermitteln.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CHIEN, W. Z., INFELD, L., POUNDER, J. R., STEVENSON, A. F., und SYNGE, J. L., *Canad. J. Res. [A]* 27, 69 (1949).
- [2] GAJEWSKI, R., *Acta phys. polon.* 15, 25 (1956).
- [3] PEARSON, J. D., *Quart. J. Mech.* 6, 313 (1953).
- [4] RUBINOWICZ, A., *Phys. Z.* 27, 707 (1926).
- [5] RUBINOWICZ, A., *Acta phys. polon.* 13, 115 (1954).
- [6] RUBINOWICZ, A., *Acta phys. polon.* 14, 209 (1955).
- [7] RUBINOWICZ, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung* (Verlag Pafstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, im Druck).
- [8] SLATER, J. C., *Microwave Transmission* (McGraw-Hill, New York 1942).
- [9] SOMMERFELD, A., *Ann. Phys. (4)*, 44, 177 (1914).

#### Summary

The electromagnetic radiation in a wave guide due to an electric dipol may be considered as consisting of the incident primary radiation and the waves generated by successive reflections from the walls of the pipe. This picture was applied to study the propagation of a cut-off periodic wave, first generally for any section of the wave guide and then more in detail for a rectangular section. The field consists in any given moment after the beginning of the dipol radiation of a finite number of such waves, the fronts of which are generally electromagnetic wave surfaces. In the foremost wave front and the points just behind it the electromagnetic field is given by the primary radiation. But very soon the field subsides in the forerunner till the arrival of the first main wave.

(Eingegangen: 21. Juli 1955.)

# The Rolling-Up of a Vortex Sheet

By MARVIN STERN, San Diego, California<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

A surface of discontinuity or vortex sheet is known to exist behind a wing of finite span [1]<sup>2)</sup>. Further, this sheet, which is shed planar, is known to roll up from its tips. Tests have indicated a behavior as shown below.

This, and related problems such as the rolled vortex sheet occurring in flow around a sharp corner, were first discussed by PRANDTL. In lectures published in Berlin in 1924, he presented some of this work where he had represented the rolled sheet in the form of a logarithmic spiral.

In 1931, KADEN [2] investigated this problem both experimentally and theoretically. As an approximation in the theoretical treatment, a two-dimensional time dependent flow was considered rather than the three-dimensional steady state problem that corresponds to Figure 1.

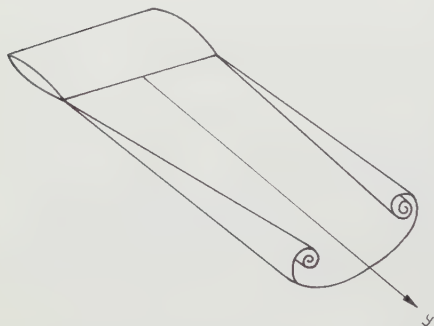


Figure 1

Vortex sheet behind wing of finite span.

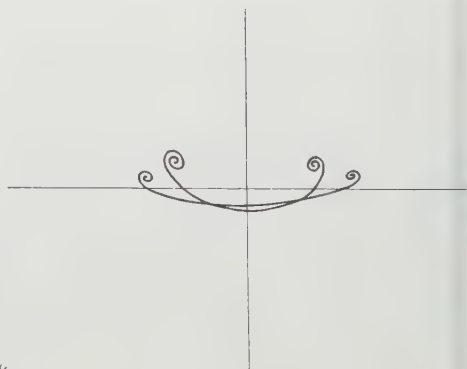


Figure 2

Time dependent rolling of vortex sheet.

A  $\Delta y$  segment of the vortex sheet is chosen. A coordinate system is fixed to this segment while the wing is allowed to move relative to it with a velocity  $-v$ . The influence of the entire sheet on this segment is assumed to differ little from a cylindrical extension of it. The resulting two-dimensional time dependent flow is then considered to represent the real flow with the correspondence  $y = vt$ .

<sup>1)</sup> Convair. A Division of General Dynamics Corporation.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 342.

A further simplification is effected by assuming that the distance between vortex cores in Figure 2 is great enough so that their influence upon each other is small. Half of the sheet can then be studied alone, thus finally reducing the problem to the analogous one of the semi-infinite vortex sheet.



Figure 3  
Rolling of semi-infinite vortex sheet.

In this latter problem, KADEN recognizes the fact that no fundamental length appears. It is concluded, then, that the resulting motion of the vortex sheet must consist merely of homogeneous expansions, thus continually yielding geometrically similar figures with time.

In 1935, WESTWATER [3] approximated the continuous vorticity distribution along the sheet by a set of discrete vortices and performed a step-by-step numerical calculation giving the form of the sheet at various increments of time. His results showed fairly good agreement with KADEN'S.

We will consider the problem of the two-dimensional time dependent flow associated with the semi-infinite vortex sheet. Although KADEN obtains an approximation to the form of the spiral curve, it would be difficult to obtain the associated flow field from KADEN'S results. We will work with the complex potential of the flow, thus yielding information on the entire flow field.

In contrast with KADEN, we obtain differential equations describing the flow field that holds over the whole plane, rather than just conditions that are to be satisfied locally at the spiral core. We thus have means of determining series expansions for our solutions, whereas KADEN can properly only give the leading term in an asymptotic behavior at the spiral core.

At the spiral core, our solution agrees with that of KADEN. We find the nature of the essential singularity there. In addition, we find several more terms and then show means for obtaining successive terms uniquely.

Although we were unable to develop an expansion at infinity that satisfied our differential equations, we did show consistency of our assumed asymptotic behavior there.

## 2. Formulation of the Problem

We consider the problem of the rolling up of a semi-infinite vortex sheet. Specifically, we take the two-dimensional potential flow about a semi-infinite plate,  $W = 2a(z)^{1/2}$ .

Consider the plate to be instantaneously withdrawn, leaving the semi-infinite vortex sheet with vorticity distribution equal to the velocity jump that existed across the plate  $\gamma(x) = 2a/(x)^{1/2}$ . The flow about this vortex sheet is identical now with the flow that took place about the semi-infinite plate.

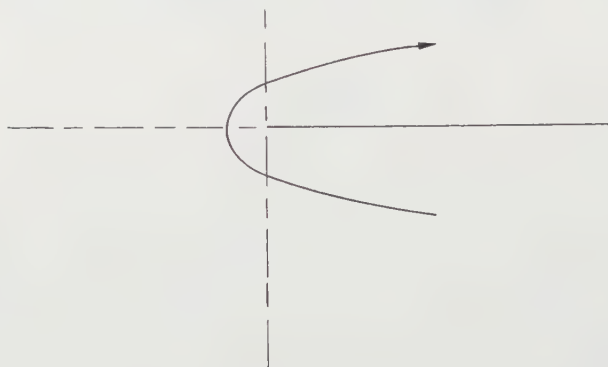


Figure 4  
Flow around semi-infinite plate.

Since the velocity at any point adjacent to the sheet directly above is the exact negative of that directly below, there is no unbalanced pressure across the sheet and therefore no motion of the sheet might be expected. This condition is violated, however, at the origin. Here the infinite velocity around the origin results in a force in the horizontal direction at this corner (the so-called leading edge suction). Due to the inability of the sheet to resist any force, the static equilibrium is expected to be upset, and a motion or curling of the sheet emanating from this free edge is expected.

Our problem, then, is the two-dimensional time dependent motion of the curling of this sheet and the determination of its associated flow field.

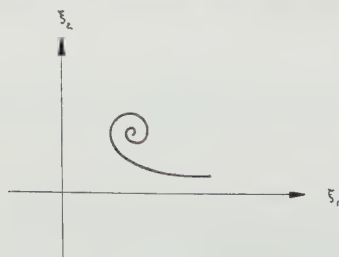


Figure 5  
Rolled sheet at time  $t = 1$ .  $|\xi_\sigma| = 1$ ,  
 $\sigma = \text{arc length (is time independent)}$ .

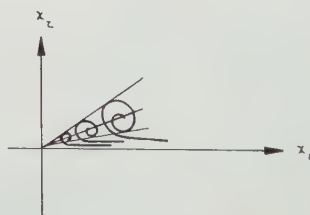


Figure 6  
Similarity transformation in time.  
The vortex sheet is represented  
by  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$  where  $\mathbf{x} = t^n \xi$ .

Modeling after KADEN, we limit ourselves to the study of solutions to this problem that are homogeneous in time. We assume one time independent curve,  $\xi(\sigma)$ , representing the curled vortex sheet at time  $t = 1$ .

In the course of time, the curve shown in Figure 5 representing the curled vortex sheet is assumed to magnify according to its homogeneous dependence upon time, giving geometrically similar curves generated from rays through the origin. Thus, on the  $(x_1, x_2)$ -plane, the time dependent curves would appear as shown in Figure 6.

### *Conditions to Be Satisfied*

On the  $(x_1, x_2)$ -plane, the hydrodynamic equations of conservation of mass and irrotationality of the flow field will be satisfied by finding an analytic function that characterizes the complex potential,  $\chi$ , of the flow field. The boundary conditions to be satisfied are such that the flow at any time adjacent to the vortex sheet must be tangential to it. In addition, it must be required that there be no pressure differential across the vortex sheet. These conditions will be satisfied on the  $(x_1, x_2)$ -plane; the homogeneity in time will lead to equations to be satisfied on the  $(\xi_1, \xi_2)$ -plane.

### *Potential Flow*

We assume that there exists a time dependent velocity potential,  $\varphi(x)$ , which is the real part of an analytic function, such that the velocities in the flow field are given by the gradient  $\mathbf{u} = \nabla_x \varphi$ . Associated with this  $\varphi(x)$  there will exist a time independent velocity potential,  $\Phi(\xi)$ , also the real part of an analytic function. These potentials are related homogeneously in time,

$$\varphi(x) = t^m \Phi(\xi).$$

### *Boundary Condition*

The boundary condition to be satisfied is the condition of sliding on the  $(x_1, x_2)$ -plane. For all time  $t$ , points adjacent to or on the vortex sheet can have velocity parallel to the curve only. Since points of the geometric curve have velocity  $\mathbf{x}_t$  due to the homogeneous expansion itself, the sliding condition on the resulting velocity is

$$\mathbf{u} - \mathbf{x}_t \parallel \xi_\sigma$$

for all  $t$ ; i. e., there is a scalar  $F$  such that for all  $t$

$$\nabla_x \varphi - \mathbf{x}_t = -F(\sigma, t) \xi_\sigma.$$

Since  $\mathbf{x}_t = n t^{n-1} \xi$ , we attain homogeneity in  $t$  by requiring that

$$F(\sigma, t) = t^{n-1} F(\sigma), \quad \nabla_x \varphi = t^{n-1} \nabla_\xi \Phi.$$

To satisfy the latter equation, we require

$$\varphi(x) = t^{2n-1} \Phi(\xi).$$

Dividing through by the homogeneity factor,  $t^{n-1}$ , the sliding condition is written on the  $(\xi_1, \xi_2)$ -plane as

$$\nabla \Phi = n \xi - F(\sigma) \xi_\sigma. \quad (1)$$

The vortex sheet represents a curve across which the potential is discontinuous. If we define  $\Phi^+$  as the value of  $\Phi$  on the concave side of the curve, and  $\Phi^-$  on the convex side, then the mean and jump of potential across the curve can be written as

$$\text{mean } \tilde{\Phi} = \frac{1}{2} (\Phi^+ + \Phi^-), \quad \text{jump } \hat{\Phi} = \Phi^+ - \Phi^-.$$

Equation (1) can then be written for  $\tilde{\Phi}$  and  $\hat{\Phi}$

$$\nabla \tilde{\Phi} = n \xi - \tilde{F} \xi_\sigma, \quad (1)$$

$$\nabla \hat{\Phi} = -\hat{F} \xi_\sigma. \quad (1)$$

#### *Pressure Condition*

The time dependent Bernoulli equation

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (V\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

can be written on either side of the time dependent discontinuity curve.

Since pressure is continuous across this curve, we find

$$\hat{\varphi}_t + V\tilde{\varphi} \nabla \hat{\varphi} = 0.$$

Transcribing to the time independent plane, we find, to within a homogeneity factor of  $t^{2n-2}$ ,

$$(2n-1) \hat{\Phi} + (-n\xi + \nabla \tilde{\Phi}) \nabla \hat{\Phi} = 0.$$

Insertion of (1) yields

$$(2n-1) \hat{\Phi} - \tilde{F} \hat{\Phi}_\sigma = 0. \quad (2)$$

### 3. Determination of the Degree of Homogeneity

The degree of homogeneity in time is obtained by satisfaction of the prescribed asymptotic behavior at infinity on both the  $\mathbf{x}$ - and  $\xi$ -planes.



*Behavior for Large  $\sigma$* 

On the  $\xi$ -plane we require that the curve becomes asymptotic to the  $\xi_1$ -axis.

$$\xi \sim \{\sigma, 0\}.$$

For the potential, we require that its behavior tends to that of flow around the slit; i.e., we require asymptotically, as  $\sigma \rightarrow \infty$

$$\Phi \sim -2 a(\sigma)^{1/2}, \quad \dot{\Phi} \sim +a(\sigma)^{1/2}.$$

The asymptotic velocity behavior would then be, as required,

$$V\Phi \sim \pm a(\sigma)^{-1/2}\{1, 0\}, \quad V\tilde{\Phi} \sim 0, \quad V\hat{\Phi} \sim 2 a(\sigma)^{-1/2}\{1, 0\}.$$

From equation (1) we obtain

$$\tilde{F} \sim n\sigma, \quad \dot{F} \sim -2 a(\sigma)^{-1/2}.$$

Insertion into (2) yields

$$(2n - 1) 4 a(\sigma)^{1/2} - n\sigma 2 a(\sigma)^{-1/2} \sim 0$$

which gives

$$n = \frac{2}{3}.$$

Further, even on the  $x$ -plane we require the potential to behave as for flow around a slit regardless of time.

$$\varphi \sim \pm 2 a(x_1)^{1/2} \quad \text{independent of time}.$$

But

$$\begin{aligned} \varphi &= t^{2n-1} \Phi \\ &\sim \pm t^{2n-1} 2 a(\sigma)^{1/2} \\ &\sim \pm t^{2n-1} 2 a(\xi_1)^{1/2} = \pm t^{2n-1} 2 a t^{-n/2} (x_1)^{1/2}. \end{aligned}$$

To attain the correct asymptotic behavior of  $\varphi$  for all time, we should take  $n = 2/3$ .

*Motion of Vortex Particle*

In considering the motion of the vortex particles, it is realized that this motion is a composite of the geometric magnification of the curve homogeneously in time and the movement of the vortex particles along the curve. The value of  $\sigma$  affixed to the vortex particle is now time dependent,  $\sigma = \sigma(t)$ .

The motion of the particle is given by

$$\mathbf{x} = t^{2/3} \tilde{\xi}(\sigma), \quad \text{where} \quad \sigma = \sigma(t).$$

The velocity of the vortex particle, given by the total derivative  $d\mathbf{x}/dt$ , can alternately be described as the mean velocity across the discontinuity surface

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla \tilde{\varphi}.$$

Transcription to the  $\xi$ -plane yields

$$\frac{2}{3} \tilde{\xi} + t \frac{d\tilde{\xi}}{dt} = \nabla \tilde{\Phi}.$$

Combining this with (1), the motion of the vortex particle is found to be

$$t \frac{d\sigma}{dt} = -\hat{F}.$$

#### *Behavior for Large $\sigma$*

For large  $\sigma$ ,  $\tilde{F} \sim 2\sigma/3$ , and the motion is given by

$$t \frac{d\sigma}{dt} \sim -\frac{2}{3} \sigma.$$

It can be noted that for increasing time, vortex particles move to the left, towards the spiral core.

Integration yields

$$t^{2/3} \sigma = \text{const}$$

or

$$x_1(t) \sim x_1(0).$$

This means that as

$$\sigma(t) \rightarrow \infty, \quad x_1(t) \rightarrow x_1(0).$$

But since  $x_1(t) \sim t^{2/3} \sigma$ , it follows that  $t \rightarrow 0$ .

In other words, going backwards in time, to time equal zero, the vortex particles on the curled-up sheet go continuously back toward their original positions on the uncurled slit.

#### **4. Extension to Complex Potentials**

We assume the existence of the following analytic functions over the plane,  $\zeta = \xi_1 + i \xi_2$

$$\chi = \Phi + i \Psi, \quad \tilde{\chi} = \tilde{\Phi} + i \tilde{\Psi}, \quad \hat{\chi} = \hat{\Phi} + i \hat{\Psi}$$

where

$$\chi = \tilde{\chi} + \frac{1}{2} \hat{\chi}.$$

We assume further that in approaching the curve from the concave side,

$${}^+\chi \text{ approaches } \tilde{\chi}, \quad {}^+\chi \text{ approaches } \hat{\chi}$$

where  $\tilde{\chi}$  and  $\hat{\chi}$  are defined on the curve as the jump and mean of the potential  $\chi$  across the curve.



Figure 7

$\zeta$ -plane. Analytic continuation of  $\tilde{\chi}$  and  $\hat{\chi}$ .

Since  $d\chi/d\zeta = \Phi_{\zeta_1} - i\Phi_{\zeta_2}$ , equation (1) on the curve can be satisfied by

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{2}{3} \bar{\zeta} - I \bar{\zeta}_{\sigma}.$$

Equation (1) on the curve is satisfied simply by taking  $\Psi$  const on the curve. We can arbitrarily choose this constant zero, thereby making equations (1) satisfied by

$${}^+\chi = {}^+\bar{\chi}$$

on the curve.

Equation (2), which is also defined only on the curve, can be satisfied by

$$\frac{1}{3} \chi = \tilde{F} \frac{d\chi}{d\zeta} \zeta_{\sigma}$$

over the whole plane.

Combination with equation for (1) yields

$$3 \frac{d\chi}{d\zeta} - 2 \bar{\zeta} - \chi \frac{d\bar{\zeta}}{d\chi} = 0. \quad (3)$$

This equation then satisfies equations (1), (1), and (2), all on the curve. This equation cannot yet hold over the whole plane as it stands, however, for it

involves complex conjugates which would violate the assumed analyticity of the complex potentials.

We consider  $\chi$  as the independent variable with  $\zeta$  a function of  $\chi$ ;  $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{\chi})$ . We define the function  $\zeta^*(\chi)$  as

$$\zeta^*(\chi) = \bar{\zeta}(\bar{\chi}).$$

(If  $\zeta$  were expressed as a power series in  $\chi$ ,  $\zeta^*$  would be equivalent to taking complex conjugates of all of the coefficients in the series.)

Since  $+\chi = +\bar{\chi}$  on the curve, it follows that  $\zeta^*(\chi) = \bar{\zeta}(\bar{\chi})$  on the curve.

Our equation (3) can now be rewritten

$$3 \frac{d\chi}{d\bar{\zeta}} = 2 \zeta^* - \chi \frac{d\zeta^*}{d\chi}. \quad (3^*)$$

Equation (3\*) now not only satisfies the required relationships on the curve but also allows for analytic continuation over the plane, since a function dependent upon  $\zeta^*$  can be analytic whereas a function dependent upon  $\bar{\zeta}$  throughout the plane cannot.

### Continuation

We have assumed everywhere

$$\chi = \chi + \frac{1}{2} \bar{\chi}.$$

The mean and jump of the potential across the curve have been defined as

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2} (+\chi + -\chi), \quad \hat{\chi} = +\chi - -\chi$$

where  $\tilde{\chi}$  and  $\hat{\chi}$  are assigned values on the curve. Substituting for  $+\chi$  and  $-\chi$  their definitions from above which hold everywhere, even at the curve,

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2} \left[ \left( +\tilde{\chi} + \frac{1}{2} +\chi \right) + \left( -\tilde{\chi} + \frac{1}{2} -\chi \right) \right] = +\chi$$

on the curve. This has been equated to  $+\chi$  on the curve since  $+\chi = \tilde{\chi}$  on the curve. Collection of terms of the right-hand equation yields

$$+\chi - -\chi = \frac{1}{2} (+\chi + -\chi).$$

Now define  $-\chi(\zeta) = +\chi(\zeta e^{2\pi i})$ ; i. e.,  $-\chi$  is the value that  $+\chi$  assumes on the next sheet of the Riemann surface. We write

$$\chi(\zeta) - \chi(\zeta e^{2\pi i}) = \frac{1}{2} [\chi(\zeta) + \chi(\zeta e^{2\pi i})].$$

Since this is an equation in analytic functions and approaches the equation

$${}^+\chi - {}^-\chi = \frac{1}{2} ({}^+\chi + {}^-\chi)$$

on the sheet, it follows that the equation holds everywhere.

As in the differential equation (3\*), we use  $\chi$  as the independent variable. Substituting the symbol  $\lambda = \chi(\zeta)$  and further introducing the symbol

$$l = l(\lambda) = \chi(\zeta e^{2\pi i}),$$

we have

$$\zeta(l) = \zeta(\lambda) e^{2\pi i}, \quad \chi(\lambda) = \chi(l) = \frac{1}{2} (\lambda + l).$$

Collecting equation (3\*) and the two continuation equations yields finally,

$$3\chi' = \{2\zeta^* - \lambda\zeta^{*'}\}\zeta', \quad \chi(\lambda) = \chi(l) = \frac{1}{2} (\lambda + l), \quad \zeta(l) = \zeta(\lambda) \quad (4)$$

where  $\lambda$  is the independent variable and prime indicates differentiation with respect to  $\lambda$ .

The three dependent variables in these three equations are  $\chi(\lambda)$ ,  $\zeta(\lambda)$ , and  $l(\lambda)$ . It should be noted that for  $\lambda$  real,  $\zeta(\lambda)$  represents the curve itself, or more specifically, the concave side of the curve.

## 5. Behavior at Center of Spiral

Introduce

$$Z = \zeta - \zeta_0, \quad X = \chi - \frac{2}{3} \zeta \zeta_0^*$$

where  $\zeta_0$  is the location of the center of the spiral. The equations remain

$$3X' = \{2Z^* - \lambda Z^{*'}\}Z', \quad X(\lambda) = X(l) = \frac{1}{2} (\lambda + l), \quad Z(l) = Z(\lambda). \quad (5)$$

Our procedure now is to develop expansions that will approximate the solution in the neighborhood of the origin.

From the unrolled sheet we know that  $\lambda$  must go to zero at the origin. Further, from our assumption that the sheet continually curls and expands homogeneously in time, it follows that the spiral must be unending in any neighborhood including the origin. Since our curve is defined by  $\lambda$  real, this suggests a representation for  $Z(\lambda)$  of the form

$$Z = f(\lambda) e^{ig(\lambda)}$$

where the functions  $f$  and  $g$  satisfy the relations

$$f(\lambda) = f^*(\lambda), \quad g(\lambda) = g^*(\lambda),$$

and asymptotically,

$$f(\lambda) \rightarrow 0, \quad g(\lambda) \rightarrow \infty \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0.$$

The equation  $Z(l) = Z(\lambda)$  implies that an expansion for  $l$  must start with a linear term in  $\lambda$ .

No assumption on  $X(\lambda)$  need be made. This variable can be essentially eliminated by insertion of the assumed expansion for  $Z(\lambda)$  into the first equation and then integrating to obtain an expansion for  $X(\lambda)$ . This result, together with an assumed expansion for  $l(\lambda)$ , can then be inserted into the second equation.

We will assume

$$Z \sim a \lambda^\alpha e^{-i b \lambda^{-\beta}}.$$

Or, more generally, we take

$$f(\lambda) = a \lambda^\alpha [1 + R(\sigma)], \quad g(\lambda) = -\sigma^{-1} [1 + P(\sigma)]$$

where

$$\sigma = b^{-1} \lambda^\beta, \quad R(\sigma) = \sum_{v=1} \varrho_v \sigma^v, \quad P(\sigma) = \sum_{v=1} p_v \sigma^v,$$

and both  $\varrho_v$  and  $p_v$  are real.

### *Evaluation of $\alpha$ and $\beta$*

Substitution of the assumed form for  $Z(\lambda)$  into the first equation of (4) yields

$$3 X' - \lambda f^2 g'^2 + 2 i f^2 g' + 2 f f' - \lambda f'^2.$$

The two lowest order terms are

$$\begin{aligned} -\lambda f^2 g'^2 &= a^2 \beta^2 \sigma^{-2} \lambda^{2\alpha-1} [1 - 2 \sum \{ \varrho_v - p_v (v-1) \} \sigma^v + \dots] \\ 2 i f^2 g' &= 2 i a^2 \beta \sigma^{-1} \lambda^{2\alpha-1} [1 + \dots]. \end{aligned}$$

Then the first two terms in the differential equation are

$$X' = \frac{1}{3} a^2 \beta^2 \lambda^{2\alpha-1} \left[ -\sigma^{-2} + 2 \left( -\varrho_1 + \frac{i}{\beta} \right) \sigma^{-1} + \dots \right].$$

Integration gives the leading terms in  $X$

$$X = \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 \lambda^{2\alpha} \left[ -\frac{1}{2\alpha-2\beta} \sigma^{-2} + \frac{2}{2\alpha-\beta} \left( -\varrho_1 + \frac{i}{\beta} \right) \sigma^{-1} + \dots \right].$$



We now assume an expansion for  $l(\lambda)$ .

$$l = \lambda \left[ 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \kappa_v \sigma^v \right].$$

Substitution into the second equation,

$$X(l) - X(\lambda) = -\frac{1}{2} (\lambda + l),$$

yields

$$\begin{aligned} X(l) - X(\lambda) &= \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 \lambda^{2\alpha} \left[ -\kappa_1 \sigma^{-1} + \left\{ -\kappa_2 - \frac{2\alpha - 2\beta - 1}{2} \kappa_1^2 + 2 \left( -\varrho_1 + \frac{i}{\beta} \kappa_1 \right) \right\} + \dots \right] \\ &= -\lambda - \frac{1}{2} \kappa_1 \lambda \sigma - \dots. \end{aligned}$$

Since this should be an identity in  $\lambda$ , we find by equating both exponents and coefficients of these first two terms from either side of the equation

$$2\alpha - \beta = 1, \quad \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2} (\beta + 1) \kappa_1^2. \quad (6)$$

We follow a similar procedure in the third equation

$$Z(l) = Z(\lambda) e^{i2\pi}.$$

Taking the logarithm

$$-i \left\{ s^{-1} [1 + P(s)] - \sigma^{-1} [1 + P(\sigma)] \right\} + \alpha \log \frac{l}{\lambda} + \log \frac{1 + R(s)}{1 + R(\sigma)} = 2\pi i$$

where

$$s = \sigma \left[ 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \kappa_v \sigma^v \right].$$

Again, by insertion of the expansions, the two lowest terms are

$$s^{-1} - \sigma^{-1} = -\beta \kappa_1 + \left[ -\beta \kappa_2 + \frac{\beta(\beta+1)}{2} \kappa_1^2 \right] \sigma + \dots,$$

$$\alpha \log \frac{l}{\lambda} = \alpha \kappa_1 \sigma + \dots$$

or

$$i\beta \kappa_1 + \left[ \alpha \kappa_1 + i\beta \kappa_2 - \frac{i\beta(\beta+1)}{2} \kappa_1^2 \right] \sigma + \dots = 2\pi i.$$

Satisfying the identity here yields

$$\kappa_1 = \frac{2\pi}{\beta}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2} (\beta + 1) \kappa_1^2 + \alpha \frac{i}{\beta} \kappa_1. \quad (7)$$

There are two determinations now for  $\kappa_2$ ; one from equation (6) and one from equation (7). Equating them yields

$$\varrho_1 = 0, \quad \alpha = 2$$

and then  $\beta = 3$  from the first equation of (6).

### *Comparison with Kaden*

Our result yields, to lowest orders terms,

$$Z \sim a \lambda^2 e^{-i b \lambda^{-3}}$$

where for real  $\lambda$ , this defines the spiral.

KADEN's result for the form of the spiral in the neighborhood of the origin is

$$r \sim c \vartheta^{-2/3}$$

or

$$Z \sim c \vartheta^{-2/3} e^{-i \vartheta}.$$

In the neighborhood of the origin, then, our results are equivalent with the correspondence

$$\vartheta = b \lambda^{-3}.$$

We find further that the mean of the potential,  $\chi(\lambda)$ , has a pole of order 2. The series for  $l(\lambda)$  gives

$$l = \lambda + \frac{2\pi}{3} \lambda^4 + \left( \frac{8}{9} \pi^2 + \frac{4}{9} \pi i \right) \lambda^7 + \dots$$

A map of the  $Z$ -plane onto the  $\lambda$ -plane would then show both sides of the spiral to first cusp at the origin and then separate as shown.

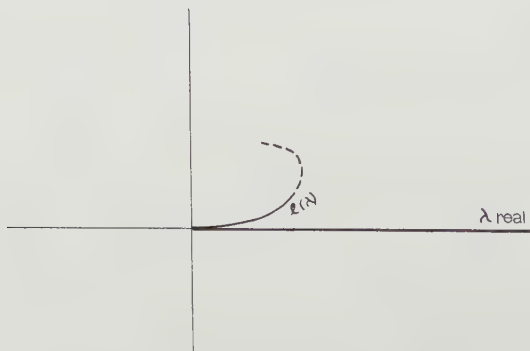


Figure 8  
Map of the spiral onto  $\lambda$ -plane.

## 6. Determination of Higher Order Terms

The procedure for determining higher order terms is clear. Substitution of the series into equations (5), and equating coefficients, yields two independent determinations of  $\kappa_m$  in terms of  $q_n$  and  $p_n$ .  $q_n$  and  $p_n$  are then successively determined. Several of these computations have been carried out and appear in the appendix.  $q_2, p_2, q_3, p_3$  have been computed and the spiral including these terms has been plotted.

It will now be shown that successively all coefficients are uniquely determined.

### *Successive Determination of $q_n, p_n$*

Consider first the equations obtained by equating the real parts of the two determinations of  $\kappa_{n+1}$ , where  $n \geq 1$ .

In equation (5), for  $X'$ , the contributing term is  $-\lambda f^2 g'/3$ . Of this, the contributing factor is

$$2\{q_n - (n-1)p_n\}\sigma^{n-1}.$$

Then

$$\kappa_1 \lambda [X(s) - X(\sigma)] = \cdots + [-\kappa_{n+1} + \cdots - 2\{q_n - (n-1)p_n\}\kappa_1 + \cdots] \sigma^n + \cdots,$$

$$\kappa_{n+1} = -2\{q_n - (n-1)p_n\}\kappa_1 + \cdots.$$

In equation  $Z(l) = Z(\lambda) e^{i2\pi}$ , the contributing term is  $s^{-1} P(s) - \sigma^{-1} P(\sigma)$ ,

$$-2\pi = \cdots + [-3\kappa_{n+1} + \cdots + (3n-1)p_n\kappa_1 + \cdots] \sigma^n + \cdots,$$

$$\kappa_{n+1} - (n-1)p_n\kappa_1 + \cdots.$$

Equating real parts of  $\kappa_{n+1}$ , gives

$$2q_n - (n-1)p_n \cdots.$$

Consider now the equations obtained by equating the imaginary parts of the two determinations of  $\kappa_{n+2}$ .

In the equation for  $X'$  there will be two contributions from  $i(2f^2 g'/3)$  and one from  $-\lambda f^2 g'^2/3$ . They yield

$$\kappa_1 \lambda^{-1} [X(l) - X(\lambda)]$$

$$= \cdots + \left[ -\kappa_{n+2} + \cdots + \frac{2i}{3} \kappa_{n+1} + \cdots + \frac{2i}{3} \{2q_n - (n-1)p_n\} \kappa_1 + \cdots \right.$$

$$\left. + \text{Im } \kappa_2 \{-2[q_n - (n-1)p_n] + \cdots\} \right] \sigma^{n+1} \cdots.$$

Substituting from real part of  $\kappa_{n+1}$  and imaginary part of  $\kappa_2$  in this equation yields

$$\begin{aligned}\kappa_{n+2} &= -\frac{2i}{3} 2\{\varrho_n - (n-1)p_n\}\kappa_1 + \frac{2i}{3}\{2\varrho_n - (n-1)p_n\}\kappa_1 \\ &\quad - \frac{2i}{3} 2\{\varrho_n - (n-1)p_n\}\kappa_1 + \dots, \\ \kappa_{n+2} &= \frac{2i}{3}\{-2\varrho_n + 3(n-1)p_n\}\kappa_1 + \dots.\end{aligned}$$

From equation  $Z(l) = Z(\lambda) e^{i2\pi}$  there is a contribution from each of the factors. Given in order, they are

$$\begin{aligned}[\dots + 2i\kappa_{n+1} + \dots + i3n\varrho_n\kappa_1 + \dots\{-3\kappa_{n+2} + \dots + 3(n-1)p_n\text{Im}\kappa_2\} \\ + \dots]\sigma^{n+1} + \dots.\end{aligned}$$

Substituting for  $\kappa_{n+1}$  and  $\text{Im}\kappa_2$  gives

$$\begin{aligned}\kappa_{n+2} &= \frac{2i}{3}(n-1)p_n\kappa_1 + \frac{2i}{3} \cdot \frac{3}{2}n\varrho_n\kappa_1 + \frac{2i}{3}(n-1)p_n\kappa_1 + \dots, \\ \kappa_{n+2} &= \frac{2i}{3}\left\{\frac{3}{2}n\varrho_n + 2(n-1)p_n\right\}\kappa_1 + \dots.\end{aligned}$$

Equating imaginary parts of  $\kappa_{n+2}$  gives

$$(3n+4)\varrho_n - 2(n-1)p_n = \dots.$$

Finally, then, the determination of  $\varrho_n, p_n$  comes from

$$\begin{vmatrix} 2 & -(n-1) & \varrho_n & \dots \\ 3n+4 & -2(n-1) & p_n & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

For  $n \geq 1$ , the determinant vanishes only for  $n=1$ . Therefore, successively all coefficients,  $\varrho_n, p_n, \kappa_n$ , can be uniquely determined after  $\varrho_1, p_1, \kappa_1, \kappa_2$ , and  $\text{Im}\kappa_3$  have been determined.

Now,  $\varrho_1, \kappa_1, \kappa_2$  have already been determined by choosing  $\alpha, \beta$  to satisfy equations (6) and (7).  $p_1$  remains arbitrary and is seen not to influence successive coefficients. This is expected since  $p_1$  establishes a rotational orientation of the center; since the curve is an unending spiral there, such an orientation is unnecessary.

The only critical test, then, for the feasibility of successive determination of all coefficients lies in the successful determination of  $\text{Im}\kappa_3$ . Interestingly

enough, the two independent determinations of  $\text{Im } \kappa_3$  agree identically; both yield  $\text{Im } \kappa_3 = 11 \kappa_1^2/3$ .

Successive determination of all other coefficients uniquely is therefore established.

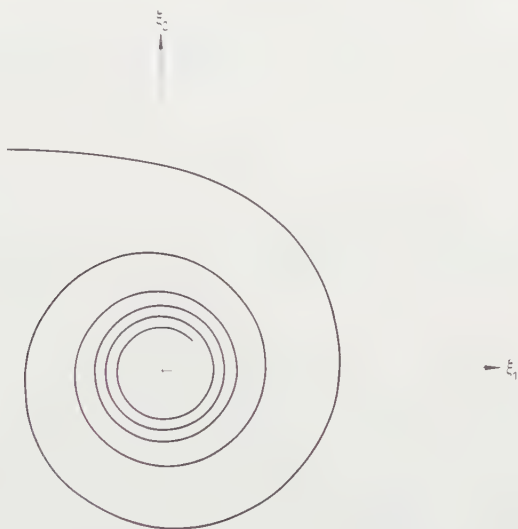


Figure 9  
The rolled vortex core.

## Appendix

### *Equating Two Determinations of $\kappa_m$*

$$\kappa_3 \text{ imaginary: } \frac{11}{3} \kappa_1^2 = \frac{11}{3} \kappa_1^2; \text{ real: } 2 \varrho_2 - p_2 = \frac{1}{3} \kappa_1^2.$$

$$\kappa_4 \text{ imaginary: } 5 \varrho_2 - p_2 = \frac{5}{4} \kappa_1^2; \text{ real: } \varrho_3 - p_3 = 0$$

$$\left( \varrho_2 = \frac{11}{36} \kappa_1^2, \quad p_2 = \frac{10}{36} \kappa_1^2 \right).$$

$$\kappa_5 \text{ imaginary: } 13 \varrho_3 - 4 p_3 = \frac{110}{36} \kappa_1^3$$

$$\left( \varrho_3 = \frac{55}{162} \kappa_1^3, \quad p_3 = \frac{55}{162} \kappa_1^3 \right).$$

For the case where

$$b = 1 \quad \text{or} \quad a^2 = \frac{1}{2\pi}$$

the solution  $Z(\lambda)$  is

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \lambda^2 \left[ 1 + \frac{11}{36} \left( \frac{2\pi}{3} \right)^2 \lambda^6 + \frac{55}{162} \left( \frac{2\pi}{3} \right)^3 \lambda^9 + \dots \right] \\ \times e^{-i\lambda^3} \left[ 1 + \frac{10}{36} \left( \frac{2\pi}{3} \right)^2 \lambda^6 + \frac{55}{162} \left( \frac{2\pi}{3} \right)^3 \lambda^9 + \dots \right].$$

For  $\lambda$  real, the form of the spiral has been plotted for a range of

$$0.30 \leq \lambda \leq 0.65.$$

The author wishes to express his gratitude to Professor K. O. FRIEDRICHS, New York University, under whose guidance this work was done.

#### REFERENCES

- [1] PRANDTL and TIETJENS, *Applied Hydro- and Aeromechanics* (McGraw-Hill, 1934).
- [2] H. KADEN, *Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche*, in: *Ingenieur-Archiv*, Band 2 (1931), pp. 140–168.
- [3] F. L. WESTWATER, *The Rolling Up of the Surface of Discontinuity Behind an Aerofoil of Finite Span*, Rep. and Memo. No. 1692, August 1935.
- [4] K. O. FRIEDRICHS, *Lectures on Special Topics in Fluid Dynamics* (New York University, 1952–1953).
- [5] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics* (The MacMillan Co., New York 1950).

#### Zusammenfassung

Die vorliegenden Untersuchungen befassen sich mit dem Problem der zweidimensionalen zeitabhängigen Strömung, welche mit dem Abrollen einer semi-unendlichen Wirbelfläche verbunden ist. Obwohl bereits vorliegende analytische Untersuchungen an diesem Problem Näherungslösungen für die Spiralforn der aufgerollten Wirbelfläche ergeben, so dürfte es doch schwierig sein, aus diesen Ergebnissen das zugehörige Strömungsfeld zu erhalten. In dieser Arbeit werden Differentialgleichungen für den Mittelwert und den Sprung des komplexen Potentials abgeleitet, welche zur Beschreibung des Strömungsfeldes über die gesamte Ebene benutzt werden können. Für den Spiralkern stimmt die hier angegebene Lösung mit der von KADEN überein.

(Received: September 20, 1955.)



# A Graphical Method for Determining the Coefficient of Viscosity of Newtonian Liquids Using an Oscillating Cylinder Viscometer

I.

By ALI A. K. IBRAHIM and ABDEL MONEM I. KABIEL, Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

It seems possible to represent our results and those of OLDROYD, STRAWBRIDGE and TOMS [1<sup>2)</sup>] by a linear graph (which is most suitable for practical work) from whose slope or intercept the coefficient of viscosity  $\eta$  of the Newtonian liquid may be estimated.

Some little time ago, we have pointed out the equation (2):

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\theta_0}{\varphi_0} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega^2 - \tau}{a^3\omega} \left[ 1 - \left( \frac{\theta_0}{\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3} \left( \frac{b-a}{b+a} \right) \quad (1)$$

where  $\theta_0$  is the angular amplitude of the suspended cylinder,  $\varphi_0$  is the angular amplitude of the outer cylinder,  $b$  is the radius in cm of the outer cylinder,  $a$  is the radius in cm of the inner cylinder,  $I$  is the moment of inertia in g cm<sup>2</sup> of the suspended cylinder about its major axis,  $\tau$  is the wire torsion constant in g cm<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>,  $\omega$  is the angular velocity in s<sup>-1</sup> of the outer cylinder and  $L$  in cm is the depth to which the suspended cylinder is immersed in the liquid in the outer cylinder.

This equation represents the coefficient of viscosity  $\eta$  in g cm<sup>-1</sup> sec<sup>-1</sup> of Newtonian liquids with considerable accuracy for all values of  $\eta > 1$  (Poise). Such a formula is of wide application and would be very valuable by the following representation.

The manner in which it was shown that (1) represents the experimental results may be of interest, if  $(\varphi_0/\theta_0)^2$  be denoted by  $Y$  and  $[(I\omega^2 - \tau)/\omega]^2$  be denoted by  $X$ , then the relation between  $Y$  and  $X$  is linear and may then be written

$$Y = \left( \frac{K}{\eta} \right)^2 X + 1 \quad (2)$$

where

$$K = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b-a}{L a^3} e^{-3} [(b-a)/(b+a)] \quad (3)$$

$K$  is an apparatus constant which may be either calculated from (3) or obtained by using a liquid of known coefficient of viscosity. The slope of the line gives  $(K/\eta)^2$  and the intercept gives  $(\eta/K)^2$  from which the coefficient of viscosity  $\eta$  may be deduced. If  $\tau = 0$ , therefore a plot of  $(\varphi_0/\theta_0)^2$  as  $Y$  against  $I^2 \omega^2$  as  $X$  gives a straight line.

The Figures which are drawn to scale, show our experimental results (in case of paraffin oil of density 0.875 g cm<sup>-3</sup> at 20°C) and those of OLDROYD *et al.*

1) Physics Department, Faculty of Science, University of Alexandria.

2) Numbers in brackets refer to References, page 345.

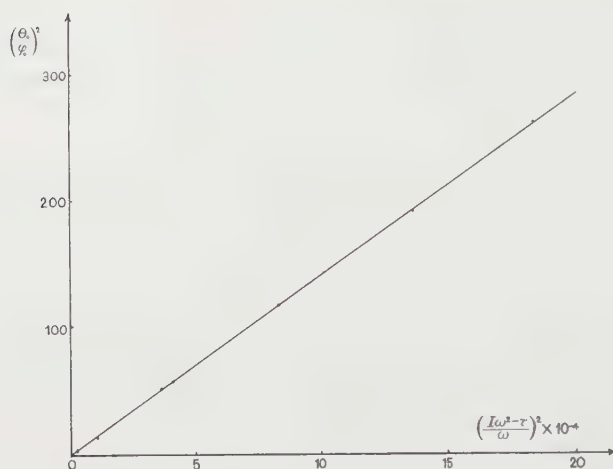


Figure 1

Variation of  $(\theta_0/\varphi_0)^{-2}$  with  $[(I\omega^2 - \tau)/\omega]^2$  for paraffin oil (OLDROYD).

(in case of liquids paraffin B. P. of density  $0.877 \text{ g cm}^{-3}$  at  $25^\circ\text{C}$ ) by the process outlined above.

The obtained graphs were very accurately linear which is distinctly superior in point of accuracy, the values of the slope and intercept with the  $X$ -axis were read directly from the graph.

The following table shows the results for the liquid examined.

$K$	Slope $(K/\eta)^2$	Intercept with the $X$ -axis $(\eta/K)^2$	$\eta$ in P		
			from slope	from intercept	mean
$0.6656 \times 10^{-4}$ OLDROYD [1]	$0.1427 \times 10^8$	$7.041 \times 10^{-8}$	1.762	1.766	1.764
$1.928 \times 10^{-2}$ IBRAHIM and KABIEL [3]	$1.009 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^4$	1.911	1.928	1.920

It is seen from the above table that the coefficient of viscosity  $\eta$  is obtained with a distinct degree of accuracy which confirms the validity of the method and shows the very accurate representation of equation (1) to the experimental facts.

Also the figures show that  $\theta_0/\varphi_0 = 1$  when  $X = 0$  or,

$$I\omega^2 = \tau,$$

i. e., at a frequency equal to that of free oscillation of the wire and the suspended cylinder.

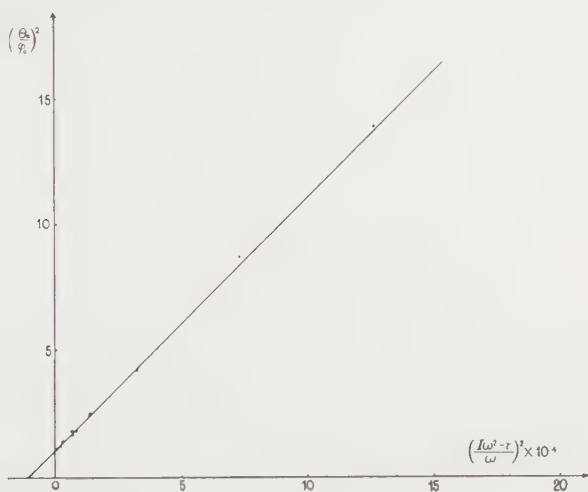


Figure 2

Variation of  $(\theta_0/\varphi_0)^{-2}$  with  $[(I\omega^2 - \tau)/\omega]^2$  for paraffin oil (IBRAHIM and KABIEL).

## REFERENCES

- [1] J. G. OLDROYD, STRAWBRIDGE, and TOMS, Proc. Phys. Soc. [B] 64, 55 (1951).
- [2] A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL, ZAMP 5, 5, 398 (1954).
- [3] A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL (in preparation).

*Zusammenfassung*

Ein Verfahren wird beschrieben, welches erlaubt, die Viskosität zäher Flüssigkeiten zu messen. Durch geeignete Wahl der dargestellten Größen können die Messergebnisse der Verfasser, wie auch diejenigen von OLDROYD, in einem Graphikum linear wiedergegeben werden, wobei die Neigung und der Abzissenabschnitt den Viskositätskoeffizienten zu ermitteln gestattet.

(Received: March 3, 1956.)

**Longitudinal Vibrations of a Composite Bar**

By VÁCLAV VODIČKA, Pilsen, Czechoslovakia<sup>1)</sup>

There is little difficulty in solving vibration problems for uniform bars, but mathematical discussion of longitudinal vibrations of composite bars is in general more complicated. This paper gives an outline of such calculations. It may serve as a kind of guide in treating other related problems of technical or physical significance.

<sup>1)</sup> Technische Hochschule.

## 1. Statement and Mathematical Formulation of the Problem

A bar of length  $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$  and constant area  $q$  is composed of  $n$  parts of lengths  $l_k$ , YOUNG's moduli  $E_k$  and densities  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). It is at rest with the end  $x = 0$  fixed. At the time  $t = 0$  a constant axial force  $P$  is applied at the free end  $x = l$ . To find the subsequent longitudinal vibrations in the bar.

Denoting by  $u = u(x, t)$  the displacement at the point  $x$  at any time  $t$  and putting

$$s_0 = 0, \quad s_k = \sum_{\kappa=1}^k l_{\kappa} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

we obviously have to solve the system of differential equations

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = a_k^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad s_{k-1} < x < s_k, \quad t > 0, \quad a_k^2 = \frac{E_k}{\rho_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

with the initial conditions

$$u_k(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_k(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad s_{k-1} < x < s_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

and with

$$u_1(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.2.1)$$

$$u_k(s_k, t) = u_{k+1}(s_k, t), \quad \frac{\partial u_k(s_k, t)}{\partial x} = e_k \frac{\partial u_{k+1}(s_k, t)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad e_k = \frac{E_{k+1}}{E_k} \quad (3.2.2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\frac{\partial u_n(l, t)}{\partial x} = \frac{P}{q E_n}, \quad t > 0. \quad (3.2.3)$$

## 2. Solution of the Problem

Putting

$$U_k(x, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} u_k(x, t) dt \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

we easily obtain from (2) – (3.2.3) the following subsidiary equations:

$$\frac{d^2 U_k(x, p)}{dx^2} = \frac{p^2}{a_k^2} U_k(x, p), \quad s_{k-1} < x < s_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

$$U_1(0, p) = 0, \quad (6.1)$$

$$U_k(s_k, p) = U_{k+1}(s_k, p), \quad \frac{dU_k(s_k, p)}{dx} = e_k \frac{dU_{k+1}(s_k, p)}{dx} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (6.2)$$

$$\frac{dU_n(l, p)}{dx} = \frac{P}{q E_n}. \quad (6.3)$$

This gives

$$U_k(x, p) = A_k \cosh \frac{p x}{a_k} + B_k \sinh \frac{p x}{a_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

where the constants  $A_k, B_k$  must satisfy the conditions

$$A_1 = 0, \quad (7.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k \cosh \frac{p s_k}{a_k} + B_k \sinh \frac{p s_k}{a_k} &= A_{k+1} \cosh \frac{p s_k}{a_{k+1}} + B_{k+1} \sinh \frac{p s_k}{a_{k+1}}, \\ A_k \sinh \frac{p s_k}{a_k} + B_k \cosh \frac{p s_k}{a_k} &= h_k \left( A_{k+1} \sinh \frac{p s_k}{a_{k+1}} + B_{k+1} \cosh \frac{p s_k}{a_{k+1}} \right), \\ h_k &= \frac{a_{k+1} \varrho_{k+1}}{a_k \varrho_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

$$A_n \sinh \frac{p l}{a_n} + B_n \cosh \frac{p l}{a_n} = \frac{1}{p} \cdot \frac{P}{q a_n \varrho_n}. \quad (7.3)$$

Writing (7.2) in matrix form

$$\begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} = M_k(p) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$M_k(p) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{p s_k}{a_k} \cosh \frac{p s_k}{a_{k+1}} - \frac{1}{h_k} \sinh \frac{p s_k}{a_k} \sinh \frac{p s_k}{a_{k+1}}, \\ \sinh \frac{p s_k}{a_k} \cosh \frac{p s_k}{a_{k+1}} - \frac{1}{h_k} \cosh \frac{p s_k}{a_k} \sinh \frac{p s_k}{a_{k+1}}, \\ -\cosh \frac{p s_k}{a_k} \sinh \frac{p s_k}{a_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \sinh \frac{p s_k}{a_k} \cosh \frac{p s_k}{a_{k+1}}, \\ -\sinh \frac{p s_k}{a_k} \sinh \frac{p s_k}{a_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \cosh \frac{p s_k}{a_k} \cosh \frac{p s_k}{a_{k+1}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ )

and considering (7.1) we obtain

$$\begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} = Q_k(p) \begin{pmatrix} O \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$Q_k(p) = M_k(p) M_{k-1}(p) \dots M_2(p) M_1(p) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8.1)$$

Applying the notation

$$Q_k(p) = \left\| q_k^{(\mu\nu)}(p) \right\| \quad (\mu, \nu = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (9.1)$$

we also can write

$$A_{k+1} = q_k^{(12)}(p) B_1, \quad B_{k+1} = q_k^{(22)}(p) B_1 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (9.2)$$

and we find from (7.3) at once

$$B_1 = \frac{P}{q a_n \varrho_n} \cdot \frac{1}{p \left[ q_{n-1}^{(12)}(p) \sinh \frac{p l}{a_n} + q_{n-1}^{(22)}(p) \cosh \frac{p l}{a_n} \right]}. \quad (10)$$

From (7), (9.2) and (10) we finally obtain

$$U_1(x, p) = \frac{P}{q a_n q_n} \cdot \frac{\sinh \frac{p x}{a_1}}{p \left[ q_{n-1}^{(12)}(p) \sinh \frac{p l}{a_n} + q_{n-1}^{(22)}(p) \cosh \frac{p l}{a_n} \right]}, \quad (11.1)$$

$$U_{k+1}(x, p) = \frac{P}{q a_n q_n} \cdot \frac{q_k^{(12)}(p) \cosh \frac{p x}{a_{k+1}} + q_k^{(22)}(p) \sinh \frac{p x}{a_{k+1}}}{p \left[ q_{n-1}^{(12)}(p) \sinh \frac{p l}{a_n} + q_{n-1}^{(22)}(p) \cosh \frac{p l}{a_n} \right]} \quad (11.2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1)$$

and our problem is then reduced to the determination of the elements in the second column of (8.1). Apart from exceptional cases this task is very hard.

The expressions (11.1) and (11.2) represent the Laplace transforms of the wanted functions  $u_k(x, t)$ , which are to be determined by the well-known methods of operational calculus. For few beginning values of  $n$  (e. g. for  $n = 2, 3$ ) this can be done quite generally, but the results are complicated.

### 3. Special case

We now proceed to the treatment of the case characterized by  $h_k = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), i. e. according to (2) and (7.2) by

$$E_k q_k = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Here it is possible to express the solution in closed form.

We first have by (8)

$$M_k(p) = \begin{vmatrix} \cosh p \sigma_k & \sinh p \sigma_k \\ \sinh p \sigma_k & \cosh p \sigma_k \end{vmatrix} \quad \sigma_k = s_k \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

and from this by (8.1)

$$Q_2(p) = \begin{vmatrix} \cosh p(\sigma_1 + \sigma_2) & \sinh p(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \sinh p(\sigma_1 + \sigma_2) & \cosh p(\sigma_1 + \sigma_2) \end{vmatrix}.$$

But generally

$$M_{v+1}(p) = \begin{vmatrix} \cosh p \sum_{\kappa=1}^v \sigma_{\kappa} & \sinh p \sum_{\kappa=1}^v \sigma_{\kappa} \\ \sinh p \sum_{\kappa=1}^v \sigma_{\kappa} & \cosh p \sum_{\kappa=1}^v \sigma_{\kappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh p \sum_{\kappa=1}^{v+1} \sigma_{\kappa} & \sinh p \sum_{\kappa=1}^{v+1} \sigma_{\kappa} \\ \sinh p \sum_{\kappa=1}^{v+1} \sigma_{\kappa} & \cosh p \sum_{\kappa=1}^{v+1} \sigma_{\kappa} \end{vmatrix}$$

and so we obtain from (8.1) at once

$$Q_k(p) = \begin{vmatrix} \cosh p \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} & \sinh p \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} \\ \sinh p \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} & \cosh p \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (14)$$



Herewith equations (11.1), (11.2) take the form

$$U_1(x, p) = \frac{P}{q a_n \varrho_n} \cdot \frac{\sinh \frac{p x}{a_1}}{p \cosh p \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right)},$$

$$U_{k+1}(x, p) = \frac{P}{q a_n \varrho_n} \cdot \frac{\sinh p \left( \frac{x}{a_{k+1}} + \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} \right)}{p \cosh p \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (15)$$

and from this we find (using a table of Laplace transforms or by contour integration) the following complete solution of our problem:

$$u_1(x, t) = \frac{P}{q a_n \varrho_n} \left[ \frac{x}{a_1} - \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right) \right] \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} \sin \frac{(2r+1) \pi x}{2 a_1 \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right)} \cos \frac{(2r+1) \pi t}{2 \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right)} \right], \quad (16.1)$$

$$u_{k+1}(x, t) = \frac{P}{q a_n \varrho_n} \left[ \frac{x}{a_{k+1}} + \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} - \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right) \right] \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} \sin \frac{(2r+1) \pi \left( \frac{x}{a_{k+1}} + \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} \right)}{2 \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right)} \cos \frac{(2r+1) \pi t}{2 \left( \frac{l}{a_n} + \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_{\kappa} \right)} \right] \quad (16.2)$$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

*Remark.* For  $n = 1$  formula (16.1) gives the well-known expression for longitudinal vibrations of a homogeneous bar.

### Zusammenfassung

Mathematische Untersuchung von Längsschwingungen in zusammengesetzten Stäben ist ein verhältnismässig kompliziertes, jedoch industriell wichtiges Problem. Die vorliegende Arbeit zeigt an einem typischen Beispiel die Art der dabei vorkommenden Schwierigkeiten. Sie kann auch bei rechnerischer Behandlung anderer Fragen aus der Schwingungstheorie zur Orientierung dienen.

(Received: December 16, 1955.)

## Über eine Abschätzung der Amplituden in freien Schwingungsproblemen veränderlicher Kreisfrequenz

VON AUREL WINTNER, Baltimore, Maryland, USA<sup>1)</sup>

Es sei  $\omega(t)$  eine gegebene (reelle und stetige) Funktion der Zeit, und es sei  $x(t)$  eine beliebige Lösung des Schwingungsproblems

$$x'' + \omega^2(t)x = 0. \quad (1)$$

Die triviale Lösung  $x(t) \equiv 0$  der Differentialgleichung (1) soll jedoch ausgeschlossen werden. Explizit kann man (1) meistens nicht lösen. Dies ist der Fall bereits für die einfachste im Problem der Frequenzmodulierung vorkommende Koeffizientenfunktion, nämlich

$$\omega(t) = (a + b \cos t)^{-1/2},$$

wobei  $a$  und  $b$  gegebene, den Ungleichungen  $0 < |b| < a$  genügende Konstanten bezeichnen. Jede Information ist daher von Belang, die die Kenntnis einer Lösung  $x(t)$  von (1) nicht voraussetzt und dennoch eine Aussage macht über die numerischen Verhältnisse in dem zu einer beliebigen Lösung  $x(t)$  von (1) gehörigen  $(t, x)$ -Diagramm. Dabei können solche Daten wie die (zu beliebigen positiven Werten  $h$  gehörigen) Integrale

$$\mu_0 = \int_0^h \omega^2(t) dt, \quad \mu_1 = \int_0^h t \omega^2(t) dt, \quad \mu_2 = \int_0^h t^2 \omega^2(t) dt$$

als bekannt gelten, da diese bestimmten Integrale ein für allemal, das heisst unabhängig von der Wahl der Partikularlösung  $x(t)$  von (1) durch Reihen bestimmt oder numerisch tabuliert werden können, sobald die Koeffizientenfunktion von (1) für  $0 \leq t \leq h$  gegeben ist. Im folgenden soll ein Resultat dieser Art hergeleitet werden.

Es sei  $x = x(t)$  eine Lösungskurve von (1), die für ein gewisses  $t = t_1$  die  $t$ -Achse schneidet [es gibt eine einfach unendliche Schar von solchen Lösungen, da mit  $x(t_1) = 0$  nur eine der willkürlichen Integrationskonstanten  $x(t_1)$ ,  $x'(t_1)$  gegeben ist]. Man verfolge die Kurve  $x = x(t)$  von  $t = t_1$  an, und es soll vorausgesetzt werden, dass dann die Kurve wieder die  $t$ -Achse erreicht. Es sei  $t_2$  die erste, auf  $t_1$  folgende Abszisse, für welche dies zutrifft [ $t_2$  hängt von der Wahl der Integrationskonstante  $x'(t_1)$  ab]. Man kann den Anfangspunkt der  $t$ -Achse derart wählen, dass  $t_1$  gleich 0 wird. Dann ist  $h > 0$ , wenn  $h = t_2$  gesetzt wird. Danach gilt  $x(t) = 0$  für  $t = 0$  und für  $t = h$ , aber nicht für  $0 < t < h$ . Da [mit  $x(t)$  auch  $-x(t)$  eine Lösung von (1) darstellt, so kann man annehmen, dass  $x(t)$  für  $0 < t < h$  positiv ist. Dann folgt aus (1), dass  $x''(t)$  für  $0 < t < h$  nirgends positiv wird. Bezeichnet daher  $J$  die Strecke zwischen  $t = 0$  und  $t = h$  auf der  $t$ -Achse, so ist der zu  $0 \leq t \leq h$  gehörige Teil des  $(t, x)$ -Diagramms eine «Halbwelle», die aus einem mit Rücksicht auf  $x''(t) \leq 0$  konvexen Bogen  $K$  besteht, der die beiden Endpunkte von  $J$  verbindet und sonst oberhalb  $J$  liegt. Man beachte, dass der höchste Punkt von  $K$  nicht über dem Mittelpunkt von  $J$  zu liegen braucht.

Es stellt sich nun heraus, dass, wenn  $f$  den Flächeninhalt der durch  $J$  und  $K$  umgrenzten Halbwelle und  $m$  die in ihr gelegene Maximalamplitude bezeichnet,

<sup>1)</sup> The Johns Hopkins University, Department of Mathematics.

also die positive Konstante  $m$  durch

$$m = \max_{0 < t < h} x(t)$$

definiert ist, für den Quotienten  $m/f$  eine Abschätzung a priori gilt, nämlich

$$\frac{m}{f} < \frac{2(\mu_1 - 1)}{\mu_2}. \quad (3)$$

Insbesondere ist also

$$\mu_1 > 1, \quad (4)$$

da auch  $f$  positiv ist. Dabei sind  $\mu_1, \mu_2$  die durch (2) definierten Werte. Letztere sind positiv, da sie nicht negativ sind und nur dann gleich Null werden können, wenn die Gleichung (1) sich auf  $x'' = 0$  reduziert. Dann ist aber  $x(t)$  eine lineare Funktion, die der Annahme einer Halbwelle widerspricht.

Ausser (3) gilt auch

$$\frac{m}{f} < \frac{4}{\mu_0}, \quad (5)$$

wobei  $\mu_0$  wieder durch (2) definiert ist. Es wird sich aber zeigen, dass die Abschätzung (5) weniger besagt als (3).

Die vorangehenden Tatsachen können auf die folgenden beiden Ungleichungen gegründet werden:

$$h < \int_0^h t(h-t) \omega^2(t) dt \quad (6)$$

und

$$h m < 2 f. \quad (7)$$

Die Ungleichung (6) ist eine Verschärfung eines klassischen Satzes von LIAPOUNOFF, die Herr Dr. P. HARTMAN und der Verfasser in einer gemeinsamen Note bewiesen haben<sup>2)</sup>. Um sich andererseits von der Richtigkeit der Ungleichung (7) zu überzeugen, genügt es, den Flächeninhalt des Dreiecks  $D$  mit den Ecken

$$(t, x) = (0, 0), \quad (t, x) = (0, h), \quad (t, x) = (t_0, m)$$

zu betrachten, wobei  $t_0$  denjenigen Punkt der  $t$ -Strecke  $J$  bezeichnet, in welchem die Ordinate  $x(t)$  des konvexen Bogens  $K$  ihr Maximum  $m$  erreicht. Da  $D$  in dem durch  $K$  und  $J$  begrenzten konvexen Bereich enthalten ist und letzterer den Flächeninhalt  $f$  hat, so ist (7) klar.

Um nun (3) zu beweisen, beachte man, dass (6) in der Gestalt  $h < h\mu_1 - \mu_2$  geschrieben werden kann, wenn man die Bezeichnungen (2) benutzt. Die letztere Ungleichung besagt aber, dass  $\mu_2 < h(\mu_1 - 1)$  gilt, woraus einerseits (4) und andererseits

$$\frac{\mu_2}{\mu_1 - 1} < h \quad (8)$$

folgt. Da Zähler und Nenner des Quotienten (8) positiv sind, so ist es klar, dass (7) und (8) zusammen genau zu der Behauptung (3) führen.

Die Behauptung (5), die bereits bekannt ist<sup>3)</sup>, kann als eine weniger scharfe Form der soeben bewiesenen Beziehung (3) betrachtet werden. Um dies einzu-

<sup>2)</sup> Ein einfacherer Beweis als der ursprüngliche findet sich in einer Arbeit von Z. NEHARI, Amer. J. Math. 76, 690 (1954), wo weitere Literatur angegeben ist.

<sup>3)</sup> P. HARTMAN and A. WINTNER, Quart. appl. Math. 10, 175 (1952).

sehen, beachte man, dass die Funktion  $t(h-t)$  für  $0 < t < h$  positiv ist und ihr Maximum  $h^2/4$  beträgt, da es für  $t = h/2$  erreicht wird. Demnach folgt aus (6) und aus der ersten der drei Definitionen (2), dass  $h < \mu_0 h^2/4$ , also

$$\frac{4}{\mu_0} < h \quad (9)$$

ist. Nun ist es aber klar, dass (9) und (7) genau so zu (5) führen, wie (8) und (7) zu (3) geführt haben. Dabei ist (9) im wesentlichen der obenerwähnte Satz von LIAPOUNOFF.

### Summary

Consider any differential equation of the form given under (1) below and, if  $x(t)$  is any solution of (1) which is real-valued and does not vanish identically, let  $C$  be a 'half-wave'  $a \leq t \leq b$  of the curve  $x = x(t)$  in a  $(t, x)$ -plane [by this is meant that  $x(a) = 0$  and  $x(b) = 0$  but  $|x(t)| > 0$  if  $a < t < b$ ]. Then an *a priori* upper limitation, involving the 'moments' of the coefficient function of (1) [cf. the three integrals in formula (2) of the text, where  $a = 0$  and  $b = h$ ], is obtained for the ratio  $m/f$ . Here  $m$  denotes the maximum amplitude occurring in  $C$ , and  $f$  the area of the region surrounded by the segment  $a \leq t \leq b$  on the  $t$ -axis and the graph of  $C$  in the  $(t, x)$ -plane (this region is always convex).

(Eingegangen: 10. März 1956.)

### Varia – Miscellaneous – Divers

## Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 5. bis 6. Mai 1956 in Zofingen

### Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

#### Stabilisierter NF-Verstärker und phasensensitiver Detektor, von T. KNELLWOLF und J. OESER, Zürich<sup>1)</sup>.

Der Vergleich von Signalgrößen bei einem Kerninduktionsspektrometer erfordert eine Apparatur, bei der die Empfindlichkeit über lange Zeiten auf mindestens einige Prozent genau konstant bleibt. Dazu ist es unerlässlich, dass das ganze elektronische System gut stabilisiert ist.

Nach der HF-Gleichrichtung ist das Kerninduktionssignal eine periodische NF-Spannung, deren Grundfrequenz gleich der Modulationsfrequenz  $\omega_M$  ist, mit welcher das statische Magnetfeld moduliert wird.

#### 1. Abgestimmter NF-Verstärker

Bei der üblichen Anordnung (BLOEMBERGEN, PROCTOR und andere) kommt das Signal in einen mit TT-Rückkopplungsnetzwerk versehenen frequenzselektiven Verstärker, der auf die Grundfrequenz des Signals abgestimmt ist und

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität.

dessen Bandbreite einige Hertz beträgt. Der Nachteil dieser Schaltung liegt darin, dass die Verstärkung für die Signalfrequenz nicht stabilisiert ist.

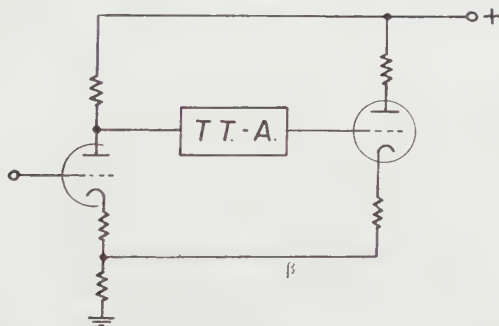
Eine frequenzunabhängige Rückkopplung (Figur 1) über der TT-Stufe bewirkt zwar diese Stabilisierung, erhöht aber gleichzeitig (bei gleicher Totalverstärkung) die Bandbreite. Es ist daher nötig, die Bandbreite des Verstärkers ohne frequenzunabhängige Rückkopplung ausserordentlich klein zu halten.

Die totale Verstärkung ohne frequenzunabhängige Rückkopplung beträgt

$$G_N = G_2 G_{TT} = \frac{G_2 G_1}{1 + \beta_{TT}(\omega) G_1}.$$

Mit frequenzunabhängiger Rückkopplung beträgt sie

$$G_0 = \frac{G_N}{1 + \beta G_N} = \frac{G_1 G_2}{1 + \beta_{TT}(\omega) G_1 + \beta G_1 G_2}.$$



Figur 1

TT-Verstärker mit stabilisierter Verstärkung (Prinzipschaltung).

Die Bandbreite des TT-Verstärkers beträgt

$$\Delta\omega_{TT} = \omega_M \frac{4\sqrt{3}}{G_1}.$$

Mit frequenzunabhängiger Rückkopplung wird sie

$$\Delta\omega_R = \beta G_1 G_2 \Delta\omega_{TT} = 4\sqrt{3} \beta G_2 \omega_M,$$

wenn die Bedingung  $\beta G_2 \ll 1 \ll \beta G_1 G_2$  erfüllt ist. Dabei bedeuten:

$G_1$  Verstärkung der Stufen des TT-Verstärkers ohne TT-Rückkopplung,

$G_{TT}$  Verstärkung des TT-rückgekoppelten Verstärkers,

$G_2$  Verstärkung der Stufen, die dem TT-Verstärker vorangehen bzw. folgen.

In unserer Ausführung beträgt  $G_1 = 1000$ ,  $G_2 = 10$ . Bei einem Rückkopplungsfaktor von 16 ergibt sich eine Bandbreite von  $\pm 4$  Hz.

## 2. Phasensensitiver Verstärker

Im phasensensitiven Verstärker wird die Bandbreite durch Homodynisierung und im nachfolgenden Gleichstromverstärker durch RC-Glieder weiter herabgesetzt bis auf  $1 \div 1/20$  Hz. Die meisten phasenempfindlichen Verstärker verwenden Mischröhren oder auch Pentoden mit Fanggittermodulation. Die Nach-

teile dieser Schaltungen sind: Die Konversionssteilheit ändert sich mit der Amplitude der Mischspannung und ausserdem auch mit dem Altern der Röhren. Um von den Variationen der Röhrengrössen unabhängig zu werden, verwenden wir Diodenmischung zur NF-Demodulation (Figur 2).

Die Primärseite des Transformators I liegt zwischen den Kathoden zweier Kathodenfolger, an deren Gitter die Misch- bzw. Signalspannung liegt. Am Transformator I liegt also die Spannung

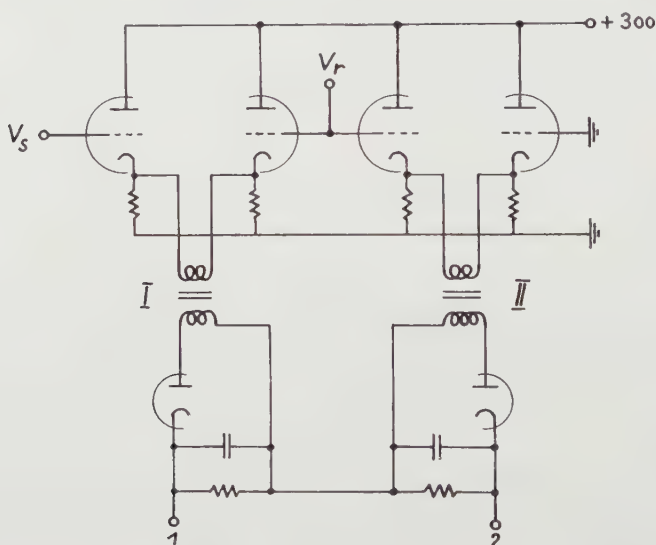
$$V_M \cos \omega_M t + V_S \cos(\omega_M t + \varphi),$$

aus der durch Gleichrichtung eine Spannung

$$V_M + V_S \cos \varphi$$

entsteht. Der Transformator II trägt eine Spannung  $V_M \cos \omega_M t$ , die entstehende Gleichspannung ist  $V_M$ .

Die Differenz der beiden Gleichspannungen, die jetzt von  $V_M$  unabhängig ist, gibt man auf das Gitter eines stabilisierten Gleichstromverstärkers. Die in Gegen-



Figur 2

Phasenempfindlicher Detektor

taktschaltung verwendeten Transformatoren müssen zwei möglichst gleiche Sekundärwicklungen besitzen.

## Ergebnisse

### 1. Linearität

Der phasensensitive Verstärker ist in einem Arbeitsbereich von 20 mA besser als auf 1% linear. Im totalen Arbeitsbereich von 40 mA ist er besser als auf 2% linear.



## 2. Unabhängigkeit von der Referenzspannung

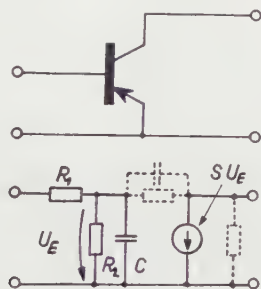
Variationen der Mischspannung von  $\pm 30\%$  bewirken eine Verschiebung des Nullpunktes um 0,1 mA (ganzer Bereich des Registrierinstrumentes 20 mA).

## 3. Die Empfindlichkeit

Diese bleibt bei Änderungen der Mischspannung um  $\pm 30\%$  auf besser als 1% konstant.

**Über das Impulsverhalten von Flächentransistoren**, von E. BALDINGER, W. CZAJA, M. NICOLET, Basel<sup>1)</sup>.

Zur Beschreibung der Wirkungsweise von Flächentransistoren ist das in Figur 1 dargestellte Ersatzschema für Impulsschaltungen besonders geeignet<sup>2)</sup>. Die Parameter  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $S$  und  $C$  lassen sich aus dem ebenen Transistormodell<sup>3)</sup> berechnen. Das Ergebnis ist ebenfalls der Figur 1 zu entnehmen.



$$R_1 = \text{const.}$$

$$R_2 \approx \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{J_e} \cdot \frac{kT}{q}$$

$$C \approx \frac{W^2}{2D_b} \cdot J_e \cdot \frac{q}{kT}$$

$$\frac{\partial J_c}{\partial U_E} = S \approx \alpha \cdot J_e \cdot \frac{q}{kT}$$

Figur 1

Ersatzschema für Flächentransistoren.

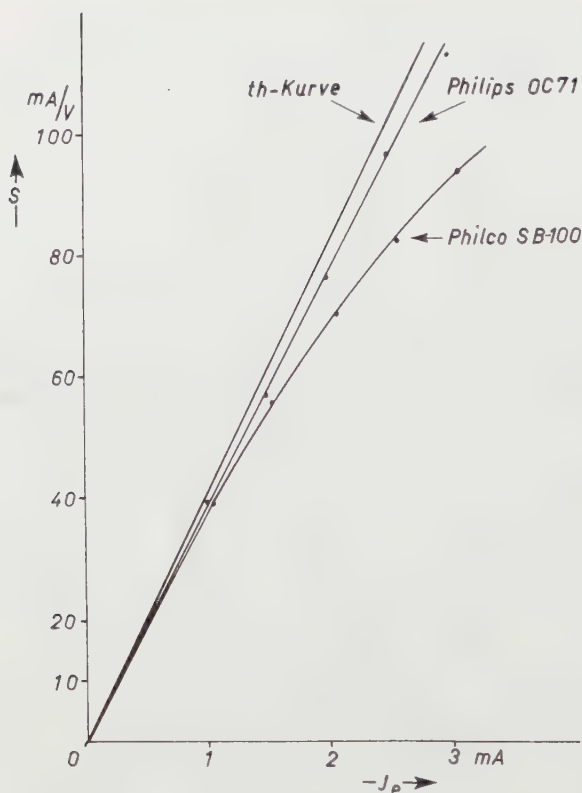
Da bisher Angaben darüber fehlten, wie gut dieses Modell das Verhalten eines wirklichen Transistors beschreibt, sind hier an zwei möglichst verschiedenen

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität, Abteilung für angewandte Physik.

<sup>2)</sup> In Impulsschaltungen ist der Belastungswiderstand oft klein; deshalb können der Kollektormitter-Widerstand ( $R_4$ ) und der Kollektor-Basis-Widerstand ( $R_3$ ) vernachlässigt werden (gestrichelt eingezeichnet). Für den Philips-Transistor OC 71 betragen zum Beispiel bei  $I_e = 1 \text{ mA}$ :  $R_3 \sim 7 \text{ M}\Omega$  und  $R_4 \sim 100 \text{ k}\Omega$ .

<sup>3)</sup> A. W. LO *et al.*, *Transistor Electronics* (Prentice-Hall, 1955), Kapitel 8.

C. W. MUELLER and J. I. PANKOVE, *A p-n-p-Triode Alloy-junction Transistor for Radio-frequency Amplification*, Proc. I. R. E. 42, 386 (1954).



Figur 2

Steilheit als Funktion des Emittersstromes.

Transistoren (Philips OC 71 und Philco SB-100) Messungen ausgeführt worden, die zeigen, dass die modellmässig zu erwartenden Abhängigkeiten vom Emittersstrom  $I_e$  (vgl. Figur 1) befriedigend erfüllt sind. Die Resultate sind den Figuren 2 bis 4 zu entnehmen.

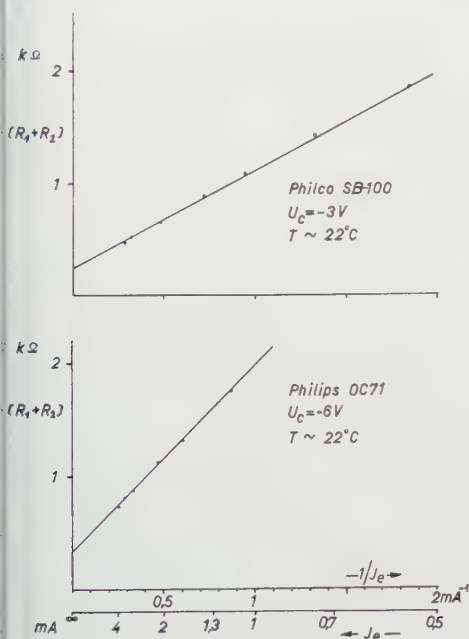
Es ergibt sich, dass innerhalb der für Anwendungen erforderlichen Genauigkeit das Ersatzschema von Figur 1 das Verhalten eines Flächentransistors üblicher Konstruktion richtig wiedergibt. Insbesondere ist demnach die Steilheit aller Transistoren annähernd gleich, da sie ausser vom Stromaufteilungsfaktor ( $\alpha \gtrsim 1$ ) und dem Arbeitspunkt  $I_e$  nur von der Einheitsladung  $q$ , der Boltzmann-Konstante  $k$  und der absoluten Temperatur  $T$  abhängt. Dagegen erscheint die Kapazität  $C$  als das bestimmende Element für das Frequenzverhalten des Transistors; ihr Wert hängt neben der Diffusionskonstanten  $D_b$  der Minderheitsladungsträger in der Basis auch noch von der Dicke  $W$  der Basisschicht ab und ist deshalb eine stark konstruktionsbedingte Grösse.

Ferner sind die Ausdrücke  $C/S$  und  $R_2 C$  in guter Näherung unabhängig vom Arbeitspunkt und deshalb für den Transistor charakteristisch. Die gemessenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Philips OC 71	Philco SB-100
$C/S$ [s]	$2,0 \cdot 10^{-7}$	$\sim 1,5 \cdot 10^{-9}$
$R_2 C$ [s]	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$\sim 4 \cdot 10^{-8}$
Auflösungsvermögen <sup>4)</sup> [Hz]	$1 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^6$

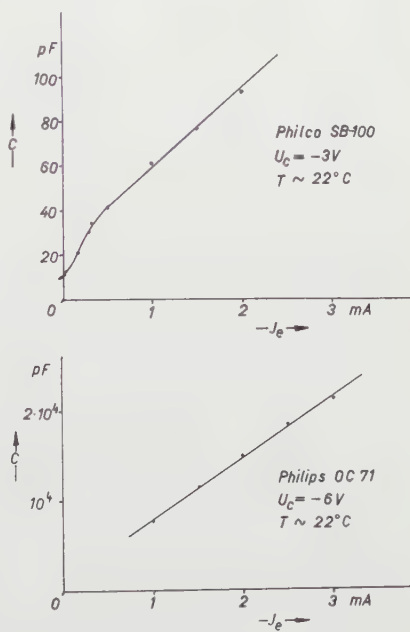
Zum Vergleich sei das Auflösungsvermögen von Zweifachuntersetzern angeführt, das mit denselben Transistortypen erzielt wurde<sup>4)</sup>. Es lässt sich daraus folgern, dass das mit SB-100-Transistoren erreichte Auflösungsvermögen von 5 MHz noch wesentlich verbessert werden könnte.

Wir sprechen der Stiftung Hasler-Werke, durch deren finanzielle Unterstützung die vorliegende Arbeit zustande kam, unseren Dank aus.



Figur 3

Eingangswiderstand als Funktion des Emittersstromes.



Figur 4

Kapazität  $C$  als Funktion des Emittersstromes<sup>5)</sup>.

<sup>4)</sup> E. BALDINGER und M. NICOLET, *Untersetzter mit Flächentransistoren*, ZAMP 6, 503 (1955).

<sup>5)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Der ausgeprägte Knick in der Kapazitätskurve des Typs SB-100 trennt die Gebiete kleiner und grosser Injektionsdichte der Minoritätsladungsträger in der Basis. Vergleiche zum Beispiel das inzwischen erschienene Werk der RCA Laboratories Princeton *Transistors I* (1956), S. 48.

### Gedanken zum heutigen Stand der Reaktortheorie, von P. SCHMID, Zürich<sup>1)</sup>

Ähnlich wie in der Thermodynamik können wir in der Lehre über neutronenvervielfachende Systeme zwei sich ergänzende Auffassungen unterscheiden, nämlich die modellmässig-mechanistische und die phänomenologische Theorie. Während im Zeitalter der Dampfmaschine die Praxis der Theorie oft vorausging, während sich eine phänomenologische Theorie an ihrem Objekt selbst entwickeln konnte, steht im Zeitalter der « Atomenergie » die mechanistische Theorie chronologisch an erster Stelle, und sie ist wohl bis heute auch dominierend. Viele Jahre nach dem Bau des ersten Kernreaktors begegnen wir den Anfängen einer sich von speziellen Modellen lösenden Auffassung der Reaktortheorie, so zum Beispiel E. P. WIGNERS Störungstheorie<sup>2)</sup>, A. M. WEINBERGS allgemeiner Theorie der multiplizierenden Medien<sup>3)</sup>, G. GOERTZELS Arbeiten über nichtuniforme Brennstoffverteilung<sup>4)</sup> und S. M. FEINBERGS heterogenen Methoden zur Reaktorberechnung<sup>5)</sup>. Diese Arbeiten zeichnen sich durch mathematische Eleganz aus, was natürlich damit zusammenhängt, dass von komplizierten Modellen abstrahiert wird. Darin liegt gerade die Kraft solcher Formalismen, und zwar in zweierlei Hinsicht: Einmal lassen sich allgemeingültige Gesetzmässigkeiten leichter erkennen und besser formulieren, zum andern kommt man der Wirklichkeit mit allgemeinen mathematischen Formen, zusammen mit guten Experimenten, bedeutend näher als mit primär modellgebundenen Theorien.

Die vielleicht zu wenig beachtete phänomenologische Reaktortheorie soll nun etwas in den Vordergrund gerückt werden. Ihre Aufgabe können wir wie folgt umreißen: Nach der *Internationalen Konferenz über die friedlichen Anwendungen der Atomenergie* steht uns viel experimentelles Erfahrungsmaterial zur Verfügung, das schlecht ausgenutzt wird, wenn man es nur als Prüfstein für diese oder jene mechanistische Theorie verwendet. Hier scheint nun vom Standpunkt der Technik aus der Einsatz phänomenologischer Theorien lohnender zu sein als die Verfeinerung der Modelle, obwohl das letztere von einem wissenschaftlichen Standpunkt aus befriedigender wäre. Zuverlässige Experimente sollen also durch mathematische Formen beschrieben werden. Die Ergebnisse sind auf systematische Zusammenhänge und allgemeine Prinzipien hin zu untersuchen. Im Hinblick auf neuartige Konstruktionen sind Experimente vorzuschlagen, welche im Rahmen solcher Theorien eine prägnante Formulierung der an die Natur zu stellenden Frage verkörpern. Zur Verfolgung dieser Richtung der Reaktortheorie müssen gelegentlich bedeutende Rechenhilfsmittel, wie Lochkartenkalkulatoren, elektronische « digital computers », Analogierechengeräte usw., eingesetzt werden.

Für die Schweiz erhebt sich nun die Frage, was auf dem Gebiet der Reaktortheorie in Zukunft getan werden soll und was im Rahmen der Möglichkeiten eines kleinen Landes getan werden kann. Nach der persönlichen Auffassung des Vortragenden sind folgende Massnahmen ins Auge zu fassen:

<sup>1)</sup> Reaktor AG.

<sup>2)</sup> S. GLASSTONE and M. C. EDLUND, *The Elements of Nuclear Reactor Theory* (D. van Nostrand Co. Inc., New York 1952), p. 372–383.

<sup>3)</sup> A. M. WEINBERG, *Theory of Oscillating Absorber in a Chain Reactor*, AECD-2044. A. M. WEINBERG, *Current Status of Nuclear Reactor Theory*, Amer. J. Phys. 20, 401 (1952).

<sup>4)</sup> G. GOERTZEL and W. A. LOEB, *Nonuniform Fuel Distribution in Nuclear Reactors*, Nucleonics 11 (9), 42 (1954).

G. GOERTZEL, *Minimum Critical Mass and Flat Flux*, J. Nuclear En. 2, 193 (1956).

<sup>5)</sup> S. M. FEINBERG, *Heterogeneous Methods for Calculating Reactors. Survey of Results and Comparison with Experiments*, A/Conf. 8/P/669, Genf, August 1955 (Original russisch).

1. Auf den Hochschulen werden junge Leute für Reaktortheorie interessiert und darin zu selbständigen Arbeiten ermuntert. Diese Disziplin könnte gewiss manchen angewandten Mathematiker und theoretischen Physiker befriedigen, sind doch bedeutende Wissenschaftler, wie E. P. WIGNER oder G. PLACZEK, auch nach dem Kriege an diesem und verwandten Gebieten interessiert geblieben.

2. Der verhältnismässig bescheidene Stab von Experimentalphysikern und Ingenieuren bei der Reaktor AG. sollte durch einige Reaktortheoretiker ergänzt werden, die zum Teil für grössere Rechenarbeiten im Zusammenhang mit dem Versuchsreaktor eingesetzt werden können, zum Teil Fachpublikationen verarbeiten, gute Experimente analysieren und fortschrittliche theoretische Methoden entwickeln.

Zum Schluss sei noch die Frage aufgeworfen, ob wir nicht heute schon Leute zum Studium von schnellen Reaktoren und der gesteuerten Verwendung der thermonuklearen Reaktion einsetzen sollten. Jedenfalls liegen Anzeichen dafür vor, dass andernorts solche Probleme zum Teil mit riesigem Aufwand bearbeitet werden.

**Gitterberechnungen für  $(D_2O - U_{nat})$ -Systeme**, von G. DE COULON<sup>1)</sup>, R. MEIER<sup>2)</sup>, W. WINKLER<sup>3)</sup> und W. ZÜNTI<sup>4)</sup>, Zürich.

Das materielle Buckling  $B^2$  ist die für die Beurteilung eines multiplizierenden Mediums am besten geeignete physikalische Grösse. In der für thermische Systeme üblichen Zweigruppendarstellung wird  $B^2$  durch die Lösung mit positiver Wurzel der Gleichung

$$(1 + B^2 L_{th}^2)(1 + B^2 L_s^2) = k$$

definiert.

Darin bedeuten  $L_{th}$  die thermische Diffusionslänge,  $L_s$  die Bremslänge und  $k$  den Multiplikationsfaktor der Neutronen im unendlichen Medium<sup>5)</sup>.

Das Buckling steht in direktem Zusammenhang mit den Abmessungen des unreflektierten, kritischen Reaktors. Im Falle der Kugelgeometrie gilt beispielsweise  $B = \pi/R$ , wobei  $R$  den kritischen Radius des multiplizierenden Mediums bedeutet. Im Falle einer allgemeineren Geometrie bleibt die Proportionalität zwischen Lineardimension  $D$  und Buckling erhalten:  $B \sim 1/D$ .

Die Diffusionsparameter  $L_{th}$  und  $L_s$  und der Multiplikationsfaktor  $k$  lassen sich bei gegebener mikroskopischer Struktur aus den Grundkonstanten (Wirkungsquerschnitte, Dichten) der Moderator- und Spaltsubstanzen berechnen, womit auch das Buckling bestimmt ist. Dieser rein rechnerische Weg führt hingegen bei den heutigen Kenntnissen der Grundkonstanten noch nicht auf eine Genauigkeit, die für eine zuverlässige Dimensionierung eines Reaktors notwendig wäre. Dies ist aus Tabelle 1 ersichtlich, wo für ein quadratisches Gitter von kreiszylindrischen Stäben natürlichen Urans in einem Schwerwassermoderator die Fehler  $\Delta B^2$ , herrührend von einzelnen, wesentlichen Grundkonstanten  $X \pm \Delta X$ , zusammengestellt sind. Der Fehler im kritischen Volumen ist noch um den Faktor  $3/2$  grösser, ausserdem wurden Fehler der Theorie nicht berücksichtigt. Direkte Messungen des Buckling sind daher vorderhand unerlässlich.

Für  $(D_2O - U_{nat})$ -Systeme sind aus Exponentialexperimenten kürzlich in zwei Laboratorien Bucklingwerte für eine Reihe von Uranstabsraden und Git-

<sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>, <sup>3)</sup>, <sup>4)</sup> in Reaktor AG.; <sup>2)</sup> auch Gebrüder Sulzer AG., Winterthur; und <sup>3)</sup> auch Escher Wyss AG., Zürich.

<sup>5)</sup> S. GLASSTONE and M. C. EDLUND, *The Elements of Nuclear Reactor Theory* (D. van Nostrand Co., New York 1952).



Tabelle 1

Buckling-Empfindlichkeit ( $S$ ) auf Fehler von verschiedenen Grundkonstanten ( $X$ ) für ein quadratisches ( $D_2O - U_{nat}$ )-Gitter mit Stabradius  $a = 1,27$  cm und Gitterkonstante  $b = 12,3$  cm

$X$	Experimentelle Fehler $\Delta X/X$ in %	$S$	Resultierende Fehler $\Delta B^2/B^2$ in %
$\eta$ 1,31 $\pm$ 0,025 . . .	2	5,6	11,2
$\nu$ 2,47 $\pm$ 0,10 . . .	4,0	5,6	22
$\sigma_{U^{235}}^f$ 590 $\pm$ 15 $b$ . . . .	2,6	2,6	6,8
$\sigma_{U^{235}}^a$ 107 $\pm$ 5 $b$ . . . .	4,7	— 0,62	— 2,9
$\sigma_{U^{238}}^a$ 2,76 $\pm$ 0,04 $b$ . . .	1,5	— 2,4	— 3,6
$\sigma_{D_2O}^a$ 1,2 $\pm$ 0,2 $mb$ . .	11	— 0,08	— 0,9
$\lambda_{D_2O}$ 2,50 $\pm$ 0,05 cm . .	2,0	0,50	1,0
$L_{th}^2$ 10200 $\pm$ 500 cm <sup>2</sup> .	5	0,50	2,5
$L_s^2$ 125 $\pm$ 5 cm <sup>2</sup> . . . .	4,8	0,50	2,4
$\int \sigma_U^a \frac{dE}{E}$ 9 $\pm$ 1 $b$ . . . . .	11	— 0,55	— 6,0

terkonstanten ermittelt worden. In einem schwedischen Versuch (ZEBRA<sup>6)</sup>) wurde ein Tank von 1 m Durchmesser und eine Ra-Be-Quelle verwendet. Ein amerikanisches Experiment (NAA<sup>7)</sup>) bestand aus einem Tank von 1,52 m Durchmesser und einem Water-Boiler-Reaktor als Neutronenquelle.

Diese Resultate gaben uns Gelegenheit, die Gittertheorie zu prüfen und die mit Hilfe direkter Messungen nicht mit genügender Genauigkeit bestimmbaren Grundkonstanten anzupassen. Eine von MUMMARY<sup>8)</sup> erstmals für graphitmoderierte Systeme angewendete Methode ist dazu besonders geeignet, weil sie die in der Rechnung unsichersten Werte von  $\eta$  und dem Resonanzintegral als Parameter frei lässt, währenddem  $L_s$ ,  $L_{th}$ ,  $f$  und  $\epsilon$ , die weniger empfindliche Grössen enthalten, berechnet werden.

Dem effektiven Resonanzintegral legen wir die experimentell gut fundierte Form

$$\left( \int \sigma_U^a(E) \frac{dE}{E} \right)_{eff} = A \left( 1 + \mu \frac{S}{M} \right)$$

mit den Bezeichnungen  $S$  für die Oberfläche und  $M$  für die Masse pro Zentimeter Uranstab zugrunde.

<sup>6)</sup> R. PERSSON, E. BLOMSJÖ, M. BUSTRAAN and R. MEIER (wird demnächst im Journal of Nuclear Energy publiziert).

<sup>7)</sup> K. COHEN, Geneva Paper No. P/605 (1955).

<sup>8)</sup> W. MUMMARY, Geneva Paper No. P/429.



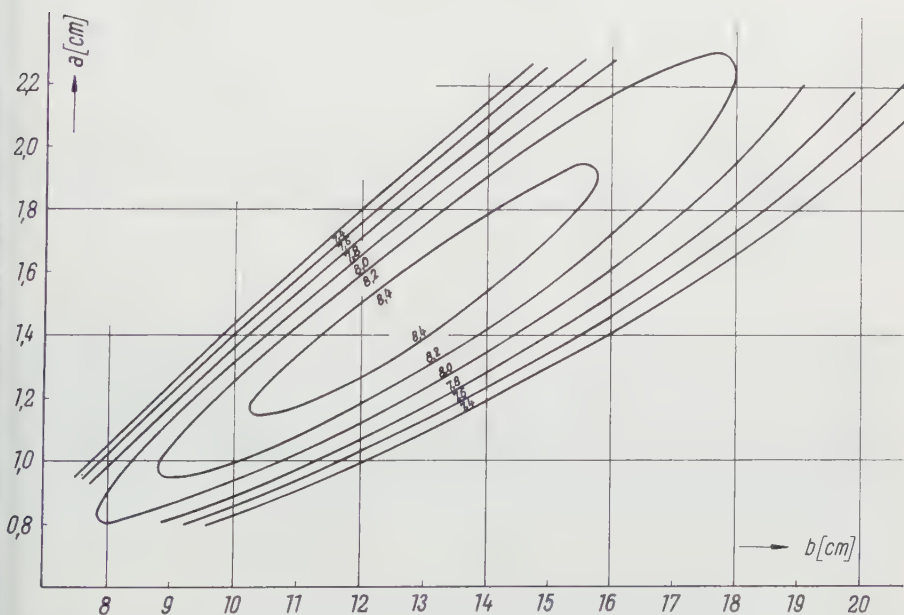
Die Analyse der Versuchsdaten führt dann auf die Werte von Tabelle 2.

Tabelle 2

$\eta$	$A$ $10^{-24} \text{ cm}^2$	$\mu$ $\text{g cm}^{-2}$	
1,303	5,7	5,1	ZEBRA <sup>6)</sup>
1,301	5,5	6,4	NAA <sup>7)</sup>

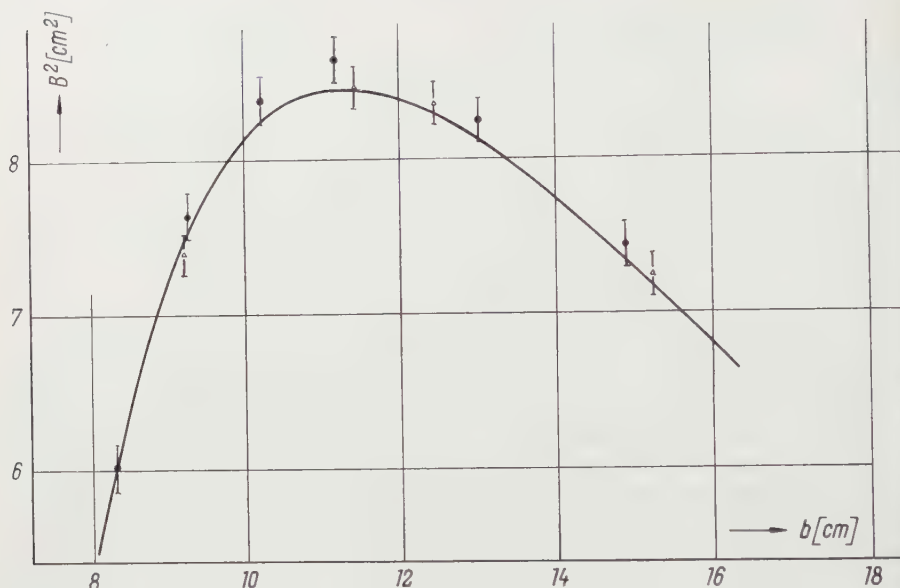
Mit den Mittelwerten der Daten von Tabelle 2 wurde die Bucklingfläche in Abhängigkeit vom Stabradius  $a$  und der Gitterkonstanten  $b$  berechnet. Das Relief dieser Fläche ist in Figur 1 dargestellt.

Figur 2 zeigt einen Schnitt durch die berechnete Bucklingfläche mit dem Stabradius  $a = 1,27 \text{ cm}$ . Vergleichsweise sind die von R. PERSSON *et al.*<sup>6)</sup> und K. COHEN<sup>7)</sup> gemessenen Werte aufgetragen. Die experimentellen Punkte können innerhalb der Messgenauigkeit angepasst werden.



Figur 1

Buckling-Fläche (Parameter  $B^2 \text{ m}^{-2}$ ) für quadratisches Gitter ( $b \text{ cm}$ ) kreiszylindrischer Uranstäbe (Radius  $a \text{ cm}$ ) in schwerem Wasser (99,76%). Aluminiumhülle 0,1 cm dick.



Figur 2

Buckling  $B^2$  für ( $\text{D}_2\text{O}$  – U $\text{nat}$ )-Gitter, Stabradius  $a = 1,27$  cm. — berechnet mit  $\eta = 1,302$  und  $(\int \sigma(E) dE/E)_{\text{eff}} = 5,6 + 32 S/M$ ;  $\Delta$  NAA-Exponentialexperiment;  $\bullet$  ZEBRA-Exponentialexperiment.

## Der thermische Ausgleichsvorgang in einem Medium mit internen Wärmequellen, von K. HINTERMANN, Zürich<sup>1)</sup>.

### Einführung

In einem Reaktor bestehen in allen Teilen kontinuierlich verteilte innere Wärmequellen. Im stationären Fall müssen die dadurch hervorgerufenen Temperaturfelder für die Konstruktion der Kühlsysteme erfasst werden können. Wegen des Einflusses der Temperatur auf die Reaktivität eines Reaktors müssen, im Hinblick auf die Regulierung, die Temperaturen im Reaktorkern jedoch auch bei zeitlichen Änderungen betrachtet werden. Ein wesentlicher Teil dieses Problems ist der thermische Ausgleichsvorgang in den Brennstoffelementen selbst, in welchen über 90% der gesamten Wärme entstehen.

### Berechnung

Die Wärmeleitungsgleichung mit einem Quellenglied lautet:

$$a \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = -\Phi(r, t) \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Reaktor AG., Zürich, und AG. Brown, Boveri & Cie., Baden.

oder eindimensional für eine Platte, nach entsprechender Wahl der Einheiten:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = -\Phi(r, t). \quad (2)$$

Hier erscheinen die Längen mit der Dimension  $\sqrt{\text{Zeit}}$  (Einheit:  $\sqrt{s}$ ). Die Einheiten stellen nichts anderes dar, als die Längen in Zentimeter, dividiert durch die Quadratwurzel aus der Temperaturleitzahl  $a$ .

Die Lösung der Gleichung (2) ist mittels Laplace-Transformation<sup>2)</sup> möglich. Falls der Nullpunkt der Temperaturskala so gewählt wird, dass er mit der Randtemperatur zusammenfällt, lautet die Lösung:

$$T(x, t) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; t) T(\xi, 0) d\xi + \int_0^l d\xi \int_0^t \Gamma(x, \xi; t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$\Gamma(x, \xi; t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t / l^2} \sin n \frac{\pi}{l} x \sin n \frac{\pi}{l} \xi$$

( $l$  Plattendicke in  $\sqrt{s}$ ).

Trotzdem am Rande der Heizelemente keine konstante Temperatur herrscht, sondern ein Wärmeübergang an einen Wärmeträger stattfindet, stört hier die Voraussetzung konstanter Randtemperaturen nicht, da in jedem Falle der Wärmeübergang durch Wärmeleitung ersetzt werden kann. Es braucht dazu nur ein quellenfreies Gebiet ausserhalb des Randes in die Lösung einbezogen zu werden.

#### *Diskussion der Lösung*

Zur Diskussion sei die Lösung für räumlich konstante, zur Zeit  $t = 0$  mit konstanter Stärke einsetzende Wärmeproduktion explizit angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} T(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t / l^2} \sin n \frac{\pi}{l} x \int_0^l T(\xi, 0) \sin n \frac{\pi}{l} \xi d\xi \\ + \frac{4 l^2}{\pi^3} \Phi \sum_{n=2m-1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - e^{-n^2 \pi^2 t / l^2}) \sin n \frac{\pi}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Das erste Glied stellt zur Zeit  $t = 0$  die Fourier-Reihe für den Anfangstemperaturverlauf  $T(x, 0)$  dar und wird mit  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 abgebaut, und zwar in erster Näherung mit der Zeitkonstanten  $l^2/\pi^2$ .

Das zweite Glied beginnt bei  $t = 0$  mit 0 und geht für  $t \rightarrow \infty$  mit derselben Zeitkonstanten  $l^2/\pi^2$  in diejenige Fourier-Reihe über, die denjenigen Parabelbogen darstellt, den man auch aus der stationären Wärmeleitungsgleichung erhält, wie es auch sein muss.

#### *Ausgleichszeiten, Zylindergeometrie*

Die Zeitkonstante des Ausgleichsvorganges (« Ausgleichszeit ») bei einer Platte beträgt  $l^2/\pi^2$  für konstante Randtemperaturen.

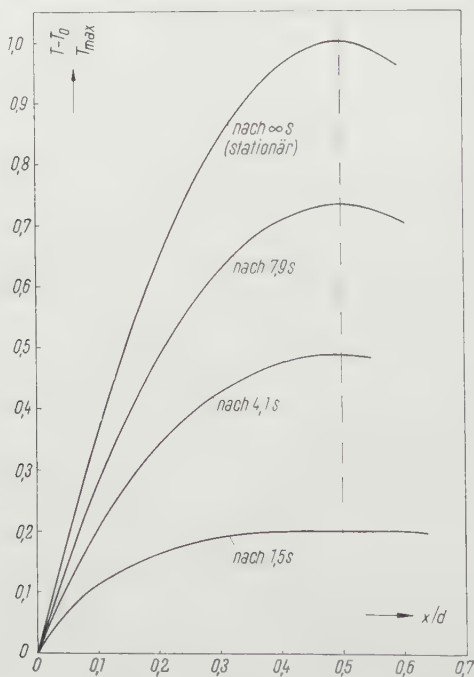
<sup>2)</sup> G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Springer, Berlin 1937).

Setzen wir statt  $l$  in  $l/\sqrt{s}$   $d$  in Zentimeter ein, so ist:

$$\frac{l^2}{\pi^2} = \frac{d^2}{\pi^2 a} = \frac{d^2 c \rho}{\pi^2 k} \quad (5)$$

( $a$  Temperaturleitzahl,  $c$  spezifische Wärme,  $\rho$  Dichte,  $k$  Wärmeleitkoeffizient). Die Ausgleichszeiten sind also proportional dem Quadrat der linearen Ausdehnung eines Körpers und umgekehrt proportional der Temperaturleitzahl. Sie sind unabhängig von der Quellstärke.

Der Zähler des Ausdruckes für die Ausgleichszeit (5) ist proportional dem Verhältnis Wärmeinhalt zu erzeugter Wärmemenge. Dass dieser «spezifische» Wärmeinhalt proportional zu  $d^2$  ist, sieht man ein, wenn man den stationären Fall betrachtet: Ausser der Maßstabsvergrößerung mit zunehmendem  $d$  müssen noch die Temperaturgefälle linear zunehmen, um die mehr erzeugte Wärme abzuführen.



Figur 1

Temperaturverlauf in einer ebenen Platte nach Einsetzen interner Wärmequellen.  $T$  Temperaturen;  $T_0$  Randtemperatur;  $T_{max}$  Temperatur in Plattenmitte nach  $\infty s$ ;  $d^2/a = 57,3 s$ ;  $d$  Plattendicke;  $a$  Temperaturleitzahl.

Die Fläche unter der Temperaturparabel ist also proportional zu  $d^3$ , während die durch die Quellenverteilung erzeugte Wärme linear mit  $d$  verläuft.

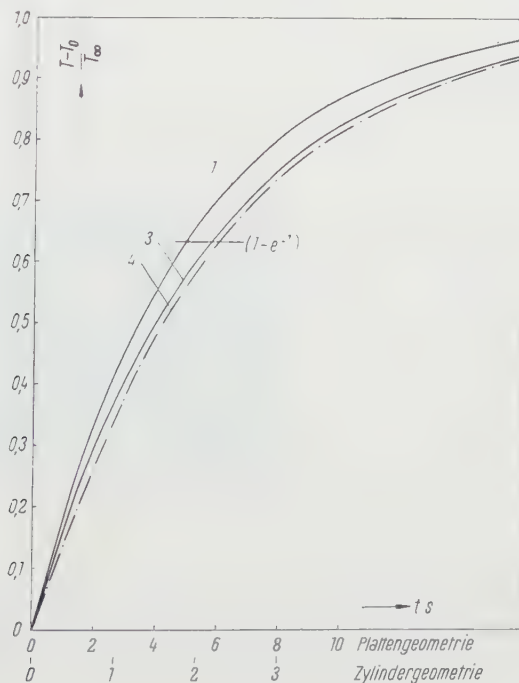
Wird nun die Plattendicke als Durchmesser in die Zylindergeometrie übergeführt, so zeigt sich, dass die Parabel des stationären Zustandes eine Parabel bleibt, jedoch ihre Scheithöhe nur mehr die Hälfte derjenigen der Plattengeometrie beträgt (Umfang zu Fläche wird doppelt). Ferner ist die mittlere Tempe-

ratur einer parabolischen Verteilung im Zylinder  $1/2$  der Scheiteltemperatur, während sie in einer Platte  $2/3$  beträgt. Der Wärmeinhalt in Zylindergeometrie und damit auch die Ausgleichzeiten betragen also

$$t_{\text{Zyl}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{2/3} t_{\text{Pl}} = \frac{3}{8} t_{\text{Pl}}.$$

### Resultate

Figur 1 zeigt den Temperaturverlauf in einer Platte mit Anfangstemperatur  $T = 0$  bei räumlich konstanter, zur Zeit  $t = 0$  mit konstanter Stärke einsetzender Quellenverteilung zu verschiedenen Zeiten. Man sieht deutlich, wie sich zu Beginn der Randeinfluss noch nicht voll bis zur Mitte auswirken kann und daher die Kurven anfänglich etwas abgeplattet sind.



Figur 2

Zeitlicher Verlauf von Temperaturen in einem Medium mit internen Wärmequellen.  $T$  Temperaturen;  $T_0$  Randtemperatur;  $T_\infty$  Temperatur für  $t \rightarrow \infty$ ;  $t$  Zeit seit Einsetzen der Quellen. 1 mittlere Temperatur, gleichmäßige Verhältnisse; 2 mittlere Temperatur, gemittelt über Plattengeometrie; 3 zeitlicher Verlauf des Temperaturmaximums.  $d^2/a = 57,3 \text{ s}$ ;  $d$  Plattendicke, Zylinderdurchmesser;  $a$  Temperaturleitzahl [ $\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ].

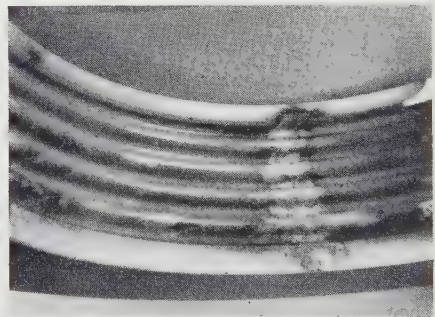
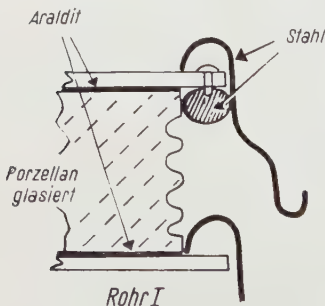
Die angegebenen Zeiten beziehen sich auf eine Platte von 2,6 cm Uran. Die Kurven werden jedoch *allgemein gültig*, wenn man die Zeiten statt in s in Einheiten von  $d^2/a$  angibt.

In Figur 2 sind nun die zeitlichen Temperaturverläufe dimensionslos mit gemeinsamer Asymptote aufgetragen. Es sind dies die Scheiteltemperatur (3), die mittlere Temperatur (2), und als oberste Kurve (1) ist derjenige Verlauf aufgetragen, der sich ohne Abplattung, bei konstantem Quotienten zwischen abfließender Wärmemenge und Temperaturdifferenzen im Material ergeben würde (Zeitkonstante  $l^2/12$ ).

Wenn man also bei variierenden Verhältnissen mit den gleichbleibenden Bedingungen, wie sie der Kurve 1 zugrunde liegen, rechnet, so ist der grösstmögliche Fehler (bei idealem Wärmeübergang am Rand) 18%. Mit endlichen Wärmeübergangszahlen am Rand wird der Fehler kleiner.

### Untersuchung über Vakuumüberschläge an Beschleunigungsrohren, von F. BUMILLER, Zürich<sup>1)</sup>.

Die Isolationsfestigkeit des Beschleunigungsrohres des Zürcher Bandgenerators<sup>2)</sup> sank im Verlauf von etwa 300 Betriebsstunden von 1,8 MV auf 1,2 MV. Nach der Zerlegung des Rohres liess sich auf den Isolatoren eine starke Verkohlung feststellen, die mit ziemlicher Sicherheit auf das zum Kleben verwendete Araldit zurückzuführen war, gegen dessen Eindringen in den Vakuumraum keine besonderen Vorsichtsmassregeln beobachtet wurden (Figur 1).



Figur 1

Auf Grund von neueren Erfahrungen, wie sie insbesondere von der Van de Graaff-Gruppe in Saclay (Paris)<sup>3)</sup> gesammelt wurden, wurde ein neues Beschleunigungsrohr mit glatten, unglasierten Porzellanisolatoren und Aluminiumelektroden gebaut. Obwohl dieses Rohr zu Beginn 1,9 MV bis 1,8 MV isolierte, sank die Spannungsfestigkeit im Verlauf einer Woche auf 1,2 MV. Die einzelnen Isolatoren zeigten kräftige Aluminiumbahnen, deren Widerstand zum Teil unter 1 M $\Omega$  lag. Besonders aufschlussreich waren Aluminiumfusspunkte, welche an den Stellen am Isolator entstanden, wo der Elektrodenring das Porzellan berührte. Sie sind leicht als der Beginn der Aluminiumbahnen zu erkennen (Figur 2).

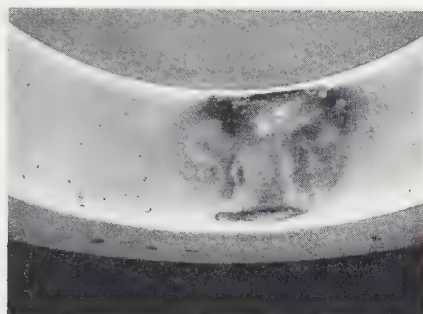
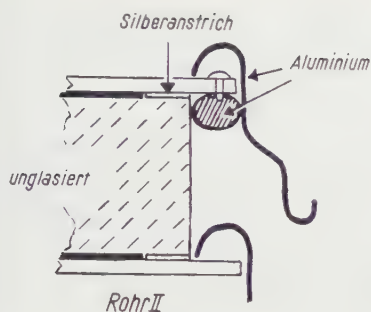
Um den Bandgenerator betriebsbereit zu halten, wurde aus den gereinigten Isolatoren des ersten und den Elektroden des zweiten Rohres ein Übergangsrohr gebaut. Dabei wurden Erfahrungen, die aus der Zerstörung der ersten Rohre

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität.

<sup>2)</sup> F. BUMILLER, V. MEYER, H. H. STAUB und H. WINKLER, Z. Naturf. 10a, H. 7 (1955).

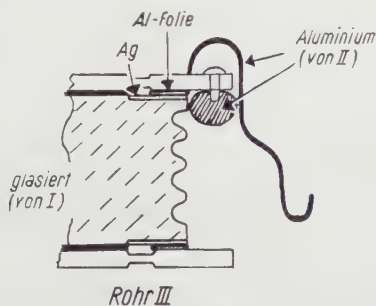
<sup>3)</sup> Rapport C. E. A. No. 189, 1953 (Centre d'Etudes Nucléaires Saclay, Paris).





Figur 2

gezogen werden konnten, bereits berücksichtigt. So wurde durch Versilbern der Isolator-Metalltrennfläche und Einlegen einer Aluminiumfolie ein besserer Kontakt ermöglicht; durch eine Nute im Zwischenblech wurde das Vordringen des Araldits in den Vakuumraum verhindert (Figur 3). Nach einer anfänglichen Isolationsfestigkeit von 1,8 MV hält dieses Rohr nach etwa 500 Betriebsstunden immerhin noch 1,5 MV.



Figur 3

In der Zwischenzeit wurden Versuche für die beste Isolator-Elektroden-Anordnung durchgeführt. Über eine Giessharzausführung wurde eine Spannung von maximal 250 kV vom Bandgenerator an das Versuchsgefäß angelegt. Zur Beurteilung der Messungen wurde die Beziehung von CRANBERG<sup>4)</sup>

$$VE \leq C \quad \text{oder} \quad \frac{V^2}{d} \leq C$$

für Parallelanordnung herangezogen.  $V$  ist die angelegte Spannung,  $E$  die Feldstärke,  $d$  der Elektrodenabstand.  $C$  ist eine vom Material abhängige Konstante (überschreitet  $VE$  ihren Wert, so erfolgt Durchbruch). Der Wert von  $C$  beträgt für Elektrodendurchschläge etwa

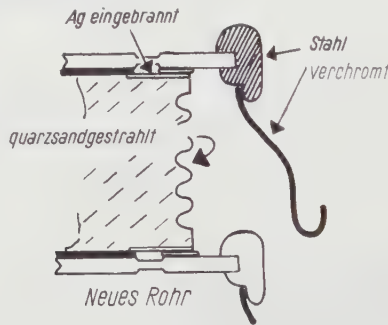
$$7 \frac{(\text{MV})^2}{\text{m}},$$

<sup>4)</sup> L. CRANBERG, J. appl. Phys. 23, 518 (1952).

für Isolatorüberschläge liegt er allgemein zwischen  $0,1$  und  $0,3 \text{ (MV)}^2/\text{m}$  und kann für sehr gute Isolatoren auf rund  $0,8 \text{ (MV)}^2/\text{m}$  ansteigen. Es wurden folgende Messungen durchgeführt:

1. Die Festigkeit gegen Elektrodendurchschlag wurde geprüft. Sie lag über der von der Anlage erreichten Spannung von  $250 \text{ kV}$ . Dies entspricht einem Wert von  $C \approx 7 \text{ (MV)}^2/\text{m}$ .

2. Es wurde vermutet, dass die Aluminiumfusspunkte, wie sie im Rohr II auftraten, vom Kontakt des Elektrodenringes mit dem Isolator herrührten. Um eine grössere Zahl von Überschlügen zu erhalten, wurde eine Anordnung mit verkürztem Ringabstand aufgebaut, wobei im ersten Modell die Ringe satt am Porzellan lagen, im zweiten der Abstand jedoch  $2 \text{ mm}$  betrug.



Figur 4

Es gelang mit dem ersten Aufbau wiederum Fusspunkte und beginnende Bahnen zu erzeugen. Die Isolationsfestigkeit betrug  $120 \text{ kV}$  bei einer Funkenfolge von etwa  $1/\text{s}$ .

Die zweite Anordnung hielt  $170 \text{ kV}$  bei einer Funkenfolge von etwa  $1/\text{min}$ . Es waren keinerlei Spuren am Isolator festzustellen.

3. Auf Grund dieses günstigen Ergebnisses wurde eine Elektrodenanordnung aus verchromtem Stahl angefertigt, wie sie aus Figur 4 hervorgeht. Mit diesen Elektroden wurden folgende Isolatoren ausprobiert:

Isolator	$V_{\text{Überschlag}}$	$C$
a) Glatter Isolator, quarzsandgestrahlt . . .	$160 \text{ kV}$	$0,43$
b) Gewellter Isolator, glasiert. . . . .	$190 \text{ kV}$	$0,60 (0,47)$
c) Gewellter Isolator, quarzsandgestrahlt . .	$215 \text{ kV}$	$0,77 (0,61)$

Die  $C$ -Werte in Klammern würden einer Berücksichtigung der Wellung entsprechen. Mikroskopische Untersuchung von Funkenaufnahmen ergab jedoch, dass die meisten Überschlüge geraden Bahnen folgen. Die gewellte Oberfläche scheint eher eine schnelle Verschmelzung zu verhindern. Nach diesen Messungen und einigen Zwischenuntersuchungen dürften für ein Beschleunigungsrohr folgende Bauregeln zu empfehlen sein:

Porzellan ist, zumindest im Vakuum, der beste Isolator, wobei eine rauhe, unglasierte Oberfläche vorzuziehen ist. Trotz höherer Sekundäremission sind höherverdampfende Schwermetalle den Aluminiumelektroden vorzuziehen. Das Eindringen von organischen Materialien in den Vakuumraum ist unbedingt zu vermeiden.

Absolute Sauberkeit der Isolatoren (Fingerabdrücke!) und gute Politur der Elektroden haben einen wesentlichen Einfluss auf die Isolationsfestigkeit.

Für guten Kontakt zwischen Metall und Porzellan ist zu sorgen. Freie Isolatoren- und Seitenflächen sollen sich unter rechtem Winkel schneiden.

Nach diesen Erfahrungen wurde ein neues Beschleunigungsrohr vom Typ 3c gebaut, welches in den nächsten Wochen in Betrieb genommen wird.

### **Knickung von Schraubenfedern unter Druck und konservativer Torsion,** von HCH. MAAG, Zürich<sup>1)</sup>.

Es wurde das Knickproblem einer Schraubenfeder untersucht, die durch eine axiale Druckkraft und ein semi-, quasi- oder pseudotangenciales Torsionsmoment belastet ist. Diese Momente ergeben sich nach H. ZIEGLER<sup>2)</sup> aus einfachen Kräfteverteilungen, während das übliche axiale Torsionsmoment, mit dem vielfach gerechnet wird, sich ausser an Einspannungen praktisch kaum realisieren lässt. Dazu sind diese Momente – wieder im Gegensatz zum axialen Torsionsmoment – konservativ, so dass man die Stabilitätsuntersuchung rein statisch durchführen darf; also die kritischen Lasten auf Grund des erstmaligen Auftretens von Gleichgewicht bei einer ausgebogenen elastischen Linie ermitteln kann.

Da sich eine Schraubenfeder mit geringer Steigung elastisch als weicher Stab behandeln lässt, stellt diese Arbeit eine Erweiterung der Untersuchung von M. BECK<sup>3)</sup> über das Knickproblem bei schlanken Stäben unter Druck und konservativer Torsion dar. Die Erweiterung besteht darin, dass im Gegensatz zum schlanken Stab bei der Feder auch der Längenänderung und vor allem der Schiebung Rechnung getragen werden muss. Mit der für solche Eigenwertprobleme typischen Methode werden die Differentialgleichungen der elastischen Linie unter Berücksichtigung der Randbedingungen für verschiedene Lagerungen der Feder gelöst und die Knickgleichungen als Bedingungen für nichtidentisches Verschwinden dieser Lösungen berechnet. Diese Knickgleichungen stellen im allgemeinen transzendente Beziehungen zwischen der kritischen Druckkraft, dem kritischen Torsionsmoment und Form- und Materialkonstanten der Feder dar. In der Mehrzahl der untersuchten Fälle wurden diese Gleichungen in Diagrammen graphisch dargestellt und der Einfluss des Schlankheitsgrades der Feder und der Querschnittsform des Federdrahtes auf die kritischen Lasten aufgezeigt. Eine ausführliche Veröffentlichung ist in Vorbereitung.

### **Über die Anwendung des elektrisch leitenden «Teledeltos»-Papiers für die Ausmessung von Potentialfeldern,** von E. B. BAŞ, E. BERNHARD und M. NIEDERHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>.

Die Arbeit behandelt den Einfluss des anisotropischen Charakters der elektrischen Leitfähigkeit von «Teledeltos»-Papier L 39 bei der Anwendung dieses

<sup>1)</sup> Assistenz für technische Mechanik an der ETH.

<sup>2)</sup> H. ZIEGLER, ZAMP 3, 96 (1952).

<sup>3)</sup> M. BECK, Ing.-Arch. 23, 231 (1955).

<sup>1)</sup> ETH, Abteilung für industrielle Forschung des Institutes für technische Physik.

Papiers für Potentialfeldmessungen. Es wird gezeigt, dass die elektrische Leitfähigkeit in Walzrichtung des Papiers um rund 6% grösser ist als quer dazu. Diese Leitfähigkeitsanisotropie kann durch eine affine Transformation berücksichtigt werden. An zwei theoretisch errechenbaren Beispielen wird der Einfluss der Anisotropie studiert. Das erste Beispiel behandelt die Potentialverteilung entlang der Achse einer elektronenoptischen zweidimensionalen Zweielektroden-Kathodenlinse. Bei Nichtberücksichtigung der Anisotropie wurde eine maximale Abweichung des gemessenen Potentialverlaufes von dem gerechneten Verlauf von etwa 2% gefunden (bezogen auf die Elektrodenspannung). Dieser Fehler hat entlang der Achse denselben Verlauf wie die errechnete Funktion  $\partial^2\Phi/\partial x^2$ . Berücksichtigt man die Anisotropie, so reduziert sich die maximale Abweichung auf rund 5‰. Das zweite Beispiel behandelt die Potentialverteilung in einem hyperbolischen Quadropol:  $\varphi = u_0 (x^2 - y^2)$ . Es wird gezeigt, dass hier das Feld in der Nähe des Sattelpunktes auf die Leitfähigkeitsanisotropie sehr empfindlich ist und dass auch hier die Berücksichtigung der Anisotropie durch affine Koordinatentransformation weitgehende Verbesserungen erwirkt. Aus diesen Untersuchungen kann das Resultat gezogen werden, dass man besonders bei der Ausmessung von stark inhomogenen Feldern mit Hilfe des «Teledeltos»-Papiers vorsichtig sein soll. Es ist empfehlenswert, die Anisotropie stets zu korrigieren, und zwar mit einem Anisotropieverhältnis des gerade zur Messung verwendeten Papierstückes. Zur leichten Bestimmung des Anisotropieverhältnisses ( $\sigma_I/\sigma_{II}$ ) wird in Anlehnung an die erwähnten Messungen am Quadropol ein kleines Gerät vorgeschlagen, welches einen Quadropol aus zwei gekreuzten Plattenkondensatoren als Elektroden darstellt. Eine der vier Platten wird mit Hilfe einer Mikrometerschraube verschiebbar angeordnet. Das Mittelpunktpotential des auf diese Weise affinen verzerren Quadropols wird gemessen und durch Verschiebung der beweglichen Platte auf das richtige Sattelpunktpotential eingestellt. Die benötigte affine Verzerrung des Modells kann dann direkt vom Mikrometer abgelesen werden. Mit einem solchen Gerät kann das verwendete Papier in allen Bezirken auf die Anisotropie kontrolliert und ein bezüglich Anisotropie homogenes Stück ausgesucht werden. Ein ausführlicher Bericht erscheint demnächst in der ZAMP.

### Anwendung von kolloidalen radioaktiven Substanzen in der Medizin. Messtechnik. Von G. PORETTI und E. WILDBOLZ, Bern<sup>1)</sup>.

Durch Einspritzung von radioaktiven Substanzen in das Tumorgewebe kann eine einwandfreie therapeutische Wirkung erreicht werden, wenn:

1. die Tumoren von aussen oder chirurgisch erreichbar sind und ihr Volumen mit guter Näherung bestimmt werden kann;
2. die eingespritzte Substanz physiologisch neutral ist und lange Zeit an Ort und Stelle bleibt.

Ist das Tumolvolumen bekannt und wird die Bedingung 2 erfüllt, so kann die Strahlendosis bestimmt werden.

Schon seit einigen Jahren ist es bekannt, dass die kolloidalen Substanzen die Bedingung 2 mehr oder weniger erfüllen. Es wurden  $^{63}\text{ZnS}$ ,  $^{52}\text{MnO}_2$ ,  $^{108}\text{Au}$  metallisch,  $^{59}\text{FeSO}_4$ ,  $\text{Cr}^{32}\text{PO}_4^{2-}$  und  $\text{ZrOH}^{32}\text{PO}_4$  angewandt. Wir haben hauptsächlich die therapeutische Wirkung des  $^{32}\text{P}$  im Chromphosphat und Zirkonylphosphat bei Blasenkarzinom erprobt und dabei versucht, für das  $\text{CrPO}_4$  die Gültigkeit des Punktes 2 am Menschen zu beweisen.  $\text{CrPO}_4$  wurde statt mit  $^{32}\text{P}$  mit

<sup>1)</sup> Inselspital.

<sup>2)</sup> M. E. MORTON, Nucleonics 10, No. 11, 92 (1952).



$^{51}\text{Cr}$  markiert, welches mit hoher spezifischer Aktivität ( $n, \gamma$ )-Reaktion am  $^{50}\text{Cr}_2\text{O}_3$  aus Harwell erhältlich ist.  $^{51}\text{Cr}$  zerfällt nach K-Einfang (80%; Fluoreszenzausbeute etwa 26%) und emittiert eine Gammalinie (3%) von 0,323 MeV, welche mit Hilfe eines NaI(Tl)-Szintillationszählers gut messbar ist.

Die in unseren Versuchen von den eingespritzten 1,2 mc Chrom gelieferte Dosis wurde in 100 rep total errechnet. Der Geometriefaktor (Kreiszyylinder) für die Gammadosis wurde an Hand der Berechnung von PLESCH<sup>3)</sup> bestimmt.



Figur 1

Die Chrommarkierung erlaubt, das an der Harnblasenwand angelagerte  $\text{CrPO}_4$  von aussen nachzuweisen. Die Auffindung der aktiven Stelle erfolgte mit Hilfe eines Scinti-Scanners<sup>4)</sup> (Figur 1), einer an der Universität Bern konstruierten Apparatur, welche die automatische Abtastung von Körperteilen mittels eines Szintillationszählers erlaubt. Die aktiven Stellen oder Organe werden graphisch registriert (Schilddrüse:  $^{131}\text{I}$ ; Leber:  $^{198}\text{Au}$  usw.).

Die Stelle, an der sich das  $\text{CrPO}_4$  angereichert hat, ist in Figur 2 ersichtlich, und daraus entnimmt man, dass die Substanz effektiv 27 Tage lang (Chromhalbwertszeit) und mehr in loco geblieben ist. Eine analoge Messung an einem zweiten Patienten lieferte gleiche Resultate.

<sup>3)</sup> R. PLESCH, Strahlentherapie 97, 277 (1955).

<sup>4)</sup> W. BOLLIGER und G. PORETTI, Experientia 12, 116 (1956).

Patient S. A. '91 (14. 12. 1955)



Figur 2

Durch diese Ergebnisse wird bestätigt, dass

1. die effektive Halbwertszeit des  $^{32}\text{P}$  in der mit  $\text{Cr}^{32}\text{PO}_4$  infiltrierten Stelle 14 Tage beträgt;
2. die von den  $^{32}\text{P}$ - $\beta$ -Strahlen in dem infiltrierten Volumen abgegebene Energie (Dosis) mit Hilfe der Formel<sup>5)</sup>

$$D_{\beta} = 73 \bar{E}_{\beta} T_{\text{eff.}} C \quad [\text{rads}]$$

( $\bar{E}_{\beta}$  – mittlere Energie des  $\beta$ -Spektrums in MeV,  $T_{\text{eff.}}$  = effektive Halbwertszeit in Tagen,  $C$  =  $^{32}\text{P}$ -Konzentration in Mikrocurie pro Gramm Gewebe)

errechnet werden kann.

Für eine Einspritzung von 4 mc  $^{32}\text{P}$  in 10 g Tumorgewebe beträgt deshalb die Dosis 290 000 rads. Die von der 1,7 MeV Betastrahlung im Gewebe befreite Bremsstrahlungsenergie beträgt weniger als 1% der Ionisationsenergie<sup>6)</sup>.

**Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss der Eintrittsgrenzschicht auf die Druckumsetzung in geraden und gekrümmten Diffusoren<sup>1)</sup>,** von H. SPRENGER, Zürich<sup>2)</sup>.

Diffusoren sind Kanäle mit zunehmendem Strömungsquerschnitt. Sie dienen bei tropfbaren Flüssigkeiten und bei Gasen (im Unterschallbereich) zur teilweisen Umsetzung von kinetischer Energie in statischen Druck. Die Energieumsetzung in Diffusoren wird von zahlreichen Parametern beeinflusst, beispielsweise durch das Flächenverhältnis, den Erweiterungswinkel, die Kanalkrümmung, die Unterschiede der Form aufeinanderfolgender Querschnitte, durch den Turbulenzgrad des Strömungsmediums, sowie in besonders hohem Masse durch die Dicke und Symmetrie der Reibungsgrenzschicht beim Eintritt in die divergenten Kanäle. An 14 verschiedenen Diffusoren mit  $D_e = 10$  cm Eintrittsdurchmesser und dem maximalen Flächenverhältnis 1:4 wurde versucht, experimentell einen Teil dieser Abhängigkeiten zu ermitteln. Die Untersuchungen sind mit Luft im in-

<sup>5)</sup> L. D. MARINELLI, Radiology 62, 656 (1954).

<sup>6)</sup> S. J. WYARD, Nucleonics 13, No. 7, 44 (1955).

<sup>1)</sup> Ein ausführlicher Bericht erscheint in den «Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH», herausgegeben von Prof. Dr. J. ACKERET.

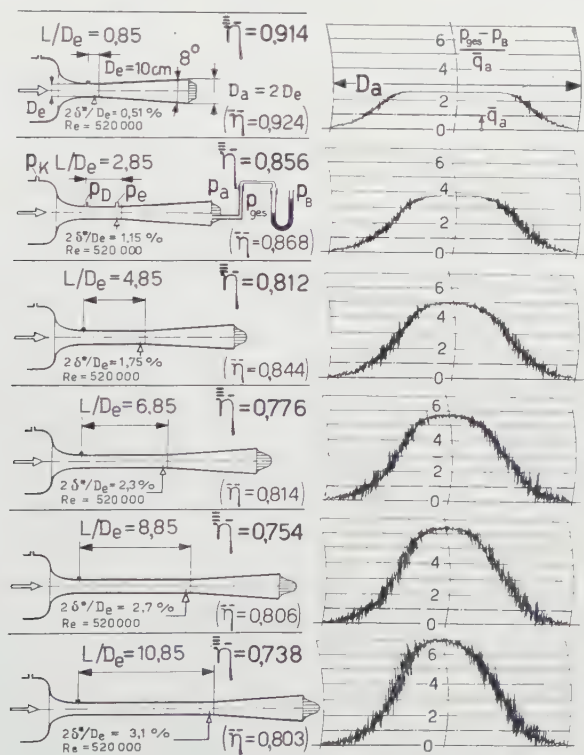
<sup>2)</sup> Institut für Aerodynamik der ETH.



kompressiblen Bereich ausgeführt worden bei mittleren Eintrittsgeschwindigkeiten  $\bar{u}_e = 600$  bis  $12000$  cm/s; diese ergeben Reynolds-Zahlen (bezogen auf  $D_e$ ) zwischen  $30000$  und  $800000$ . Zur Beurteilung der Reibungsgrenzschicht dient wie üblich die Verdrängungsdicke  $\delta^*$ ; sie konnte durch Vorschalten zylindrischer Rohre variiert werden zwischen  $0,3$  und  $6\%$ , bezogen auf den Rohrradius.

Die Messungen brachten im wesentlichen folgende Ergebnisse:

Bei geraden  $8^\circ$ -Diffusoren und dünnen turbulenten Grenzschichten am Eintritt wird ein Druckanstieg von  $50\%$  des Eintrittsstaudrucks praktisch verlustlos erreicht. Gekrümmte Diffusoren mit gleichen Eintrittsbedingungen haben allgemein schlechtere Wirkungsgrade, können aber durch strömungstechnische Massnahmen, wie Abplattung in der Biegeebene, etwas verbessert werden; Flächenverhältnisse über  $1:3$  bringen nur noch bescheidene Gewinne. Der Einfluss dicker Grenzschichten erwies sich als sehr erheblich, der Druckrückgewinn sinkt bei



Einfluss der Eintrittsgrenzschicht (Verdrängungsdicke  $\delta^*$ ) auf den Druckrückgewinn ( $\eta$ ) für den geraden Kreiskegeldiffusor ( $F_e:F_a = 1:4$ ) bei konstanter Reynoldsscher Zahl ( $Re$ ). Die Austrittsenergieverteilungen sind mit einem relativ trägen Registriermanometer aufgenommen; die Schwankungen vermitteln nur ein qualitatives Bild der Turbulenz. (Die beiden Definitionen von  $\eta = (p_a - p_e)/(q_e - q_a)$  unterscheiden sich durch die Art der Mittelwertbildung der Staudrucke. Es ist  $\bar{q} = q/2 \bar{u}^2$  der Staudruck der mittleren Geschwindigkeit, während drei Striche andeuten, dass durch Integration der Verteilung von  $u^3$  ein Staudruck bestimmt wurde, der dem Wert der effektiv eintretenden Energie entspricht.)

geraden Diffusoren um etwa 20% und bei Hochkantkrümmern bis 40%. Die Resultate vermitteln Einblick in die Strömungsverhältnisse bei technischen Diffusoren, auf deren Bedeutung für den Wirkungsgrad von Turbokompressoren und Niederdruckturbinen abschliessend hingewiesen sei.

Das Bild zeigt instruktiv einige Ergebnisse der Messungen am geraden Kreisgegeldiffusor. Nach einem neuen, von Herrn Prof. Dr. J. ACKERET vorgeschlagenen Rechnungsgang gelang es, den Verlauf der Grenzschicht und somit auch die Druckumsetzung dieses Diffusors mathematisch zu erfassen, wenn gewisse empirisch ermittelte Konstanten mitverwendet werden. Das Verfahren beruht auf dem Einbau der Kontinuitätsgleichung in differentieller Form in die Differentialgleichung der Grenzschicht (Impuls- oder Energiesatz), wodurch Iterationen wegfallen und gute Konvergenz erreicht wird. Es ist anzunehmen, dass die mitbenutzten, empirisch gefundenen Werte sich auf Grund noch auszuführender Turbulenzmessungen im Diffusorinnern auch physikalisch interpretieren lassen.

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge.** Von WINFRIED OPPELT (Verlag Chemie, Weinheim 1954). 448 S., 353 Fig., 110 Taf. und 3 Tab.; Ganzleinen DM 31.80.

Dieses «kleine» Handbuch ist aus früheren Büchern des Verfassers entstanden und hat einen ganz beträchtlichen Umfang angenommen. Es füllt eine Lücke im deutschen Schrifttum und ergänzt, ja übertrifft die ausgezeichneten amerikanischen Bücher der Servotechnik von CHESTNUT and MAYER, NIXON usw. Die Regelungstechnik, die unter dem Namen «Servomechanisms and regulating systems» während und nach dem Zweiten Weltkrieg in den USA. einen enormen Aufschwung genommen hat und nun auch in Europa überall Eingang findet, kann einerseits in die allen Systemen gemeinsame «Regelungstheorie» und anderseits in die spezielle Kenntnis des Aufbaues der Servomechanismen, in die «Gerätetechnik», aufgeteilt werden. Um eine Vorstellung von den heutigen Möglichkeiten zu geben, behandelt das Buch aus der Gerätetechnik mechanische, hydraulische, pneumatische, kalorische und elektrische Beispiele. Eine systematische Einreihung erfahren die Messwerke (Geber, Fühler) sowie die Verstärker, darunter die magnetischen Verstärker, die gesteuerten Stromrichter und die Maschinenverstärker (zum Beispiel die Amplidyndmaschinen).

Der Hauptteil des Buches befasst sich mit der Regelungslehre. Die komplexen Übertragungsfunktionen werden mittels ungedämpfter sinusförmiger Variationen, unter Vermeidung der Laplace-Transformation, erklärt und durch komplexe Frequenzgangkurven in der Gaußschen Ebene dargestellt. Die von BLOCH und MICHAEL entwickelte Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene (Verlag Birkhäuser, 1950) kommt hier zur Anwendung, und es wäre wünschenswert, wenn ein Mathematiker die Systematik dieser Kurven weiter bearbeiten würde. Die Übertragungsfunktion wird in Verzögerungs- und Vorhaltglieder aufgespalten und deren Frequenzgangkurven besprochen. Im Gegensatz zu den amerikanischen Büchern legt der Verfasser sehr viel Gewicht auf die zeichnerische Darstellung der komplexen Frequenzgangkurven und der zeitlichen Übergangsfunktionen, dagegen wird die doppeltlogarithmische Darstellung des Amplituden- und Phasenganges nach BODE wenig gepflegt. Eingehend besprochen werden die Stabilitätskriterien nach ROUTH-HURWITZ, insbesondere die Stabilitätsgrenzen be-

Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, ferner die Kriterien von CREMER-LEONHARD und NYQUIST und das besondere Verhalten der Proportional- und Integralregler sowie ihrer Kombinationen. Die nichtlinearen Regelkreise, die Kreise mit Reibung, Anschlägen und Spiel («Lose»), die «Ein-Aus»-Regler, die Modellregelkreise und die Blockschaltbilder von elektronischen Analogierechengeräten beschliessen das Buch. In sprachlicher Hinsicht enthält es verschiedene Neuwörter. Der Text ist klar gefasst, die Ausstattung ist einwandfrei. Die besonderen Kennzeichen des Buches sind die Gründlichkeit sowie die enorme Mannigfaltigkeit der Figuren, Tabellen und der im Text verarbeiteten Literaturstellen.

Im Frühjahr 1956 erschien bereits eine zweite, neu bearbeitete und erweiterte Auflage mit 555 Seiten, 471 Abbildungen, 126 Tafeln und 3 Tabellen. Neu aufgenommen wurde die Wurzelartmethode. Die nichtlinearen Vorgänge werden auf 30 Seiten unter Verwendung der Beschreibungsfunktion und der Phasenebene zusammenfassend behandelt. Das Buch kann allen Theoretikern und Praktikern der Regelungstechnik sehr empfohlen werden. *Ed. Gerecke*

**Advances in Electronics.** Bd. 5, von L. MARTON (Academic Press Inc., New York 1953). XI + 420 S., 177 Fig., 1 Tafel; \$9.50.

Der fünfte Band der von L. MARTON herausgegebenen Buchreihe "Advances in Electronics" umfasst die folgenden Beiträge:

R. C. JONES, *Performance of Detectors for Visible and Infrared Radiation*; R. W. HAYWARD, *Beta-Ray Spectrometers*; F. E. WILLIAMS, *Solid-State Luminescence*; W. E. DANFORTH, *Thorium Oxide and Electronics*; H. C. WEINGARTNER and S. W. KENNEDY, *A Review of Modern Vacuum Pumps in Electronics Manufacturing*; R. Q. TWISS, *On the Steady-State Theory of the Magnetron*; CH. J. HIRSCH, *A Review of Recent Work in Color Television*; J. S. SCHAFFNER, *Junction Transistor Applications*.

Aus dem dem Band 5 beigegebenen Gesamtregister für die bisher erschienenen fünf Bände der Reihe geht hervor, dass in diesen alle Gebiete der Elektronik, sowohl die grundlegenden physikalischen Erscheinungen als auch deren technische Anwendungen, in gleichem Masse zur Darstellung gekommen sind. Um dies in Zukunft noch mehr zu betonen, werden die folgenden Bände den Titel «Advances in Electronics and Electron Physics» tragen. Es ist dem Werk auch unter dem neuen Namen eine weite Verbreitung zu wünschen. *A. A. Rusterholz*

**Résistance des Matériaux théorique et expérimentale.** Par ROBERT L'HERMITE. Tome I (Dunod, Paris 1954). 860 p., 417 fig.; relié toile, fr.fr. 8400.-.

L'ouvrage en quatre volumes que M. ROBERT L'HERMITE, directeur des Laboratoires du bâtiment et des travaux publics, à Paris, est en train d'écrire sur la *Résistance des matériaux*, est destiné aux ingénieurs et aux physiciens qui désirent approfondir et élargir leurs connaissances en cette matière. L'auteur cherche en quelque sorte à rédiger une encyclopédie de cette partie de la science, en dressant un tableau aussi clair et aussi complet que possible des lois et des expériences acquises dans ce domaine. Il y réussira certainement, si l'on en juge par le *tome premier*, remarquablement écrit, qui vient de paraître.

Le *chapitre I* de ce volume se rapporte aux lois et aux équations générales de la théorie de l'élasticité. Les *chapitres II à IX* traitent l'élasticité plane, la flexion et la torsion des corps à fibre moyenne, la théorie des structures isostatiques, celle des structures hyperstatiques, les plaques et dalles fléchies et les coques. Un *dernier chapitre (X)* est consacré à des critiques et à des remarques générales.

Ce volume est donc une œuvre théorique. Il est destiné à donner une vue d'ensemble sur la théorie de l'élasticité. Il constitue également un recueil des différentes méthodes de calcul et des cas d'intégration connus, mais un recueil résumé, comme le dit l'auteur dans la préface. Il a été en effet obligé, pour éviter une extension exagérée du texte, de condenser au maximum les exposés des différentes théories. Il se borne même, dans la plupart des cas, à en énoncer les principes et les résultats essentiels. Toutefois, il a eu l'heureuse idée de placer une bibliographie en cours de texte, et une autre en fin de chapitre, pour permettre au lecteur de puiser facilement aux sources, s'il le désire.

Une autre qualité de ce livre est que chaque chapitre et même de nombreux paragraphes peuvent être lus indépendamment, qualité que de nombreux lecteurs apprécieront.

Il est prévu que le *second volume* décrive les théories de la stabilité, du flambement et de la plasticité; le *troisième* traitera de la mécanique physique des matériaux; enfin, l'étude des phénomènes dynamiques, chocs et vibrations, des associations et assemblages de matériaux, des statistiques et de la sécurité, formera la matière du *quatrième volume*.

Nous recommandons vivement l'ouvrage de M. L'HERMITE non seulement aux ingénieurs et aux physiciens de l'industrie, mais à toute personne se consacrant à des recherches dans le domaine de la résistance des matériaux, car cet ouvrage, facile et agréable à consulter, est une source inépuisable de renseignements.

H. Favre

**Limit Distributions for Sums of Independent Random variables.** Von B. V. GNEDENKO und A. N. KOLMOGOROV, aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von K. L. CHUNG (Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, Mass., 1954). 261 Seiten; \$8.50.

Jeder Mathematiker, der sich mit modernen Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt, wird sich mit dem obigen, ins Englische übersetzten Buch der bedeutenden russischen Mathematiker GNEDENKO und KOLMOGOROV befassen müssen. Denn es enthält eine klare, axiomatisch saubere Darstellung klassischer und moderner Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der damit zusammenhängenden Begriffe, wie charakteristische Funktionen, unendlich-teilbare Verteilungen usw. Diese Grenzwertsätze bilden zum Teil die theoretische Basis der modernen mathematischen Statistik, es sei nur an das klassische Gesetz der grossen Zahlen erinnert.

Das vorliegende Buch setzt die einfacheren Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung als bekannt voraus. Es gibt vor allem eine Übersicht der fundamentalen russischen Beiträge an die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gebiete der Grenzwertsätze und kann als wohl bedeutsamste Publikation über diesem Gegenstand in den letzten Jahren bezeichnet werden.

W. Saxer

**Theorie ideal plastischer Körper.** Von W. PRAGER und P. G. HODGE, jr. ins Deutsche übertragen von F. CHMELKA (Springer-Verlag, Wien 1954). 274 S., 97 Abb.; sFr. 33.80.

Deutsche Übertragung des in ZAMP 5, S. 180, besprochenen Buches *Theory of Perfectly Plastic Solids*. Die Übersetzung schliesst sich eng an den Originaltext an, enthält aber einige von den Verfassern angeregte Verbesserungen sowie ein Verzeichnis der englischen Fachausdrücke.

H. Ziegler



# On Isotropic Tensor-Functions and the Measure of Deformation

By MEIR HANIN and MARKUS REINER, Haifa, Israel<sup>1)</sup> <sup>2)</sup>

The symbols used are

$A$	indicating ALMANSI,
$A_n, B_n, C_n$	coefficients,
$C$	indicating CAUCHY,
$e$	strain,
$G$	indicating GREEN,
$g_{rs}$	metric tensor,
$H$	indicating HENCKY,
$i, j, k$	principal directions,
$K_n$	constant coefficient,
$l$	length,
$l_0$	initial length,
$l_1$	final length,
$p_s^r$	stress tensor,
$S$	amount of shear, also indicating SWAINGER,
$V$	volume,
$v$	velocity,
$x_s^r, y_s^r$	symmetrical tensors of rank two,
$\alpha$	coefficient,
$\Delta l$	elongation,
$\delta$	KRONECKER'S delta,
$\eta$	coefficient of viscosity,
$\eta_c$	coefficient of cross viscosity,
$\lambda$	LAMÉ'S constant,
$\mu$	shear modulus,
I, II, III	principal invariants.

1. Let there be two physical quantities represented by two symmetric tensors of second rank  $x_s^r$  and  $y_u^t$ . Let both be related by

$$y_u^t = F(x_s^r), \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> Israel Institute of Technology.

<sup>2)</sup> The research reported in this document has been sponsored in part by the Air Research and Development Command, United States Air Force, under Contract AF 61 (514)-871, through the European Office, ARDC.

and let the relation be isotropic. Then, because of the generalized principle of dimensions, the function  $F$  must be expressible as a sum of symmetric tensors of second rank multiplied by scalars, thus

$$y_s^r = \mathcal{F}_0 \delta_s^r + \mathcal{F}_1 x_s^r + \mathcal{F}_2 x_\alpha^r x_s^\alpha + \mathcal{F}_3 x_\alpha^r x_\beta^\alpha x_s^\beta + \dots \quad (1.2)$$

which we may, for simpler writing, express in the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n x^n = \mathcal{F}_0 x^0 + \mathcal{F}_1 x^1 + \mathcal{F}_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n x^n. \quad (1.3)$$

The  $\mathcal{F}$  are in general functions of the principal invariants  $I_x, II_x, III_x$  of  $x_s^r$ , or in a power development

$$\mathcal{F}_n = \sum_{p,q,r} k_{p,q,r}^{(n)} I^p II^q III^r. \quad (1.4)$$

Equation (1.3) can be further developed by means of the Cayley-Hamilton equation which can be written as

$$x^n = I_x x^{n-1} - II_x x^{n-2} + III_x x^{n-3} \quad (1.5)$$

or

$$x^3 = I_x x^2 - II_x x^1 + III_x x^0. \quad (1.5, 1)$$

Therefore

$$x^n = A_n x^2 + B_n x^1 + C_n x^0 \quad (1.6)$$

where the  $A_n, B_n, C_n$ , are also power-series in  $I_x, II_x, III_x$ . This makes (1.3)

$$y = \mathcal{F}_0 x^0 + \mathcal{F}_1 x^1 + \mathcal{F}_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n (A_n x^2 + B_n x^1 + C_n x^0) \quad (1.7)$$

or

$$y = (\mathcal{F}_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n C_n) x^0 + (\mathcal{F}_1 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n B_n) x^1 + (\mathcal{F}_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n A_n) x^2 \quad (1.8)$$

for which we can write with REINER [6], [7]<sup>3)</sup>

$$y_s^r = F_0 \delta_s^r + F_1 x_s^r + F_2 x_\alpha^r x_s^\alpha, \quad (1.9)$$

where the scalars  $F_0, F_1, F_2$  are in general power series in the principal invariants of  $x_s^r$ .

The equation (1.9) is valid in general, that is also outside the fields of elasticity and hydrodynamics for which it was originally derived; and it is thus shown that the most general relation of symmetric tensors of second rank is of second order in tensors and not higher. However, the  $F$  are power series of the components of  $x_s^r$  to any degree through the invariants and the relation (1.9) can be of *any degree in tensor-components*.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 392.



The problem now arises how to express in a general manner the  $F$  through the  $A_n, B_n, C_n$ , and the  $\mathcal{F}$ , in terms of the invariants I, II, III.

2. We start from (1.6) and the first step in our problem is to evaluate  $A_n, B_n, C_n$  in terms of I, II, III. To simplify notation, denote

$$x_1 = \text{I}; \quad x_2 = -\text{II}; \quad x_3 = \text{III}, \quad (2.1)$$

then (1.5) becomes

$$x^3 = x_1 x^2 + x_2 x^1 + x_3 x^0, \quad (2.2)$$

and the  $A_n, B_n, C_n$  are functions of  $x_1, x_2, x_3$ .

We derive first recurrence formulas for  $A_n, B_n, C_n$ . From (1.6) and (2.2)

$$\left. \begin{aligned} x^{n+1} &= A_n x^3 + B_n x^2 + C_n x = A_n (x_1 x^2 + x_2 x + x_3) + B_n x^2 + C_n x \\ &= (A_n x_1 + B_n) x^2 + (A_n x_2 + C_n) x + A_n x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

On the other hand

$$x^{n+1} = A_{n+1} x^2 + B_{n+1} x + C_{n+1}.$$

Comparing the coefficients we obtain ( $n \geq 3$ )

$$\left. \begin{aligned} A_{n+1} &= A_n x_1 + B_n, \\ B_{n+1} &= A_n x_2 + C_n, \\ C_{n+1} &= A_n x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

All the  $A_n, B_n, C_n$  can be computed from the recurrence formulas (2.4) and from the initial values

$$A_3 = x_1; \quad B_3 = x_2; \quad C_3 = x_3. \quad (2.5)$$

We get in fact

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= x_1^2 + x_2, \\ B_4 &= x_1 x_2 + x_3, \\ C_4 &= x_1 x_3, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} A_5 &= x_1^3 + 2 x_1 x_2 + x_3, \\ B_5 &= x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2, \\ C_5 &= x_1^2 x_3 + x_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

However, in order to obtain general expressions of  $A_n, B_n, C_n$ , we should first find recurrence formulas for  $A_n$  alone,  $B_n$  alone, and  $C_n$  alone. From (2.4) we have

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_{n-1} x_1 + B_{n-1} = A_{n-1} x_1 + A_{n-2} x_2 + C_{n-2} \\ &= A_{n-1} x_1 + A_{n-2} x_2 + A_{n-3} x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Thus the  $A_n$  satisfy the recurrence formula

$$A_n = A_{n-1} x_1 + A_{n-2} x_2 + A_{n-3} x_3, \quad (2.8)$$

when  $n \geq 6$ . The initial values for formula (2.8) are listed in (2.5) and (2.6). The coefficients  $B_n, C_n$  satisfy the formula

$$B_n = A_{n-1} x_2 + A_{n-2} x_3, \quad C_n = A_{n-1} x_3, \quad (2.9)$$

which follow from (2.4).

It is obvious that the general expression of  $A_n$  must be of the form

$$A_n = \sum \alpha_{a,b,c}^{(n)} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (2.10)$$

We notice first that if we assign to  $x_1, x_2, x_3$  the dimensions  $d, d^2$  and  $d^3$  respectively, all the terms in the summation must have the same dimension equal to  $d^{n-2}$ . Thus only those  $\alpha_{a,b,c}^{(n)}$  can be different from 0, for which

$$a + 2b + 3c = n - 2, \quad (2.11)$$

$a, b, c$ , being positive integers or zero. Therefore ( $n \geq 3$ )

$$A_n = \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c \quad (2.12)$$

where the index  $(n)$  in  $\alpha^{(n)}$  has been dropped.

To determine  $\alpha_{a,b,c}$  we substitute equation (2.12) into the formula (2.8). Then:

$$\begin{aligned} \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c &= \sum_{a+2b+3c=n-3} \alpha_{a,b,c} x_1^{a+1} x_2^b x_3^c \\ &+ \sum_{a+2b+3c=n-4} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^{b+1} x_3^c + \sum_{a+2b+3c=n-5} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^{c+1} \end{aligned}$$

or

$$\left. \begin{aligned} \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c &= \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a-1,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c \\ &+ \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b-1,c} x_1^a x_2^b x_3^c + \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c-1} x_1^a x_2^b x_3^c, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

where  $a+1, b+1, c+1$  were replaced by  $a, b, c$  respectively.

Comparison of coefficients gives ( $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ )

$$\alpha_{a,b,c} = \alpha_{a-1,b,c} + \alpha_{a,b-1,c} + \alpha_{a,b,c-1}. \quad (2.14)$$

We thus obtain a recurrence formula for  $\alpha_{a,b,c}$ . The initial values are [see equations (2.5), (2.6) and (2.12)]:

$$\alpha_{1,0,0} = 1; \quad \alpha_{0,1,0} = 1; \quad \alpha_{0,0,1} = 1. \quad (2.15)$$

Consider now  $\alpha_{a,0,0}$ : By (2.14) and (2.15)

$$\alpha_{a,0,0} = \alpha_{a-1,0} = \cdots = \alpha_{1,0,0} = 1.$$

By further similar considerations we get

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{a,1,0} &= \alpha_{a-1,1,0} + \alpha_{a,0,0} = \alpha_{a-2,1,0} + \alpha_{a-1,0,0} + 1 = \cdots = \alpha_{0,1,0} + a = a + 1, \\ \alpha_{a,2,0} &= \alpha_{0,2,0} + 2 + 3 + \cdots + a + (a + 1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + a - (a + 1) = \frac{(a+1)(a+2)}{2} = \frac{(a+2)!}{a! 2!}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

The obvious generalization is

$$\alpha_{a,b,0} = \frac{(a+b)!}{a! b!},$$

and since formulas (2.13), (2.14) are symmetric in respect of  $a, b, c$ , the suggested formula is

$$\alpha_{a,b,c} = \frac{(a+b+c)!}{a! b! c!}. \quad (2.17)$$

Formula (2.17) can be proved easily by induction. Assuming (2.17) to be valid for  $\alpha_{k,m,n}$ , when  $k < a$ ,  $m < b$  and  $n < c$ , we have from (2.14):

$$\begin{aligned} \alpha_{a,b,c} &= \frac{(a-1+b+c)!}{(a-1)! b! c!} + \frac{(a+b-1+c)!}{a! (b-1)! c!} + \frac{(a+b+c-1)!}{a! b! (c-1)!} \\ &= \frac{(a+b+c-1)!}{a! b! c!} (a+b+c) \end{aligned}$$

which proves equation (2.17) by induction. We have finally the result for  $r \geq 3$

$$A_n = \sum_{a+2b+3c=n-2} (-1)^b \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^a II^b III^c. \quad (2.18)$$

Equations (2.9) yield the additional results

$$B_n = \sum_{a+2b+3c=n-1} (-1)^b \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^a II^b III^c, \quad (2.19)$$

$$C_n = \sum_{a+2b+3c=n} (-1)^b \frac{c(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^a II^b III^c. \quad (2.20)$$

3. Having thus found expressions for the  $A_n, B_n, C_n$  in (1.8), as series in I, II, III, the next step is the determination of the constants  $k$  of (1.4). This can only be done by means of suitable experiments in which related *components* of  $y$  and  $x$  are measured, and the component  $y$  is expressed as a function of

the component of  $x$ . The simplest experiment will be one-dimensional in  $x$ . Let  $x(i)$ ,  $x(j)$ ,  $x(k)$  be the proper values of  $x_s^r$  with reference to the principal axes  $i, j, k$ . We can then put  $x(j) = x(k) = 0$  and

$$\text{I} = x(i), \quad \text{II} = \text{III} = 0. \quad (3.1)$$

In this case from (2.18), (2.19), (2.20) with  $b = c = 0$

$$A_n = x(i)^{n-2}; \quad B_n = C_n = 0, \quad (3.2)$$

while

$$\mathcal{F}_n = \sum_p k_{p,0,0}^{(n)} x(i)^p. \quad (3.3)$$

This would serve for the determination of the constants  $k_{p,0,0}^{(n)}$ .

Similarly one could use another experiment in which

$$x(j) = -x(i), \quad x(k) = 0 \quad (3.4)$$

and

$$\text{I} = 0, \quad \text{II} = -x(i)^2, \quad \text{III} = 0, \quad (3.5)$$

when  $a = c = 0$  and

$$A_n = (-1)^{n-2} x(i)^{n-2}, \quad B_n = (-1)^{n-1} x(i)^{n-1}, \quad C_n = 0 \quad (3.6)$$

for the determination of  $k_{0,q,0}^{(n)}$  in

$$\mathcal{F}_n = \sum_q k_{0,q,0}^{(n)} (-x(i))^{2q}. \quad (3.7)$$

We do not propose to follow this up here, but shall investigate the case when the  $\mathcal{F}_n$  are constants, say  $K_n$ , and therefore

$$F_0 = K_0 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n C_n, \quad F_1 = K_1 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n B_n, \quad F_2 = K_2 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n A_n. \quad (3.8)$$

Then in the first experiment

$$y(i) = \sum_{n=0} K_n x(i)^n, \quad y(j) = y(k) = K_0, \quad (3.9)$$

while in the second experiment

$$y(i) = K_0 + K_1 x(i) + K_2 x(i)^2, \quad y(j) = K_0 - K_1 x(i) + K_2 x(i)^2, \quad y(k) = K_0. \quad (3.10)$$

The representation of a physical quantity by a tensor will not always be unambiguous. There may be several or even many manners in which that quantity can be defined by means of a tensor. The question then arises how to express one tensor by another. Taking our example from elasticity, this is the

case with the measure of strain. Strain is represented by a symmetric tensor of second rank, but this permits many different measures. What is actually measured in experiments by means of so-called (mechanical or electrical) strain-gauges are not strains but changes of lengths. Two points on the body are marked at distance  $l_0$  before straining and  $l_1$  after straining and

$$\Delta l = l_1 - l_0 \quad (3.11)$$

is measured. Any function of the ratios  $\Delta l/l_0$ , or  $\Delta l/l_1$  can be considered as a measure of strain. In terms of simple, pure extensions, the following measures have been proposed, among others, by CAUCHY, GREEN-ST. VENANT, HENCKY, ALMANZI-HAMEL, SWAINGER<sup>4)</sup> in this order:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{C}{e}(i) &= \frac{l_1}{l_0} - 1 = \varepsilon, \\ \text{(ii)} \quad \frac{G}{e}(i) &= \frac{(l_1/l_0)^2 - 1}{2} = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \text{(iii)} \quad \frac{H}{e}(i) &= \ln \left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon) = -\ln \left(\frac{l_0}{l_1}\right) = -\ln(1 - e), \\ \text{(iv)} \quad \frac{A}{e}(i) &= \frac{1 - (l_0/l_1)^2}{2} = e \left(1 - \frac{e}{2}\right), \\ \text{(v)} \quad \frac{S}{e}(i) &= 1 - \frac{l_0}{l_1} = e. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

In order to appreciate the difference between the measures, note that if a bar is extended to twice its length these measures give

$$\frac{C}{e} = 1, \quad \frac{G}{e} = 1.5, \quad \frac{H}{e} = 0.66, \quad \frac{A}{e} = 0.375, \quad \frac{S}{e} = 0.5,$$

while when it is compressed to half, we have

$$\frac{C}{e} = 0.5, \quad \frac{G}{e} = 0.375, \quad \frac{H}{e} = 0.66, \quad \frac{A}{e} = 1.5, \quad \frac{S}{e} = 1.$$

In engineering, the Cauchy measure is used in the elastic and the Hencky measure in the plastic range. However, expressions in tensor form are known for  $\frac{C}{e}_r$  and  $\frac{A}{e}_s$  only. They were derived by MURNAGHAN [3], and are

$$2 \frac{C}{e}_r = g_{\alpha\beta} ({}_r x^\alpha) ({}_s x^\beta) - {}_r s g, \quad (3.13)$$

$$2 \frac{A}{e}_s = g_{rs} - \alpha_\beta g ({}^\alpha x, {}_r) ({}^\beta x, {}_s). \quad (3.14)$$

In these equations an index on the left refers to the initial state, an index on the right to the final state in the deformation. Expressions in tensor form of the

<sup>4)</sup> For references compare TRUESDELL [13], §§ 15, 16.

other measures are not known, except when products of the displacement gradient components are disregarded as in classical elasticity. REINER [8] has shown that this procedure is inadmissible even in 'infinitesimal' elasticity. As an example of the application of the method indicated above we shall show further down how the expression in tensor form of the Hencky measure can be derived.

Before doing so, a few words may be said why the possession of one or the other of these measures is desirable. When in elasticity the classical stress-strain relation is linear

$$\phi_s^r = \lambda I \delta_s^r + 2 \mu e_s^r \quad (3.15)$$

with constant moduli in any one measure, it will not be linear and/or imply variable moduli in any other measure. The advantage of a linear relation is obvious to any experimentalist. Moreover it is known that large elastic strains in certain materials are due to a hidden 'open' structure, and are then linear in the classical Cauchy-measure, on the model of the closed-coiled spring as used in a spring balance. Blown bitumen seems to be such a material, but there should be others. In this case it is desirable to possess a tensor-expression for  $\varepsilon$  of (3.12). Then there are problems in large plastic deformation. Here the only adequate measure is the Hencky measure, because this is the only measure in which the extensions form a group as can be seen from the relation

$$\ln \frac{l_3}{l_1} = \ln \left( \frac{l_3}{l_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) = \ln \frac{l_3}{l_2} + \ln \frac{l_2}{l_1}. \quad (3.16)$$

This property of forming a group is required in plasticity because in (ideal) plasticity (as in viscosity) the amount of finite deformation reached at any time is of no physical significance. As a matter of fact no definite meaning can be attached to such deformation because while in elasticity there exists an 'unstrained state' to which the length  $l_0$  is referred, no 'undeformed state' can be defined. In plasticity, as in viscosity, the increase in length  $dl$ , which takes place during the time-increment  $dt$ , can only be referred to the instantaneous length  $l$  so that the extension

$$e = \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_{n+1}}{l_n},$$

which is Hencky's measure. At the same time, only in the Hencky measure can the cubical dilatation be measured by the first invariant as can be seen from

$$e_v = \ln \frac{V}{V_0} = \ln \left( \frac{l_i}{l_{0i}} \cdot \frac{l_j}{l_{0j}} \cdot \frac{l_k}{l_{0k}} \right) = \ln \frac{l_i}{l_{0i}} + \ln \frac{l_j}{l_{0j}} + \ln \frac{l_k}{l_{0k}}, \quad (3.17)$$

so that the deviator is of physical significance; and plasticity relations must be expressed in terms of deviators.



4. Taking up the problem of the expression of measures of deformation, other than the Green and Almansi measures, in tensor form, we do not have to perform experiments. What has been described above as the 'first experiments' is given in equations (3.12). We have

(i)  $(i) \, \varepsilon = f(2(i) \overset{G}{e}) = -1 + \sqrt{1 + 2(i) \overset{G}{e}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \binom{n}{n} (2(i) \overset{G}{e})^n, \tag{4.1}$

(ii)  $e(i) = f(2 \overset{A}{e}(i)) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \binom{n}{n} (-2 \overset{A}{e}(i))^n, \tag{4.2}$

(iii)  $2(i) \overset{H}{e} = \ln(1 + (i) \, \varepsilon)^2 = \ln(1 + 2(i) \overset{G}{e}) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (2(i) \overset{G}{e})^n, \tag{4.3}$

(iv)  $2 \overset{H}{e}(i) = -\ln(1 - e(i))^2 = -\ln(1 - 2 \overset{A}{e}(i)) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} (2 \overset{A}{e}(i))^n \text{ 5).} \tag{4.4}$

These developments are valid for  $|2(i) \overset{G}{e}|$  or  $|2 \overset{A}{e}(i)| \leq 1$ . We now introduce for  $y(i)$  in turn  $(i) \, \varepsilon$ ,  $e(i)$ ,  $2(i) \overset{H}{e}$ ,  $2 \overset{H}{e}(i)$  and for  $x(i)$ :  $2(i) \overset{G}{e}$  and  $2 \overset{A}{e}(i)$ , while  $x(j) = x(k) = 0$ . Comparison with equation (3.9) now shows that  $K_0$  vanishes in every case. From  $n = 1$  upwards the expressions for  $K_n$  are

(i)  $K_n = \left(\frac{2}{n}\right)$ ; (ii)  $K_n = \left(\frac{1}{2}\right) (-1)^n$ ; (iii)  $K_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ; (iv)  $K_n = \frac{1}{n}$ . (4.5)

5. We shall now show in detail how the Hencky measure can be expressed through the Almansi measure. From equation (iv) of (4.5) we know that

$K_0 = 0, \quad K_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1). \tag{5.1}$

It then follows from (3.8) that

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n} (-1)^b \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I_x^a II_x^b III_x^c \\ &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c \\ &\quad (a+2b+3c \geq 3) \\ &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c; \end{aligned}$$

}

(5.2)

5) The equation  $2 \overset{H}{e}(i) = -\ln(1 - 2 \overset{A}{e}(i))$  was derived by HENCKY.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n-1} (-1)^b \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I_x^a II_x^b III_x^c \\
 &= 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c \\
 &\quad (a+2b+3c \geq 2) \\
 &= 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c;
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n-2} (-1)^b \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I_x^a II_x^b III_x^c \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c \\
 &\quad (a+2b+3c \geq 1) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c.
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

In order to perform the summations we introduce in place of  $I_x$ ,  $II_x$ ,  $III_x$ , the variables  $I$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , defined by

$$I_x = I; \quad II_x = -\alpha_2 I^2; \quad III_x = \alpha_3 I^3 \quad (5.5)$$

and we obtain:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)}{(a+2b+3c)a!b!c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c; \\
 F_1 &= 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1)a!b!c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c; \\
 F_2 &= \frac{1}{2} + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2)a!b!c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c.
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

The sums appearing in (5.6) can be evaluated with the help of the formula

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(n+K)!}{n!K!} x^K = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}. \quad (5.7)$$

We consider  $F_0$  first. Since the term with  $a=0$ ,  $b=0$ ,  $c=0$  vanishes, we have

$$F_0(I=0, \alpha_2, \alpha_3) = 0; \quad (5.8)$$

also, by differentiation with respect to  $I$ , we obtain from (5.6)

$$\left. \begin{aligned} I \frac{\partial F_0}{\partial I} &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c \\ &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^a (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

The right-hand side of equation (5.9) can be evaluated by successive applications of formula (5.7). Thus

$$\left. \begin{aligned} I \frac{\partial F_0}{\partial I} &= \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{c(b+c-1)!}{b!c!} (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(a+b+c-1)!}{a! (b+c-1)!} I^a \\ &= \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{c(b+c-1)!}{b!c!} (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c \frac{1}{(1-I)^{b+c}} \\ &= \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{c(b+c-1)!}{b!c!} \left( \frac{I^2 \alpha_2}{1-I} \right)^b \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I} \right)^c \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \frac{c(c-1)!}{c!} \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I} \right)^c \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(b+c-1)!}{b!(c-1)!} \left( \frac{I^2 \alpha_2}{1-I} \right)^b \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I} \right)^c \frac{1}{\left( 1 - \frac{I^2 \alpha_2}{1-I} \right)^c} = \sum_{c=1}^{\infty} \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2} \right)^c \\ &= \frac{1}{1 - \frac{I^3 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2}} - 1 = \frac{1-I-I^2 \alpha_2}{1-I-I^2 \alpha_2-I^3 \alpha_3} - 1 \\ &= \frac{I^3 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2-I^3 \alpha_3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

It follows that  $F_0$  satisfies the partial differential equation

$$\frac{\partial F_0}{\partial I} = \frac{I^2 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2-I^3 \alpha_3} \quad (5.11)$$

together with the boundary condition (5.8). Solution of equation (5.11) is straightforward and yields:

$$F_0 = \int_0^1 \frac{\alpha_3 \lambda^2 d\lambda}{1-\lambda-\lambda^2 \alpha_2 - \lambda^3 \alpha_3}; \quad (5.12)$$

changing the variable of integration to  $\sigma = \lambda/I$ , and substituting relations (5.5), we obtain finally:

$$F_0(I_x, II_x, III_x) = III_x \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{1-I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}, \quad (5.13)$$

where, obviously  $I_x, II_x, III_x$  do not depend on  $\sigma$ .

Next we consider  $F_1$ . It follows from (5.6) that

$$F_1(I = 0, \alpha_2, \alpha_3) = 1 \quad (5.14)$$

and that

$$\frac{\partial}{\partial I} (I F_1) = 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^a (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c. \quad (5.15)$$

The sum which appears in (5.15) can be evaluated in the same way as the sum in (5.10), and we get the differential equation

$$\frac{\partial}{\partial I} (I F_1) = \frac{1 - I}{1 - I - I^2 \alpha_2 - I^3 \alpha_3}. \quad (5.16)$$

Integrating equation (5.16) under condition (5.14), we obtain

$$I F_1 = \int_0^1 \frac{(1-\lambda) d\lambda}{1 - \lambda - \lambda^2 \alpha_2 - \lambda^3 \alpha_3}, \quad (5.17)$$

from which by the substitution  $\sigma = \lambda/I$ , it follows that

$$F_1(I_x, II_x, III_x) = \int_0^1 \frac{(1 - I_x \sigma) d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}. \quad (5.18)$$

$F_2$  can be evaluated similarly. Thus we have from (5.6)

$$F_2(I = 0, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2}, \quad (5.19)$$

and by differentiation we obtain

$$\frac{1}{I} \cdot \frac{\partial}{\partial I} (I^2 F_2) = 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^2 (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c. \quad (5.20)$$

Summation of the series gives then

$$\frac{\partial}{\partial I} (I^2 F_2) = \frac{I}{1 - I - I^2 \alpha_2 - I^3 \alpha_3}. \quad (5.21)$$

When the partial differential equation (5.21) is integrated under condition (5.19), we get

$$F_2 = \frac{1}{I^2} \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{1 - \lambda - \lambda^2 \alpha_2 - \lambda^3 \alpha_3}, \quad (5.22)$$

and proceeding as above, we finally obtain

$$F_2(I_x, II_x, III_x) = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}. \quad (5.23)$$

6. We have thus carried the solution of our problem to the following stage. From (1.9) and (5.13), (5.18), (5.23)

$$2 \mathcal{E}_s^H = \left\{ \begin{aligned} & \text{III} \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{1 - \text{I} \sigma + \text{II} \sigma^2 - \text{III} \sigma^3} \left[ \delta_s^r \right. \\ & + \left[ \int_0^1 \frac{(1 - \text{I} \sigma) d\sigma}{1 - \text{I} \sigma + \text{II} \sigma^2 - \text{III} \sigma^3} \right] 2 \mathcal{E}_s^A \\ & + \left[ \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 - \text{I} \sigma + \text{II} \sigma^2 - \text{III} \sigma^3} \right] 4 \mathcal{E}_\alpha^A \mathcal{E}_s^A \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

where  $\mathcal{E}_s^A$  is a function of the  $x_{i,s}$  and the  $g_{rs}$  and  $r_s g$  in accordance with (3.14) and

$$\text{I}_{2A} = 2 \delta_\beta^z \mathcal{E}_\alpha^A, \quad \text{II}_{2A} = 2 \delta_{\beta_1 \beta_2}^{z_1 z_2} \mathcal{E}_{\alpha_1}^A \mathcal{E}_{\alpha_2}^A, \quad \text{III}_{2A} = \frac{3}{4} \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{z_1 z_2 z_3} \mathcal{E}_{\alpha_1}^A \mathcal{E}_{\alpha_2}^A \mathcal{E}_{\alpha_3}^A. \quad (6.2)$$

By introducing  $\mathcal{E}_s^A$  from (3.14), we could derive an expression for  $\mathcal{E}_s^H$  in terms of the displacement gradient. However, no useful purpose would be served by this, the formula becoming extremely unwieldy. We shall rather leave the solution in this form, and give an example for its application which is of interest in itself.

We treat simple shear in Cartesian coordinates in accordance with

$$x_0 = x, \quad y_0 = y - Sz, \quad z_0 = z. \quad (6.3)$$

We have

$$r_{x,s} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -S \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (6.4)$$

and therefore

$$2 \mathcal{E}_{rs}^A = S \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -S \end{array} \right\| \quad (6.5)$$

with the invariants

$$\text{I}_{2A} = -S^2, \quad \text{II}_{2A} = -S^2, \quad \text{III}_{2A} = 0. \quad (6.6)$$

Furthermore

$$4 \overset{A}{e}_{r\alpha} \overset{A}{e}_{\alpha s} = S^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -S \\ 0 & -S & 1 + S^2 \end{vmatrix} \quad (6.7)$$

so that

$$2 \overset{H}{e}_{rs} = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S F_2 & F_1 - S^2 F_2 \\ 0 & F_1 - S^2 F_2 & S(F_2 - F_1) + S^3 F_2 \end{vmatrix}. \quad (6.8)$$

We have furthermore

$$F_0 = 0, \quad (6.9)$$

$$F_1 = \int_0^1 \frac{(1 + S^2 \sigma) d\sigma}{1 + S^2 \sigma - S^2 \sigma^2} = \frac{S^2 + 2}{S^2 C} \ln \left| \frac{C + 1}{C - 1} \right|, \quad (6.10)$$

$$F_2 = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 + S^2 \sigma - S^2 \sigma^2} = \frac{1}{S^2 C} \ln \left| \frac{C + 1}{C - 1} \right|, \quad (6.11)$$

where

$$C = \sqrt{1 + \frac{4}{S^2}}. \quad (6.12)$$

Therefore finally

$$\overset{H}{e}_{rs} = \frac{1}{CS} \ln \left| \frac{C + 1}{C - 1} \right| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{S}{2} \end{vmatrix} \quad (6.13)$$

with

$$\text{I}_H = 0, \quad \text{II}_H = -\frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{C + 1}{C - 1} \right| \right)^2, \quad \text{III}_H = 0. \quad (6.14)$$

It is, of course, possible to arrive at these special results in a much simpler manner by geometrical considerations as was done by REINER [7], following a suggestion by LOVE [2]. The method used here will reveal its power in more general cases as for instance in a problem of torsion. This will be shown at another place.

7. If we assume that the stress-strain relation for an elastic material is given by (3.15), and we use the Hencky measure, we thus find that simple shear is connected not only with shearing tractions but also with a tensile traction in the direction of the shear (in our case the  $y$ -direction), and a compressive



traction in the direction normal to it (in our case the  $z$ -direction). This is so even when the shear is infinitesimal. Because, let  $S$  be so small that it can be neglected against any number equal or larger than unity, then (where  $\epsilon$  indicates 'infinitesimal' strain)

$$\epsilon_{xx} = 0, \quad \epsilon_{yy} = \frac{S^2}{4}, \quad \epsilon_{zz} = -\frac{S^2}{4}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{S}{2}, \quad \epsilon_{zx} = 0, \quad \epsilon_{xy} = 0. \quad (7.1)$$

In this development it should be noted that  $S^2/4$  can be neglected against one in  $1 - (S^2/4)$ , but cannot be neglected when it is the *first term* in a series. In this manner second order effects appear also in infinitesimal elasticity, as has been shown by REINER [9], [10] theoretically, and realized long ago experimentally by POYNTING [4], [5], when he found that cylindrical wires extend in length when subjected to infinitesimal torsion. REINER [10] has treated POYNTING's observations using the Almansi measure  $e_s^A$  and an extension of (3.15), including a third term in accordance with (1.9). For problems of elasticity this may possibly be the best that can be done. But as has been said above in § 3, this is not an adequate treatment for either plasticity or viscosity. Here the only useful measure is the Hencky measure  $e_s^{H_r}$ . To show this in some detail for the case of viscosity, consider a cylindrical tube of length  $l$ , surrounding a straight streamline of a viscous liquid. Let one end of this tube be fixed<sup>6)</sup>, and the other end move with velocity  $v_l$ . Then  $v_l = d l/dt$ , and the longitudinal flow<sup>8)</sup>  $f_l = v_l/l$ . Introducing the first expression for  $v_l$  we find

$$f_l = \frac{(dl/dt)}{l} = \frac{(dl/l)}{dt} = \frac{d(\ln l)}{dt}.$$

This is the *physical* consideration underlying the Navier-Stokes equations, where by premature linearization of the rate of deformation to  $f_{rs} = (v_{r,s} + v_{s,r})/2$  second order effects are masked, and in the simple shear treated before  $f_{yy}$  and  $f_{zz}$  are absent. But let a viscous liquid be contained between two horizontal parallel circular platens, one stationary and the other rotating about a vertical axis ( $z$ ). The radial direction may be assumed as our  $x$ . The circular streamlines will have our  $y$  as tangent. Similar to (7.1), there will be a pressure in the  $z$ -direction. There should be no tractions in the direction  $x$ . However there will be tension in the direction  $y$ , and because of the curvature of the streamlines, this tension will have a 'strangulating' effect resulting in a radial force acting towards the centre. If we make a hole in the upper platen, and attach

<sup>6)</sup> Or consider all kinematic quantities relative to a coordinate system moving with this point.

<sup>7)</sup> Or provided the deformation is homogeneous,  $l$  is an element of length.

<sup>8)</sup> We use here 'flow' for what is usually designated as 'rate of deformation', an expression which may be misleading. MURNAGHAN [3] uses 'space derivative of the virtual displacement vector'.

to it a vertical tube, the liquid, because of the  $-\dot{p}_{zz}$  will be forced there upwards against the action of gravity, and that mass of liquid which moves in the tube upwards will be replaced by liquid moving radially towards the centre against the centrifugal forces. The whole mechanism will thus form a kind of 'centripetal pump'.

Actually such a centripetal pump effect is known under the name of Weissenberg-phenomenon [12], [13]. It has been variously explained as due to an elasticity of the liquid [1] or to 'cross-viscosity', a term referring to  $\eta_c$  in an extension of the linear classical stress-flow relation to include a second order term [6], [11]. It was thought that it could not be explained from viscosity alone. The foregoing considerations have shown that such explanation is possible, in which case the effect should be present also in inelastic liquids under suitable conditions, and in the absence of cross-viscosity. Actually, one of us (M. R.) has recently found that a centripetal-pump effect is present in air. The experiments will be reported upon at another place together with the theoretical treatment.

## REFERENCES

- [1] T. W. DEWITT, *Rheological Equation of State which Predicts non-Newtonian Viscosity, Normal Stresses and Dynamic Moduli*, J. appl. Phys. 20, 889-894 (1955).
- [2] A. E. H. LOVE, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge 1906-1927).
- [3] F. O. MURNAGHAN, *Finite Deformations of an Elastic Solid*, Amer. J. Math. 59, 235-260 (1937).
- [4] J. H. POYNTING, *On Pressure Perpendicular to the Shear Planes in Finite Pure Shears and on Lengthening of Loaded Wires when Twisted*, Proc. roy. Soc. [A] 82, 546 (1909).
- [5] J. H. POYNTING, *On the Changes in the Dimensions of a Steel Wire when Twisted*, Proc. roy. Soc. [A] 86, 534 (1912).
- [6] M. REINER, *A Mathematical Theory of Dilatancy*, Amer. J. Math. 67, 350-362 (1945).
- [7] M. REINER, *Elasticity Beyond the Elastic Limit*, Amer. J. Math. 70, 433-466 (1948).
- [8] M. REINER, *Second Order Effects in Elasticity and Hydrodynamics*, Bull. Res. Council. Israel 3, 372-379 (1954).
- [9] M. REINER, *Second Order Effects in Infinitesimal Elasticity*, Sci. Publ. Inst. Tech. Hebrew. tech. Coll. 6 (1955).
- [10] M. REINER, *The Complete Elasticity Law for Some Metals According to Poynting's Observations*, Appl. Scient. [A] 5, 281-295 (1955).
- [11] R. S. RIVLIN, *The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids*, Proc. roy. Soc. [A] 193, 260-281 (1948).
- [12] C. TRUESDELL, *A Program of Physical Research in Classical Mechanics*, ZAMP 3, 79-95 (1952).
- [13] C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. rat. Mech. Anal. 1, 125-300 (1952).

*Zusammenfassung*

Es wird gezeigt, dass eine isotrope Beziehung zwischen zwei symmetrischen Tensoren zweiten Ranges auf die Form

$$\gamma'_s = \left( \mathcal{F}_0 - \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n C_n \right) \delta'_s + \left( \mathcal{F}_1 - \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n B_n \right) x'_s + \left( \mathcal{F}_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n A_n \right) x'_\alpha x'_s$$

gebracht werden kann, wobei

$$\mathcal{F}_n = \sum_{p,q,r} k_{p,q,r}^{(n)} \mathbf{I}^p \mathbf{II}^q \mathbf{III}^r$$

sowie die  $A_n, B_n, C_n$  ähnliche Potenzreihen in den Hauptinvarianten von  $x'_s$  sind. Die Konstanten  $k$  müssen durch geeignete Versuche bestimmt werden, die über den Zusammenhang zwischen den physikalischen Grössen  $x'_s$  und  $\gamma'_s$  Auskunft geben. Die  $\mathcal{F}_n$  können aber auch Konstanten sein. Dies trifft beispielsweise zu, wenn  $x'_s$  und  $\gamma'_s$  verschiedene Masse der Deformation sind. In diesem Falle kann man zum Beispiel das logarithmische Hencky-Mass durch das Almansi-Mass ausdrücken. Tut man dies, dann ergeben sich aus einer quasi-linearen Spannungs-Fluss-Beziehung gewisse Effekte zweiter Ordnung in zähen Flüssigkeiten, auch dann, wenn das Medium unelastisch und die Zähigkeit gering ist. Damit liesse sich ein Zentripetalpump-Effekt in Luft, der neulich beobachtet worden ist, theoretisch erklären.

(Received: February 19, 1956.)

## Spannungsfeld einer auf den Rand einer Halbebene wirkenden Einzellast bei elastischer Anisotropie

VON HANS H. STADELMAIER, Raleigh, North Carolina, USA<sup>1)</sup>

### Einleitung

Die Elastizitätstheorie anisotroper Körper hat in jüngster Zeit neue Anregungen erfahren, besonders im Zusammenhang mit der Theorie der Versetzungen. Sieht man nämlich von trivialen Fällen ab (wie homogener Spannungszustand), so darf man Ergebnisse von der Theorie isotroper Körper nicht wahllos auf den anisotropen Fall übertragen, wenn man nicht auf oft wesentliche Feinheiten verzichten will. Leider steht einem ausgiebigen Gebrauch der Elastizitätstheorie anisotroper Körper die mathematische Umständlichkeit, aber auch ein gewisser Mangel an einfachen anschaulichen Beispielen entgegen.

<sup>1)</sup> Department of Engineering Research, North Carolina State College.

In der vorliegenden Arbeit soll daher ein Beispiel durchgerechnet werden, dessen Lösung von allgemeinem Interesse sein dürfte. Es wird dabei mit nicht zu starker Einschränkung der Allgemeinheit ein geschlossener Ausdruck gefunden zur Lösung eines Problems, dessen isotrope Lösung bereits bekannt ist. Auf der praktischen Seite ergibt sich dabei die Möglichkeit zur Erklärung der bereits vorliegenden experimentellen Beobachtung einer ungewöhnlichen Spannungsverteilung.

### Problemstellung

Aus den Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustands unter Hinzunahme der Kompatibilitätsbedingungen für die Dehnungen ergibt sich folgende Differentialgleichung für die Spannungsfunktion:

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2 \left( s'_{12} + \frac{1}{2} s'_{66} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + s'_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2 s'_{16} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} - 2 s'_{26} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da diese Gleichung bereits von VOIGT<sup>2)</sup> angegeben ist, soll auf ihre ausführliche Herleitung verzichtet werden. Aus  $\varphi$  erhält man die Spannungen in der bekannten Weise:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Die  $s'_{ik}$  sind Elastizitätskoeffizienten in der Bezeichnungsweise von VOIGT<sup>2)</sup>. Dabei deuten die Striche an, dass sie von der Orientierung zwischen dem gewählten Koordinatensystem  $(x, y, z)$  und den Kristallachsen abhängen.

Gleichung (1) ist, wenn man von der Beschränkung auf das zweidimensionale Spannungssystem absieht, allgemein gültig. In dem Fall, dass die  $z$ -Achse eine sechszählige Symmetrieachse ist, geht jegliche Anisotropie verloren, und die Differentialgleichung reduziert sich zu  $\nabla^4 \varphi = 0$ . Eine weniger drastische Einschränkung, bei der die Auswirkungen der Kristallanisotropie noch anschaulich hervortreten, ist die Forderung, dass die  $x$ -Achse oder die  $y$ -Achse (oder beide) eine geradzählige Symmetrieachse bildet. Die Vereinfachung für die Rechnung ergibt sich daraus, dass

$$s'_{16} = s'_{26} = 0.$$

Die Gleichung (1) geht dann über in

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + b \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \quad (2)$$

<sup>2)</sup> W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik* (Leipzig und Berlin 1910).

wobei

$$a = \frac{s_{12} + s'_{66}/2}{s'_{11}} \quad \text{und} \quad b = \frac{s_{22}}{s'_{11}}.$$

Die Randbedingungen lauten

$$\sigma_y(x \neq 0, y = 0) = 0, \quad \text{Einzellast } P \text{ in } (0, 0), \quad \sigma_x(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Folgende Spannungsfunktion, die in zwei Abschnitte zerfällt, erfüllt (2) und (3):  
Falls  $a^2 > b$ ,

$$\varphi = - \left. \begin{aligned} &\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{1}{1 - p/q} \left[ x \operatorname{arctg} \frac{p y}{x} + \frac{p y}{2} \ln(x^2 + p^2 y^2) - p y \ln p \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 - q/p} \left[ x \operatorname{arctg} \frac{q y}{x} + \frac{q y}{2} \ln(x^2 + q^2 y^2) - q y \ln q \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

mit

$$a = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad \text{und} \quad b = p^2 q^2$$

bzw.

$$p^2 = a - \sqrt{a^2 - b}, \quad q^2 = a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Ist dagegen  $a^2 < b$ , so gilt

$$\varphi = \frac{P}{2 \pi s} \left\{ \begin{aligned} &[(r^2 + s^2) y - s x] \operatorname{arctg} \frac{r y}{x - s y} \\ &- \frac{1}{2} r x \ln[r^2 y^2 + (x - s y)^2] - [(r^2 + s^2) y + s x] \operatorname{arctg} \frac{r y}{x + s y} \\ &+ \frac{1}{2} r x \ln[r^2 y^2 + (x + s y)^2] - 2 r s y \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

mit

$$a = r^2 - s^2 \quad \text{und} \quad b = (r^2 + s^2)^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{b}), \quad s^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{b}).$$

Es lässt sich zeigen, dass die Fälle (4a) und (4b) ineinander übergehen für  $a^2 = b$  (dann wird  $p^2 = q^2 = r^2 = a, s = 0$ ). Ist schliesslich  $a = 1$  (so dass auch  $b = 1$ ), so gehen beide Lösungen über in den Ausdruck

$$\varphi = - \frac{P}{\pi} x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (4c)$$

der als Lösung des isotropen Problems bekannt ist.

## Spannungen

Aus der Spannungsfunktion folgt durch Differentiation

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{y^3}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \\ \sigma_x &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{x^2 y}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{x y^2}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

wenn  $a^2 > b$  und

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{y^3}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2][r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \\ \sigma_x &= \frac{2P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{x^2 y}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2][r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \\ \tau_{xy} &= \frac{2P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{x y^2}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2][r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

für  $a^2 < b$ .

Diese Spannungen reduzieren sich bei  $p = q = r = 1$ ,  $s = 0$  (Isotropie) auf die bekannten Formen:

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_x = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5c)$$

Um zu einer übersichtlichen Darstellung der Formeln (5a) und (5b) zu gelangen, werden sie auf Polarkoordinaten transformiert, so dass

$$y = R \sin \vartheta, \quad x = R \cos \vartheta, \quad \theta = 90^\circ - \vartheta.$$

Dann folgt aus den Transformationseigenschaften der Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta + 2 \tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \vartheta + \sigma_y \cos^2 \vartheta - 2 \tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \tau_{R\theta} &= \tau_{xy} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Einsetzen der Spannungen aus (5a) bzw. (5b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{1}{\sin^3 \vartheta (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + p^2) (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + q^2)} \cdot \frac{1}{R}, \\ \sigma_\theta &= 0, \quad \tau_{R\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$



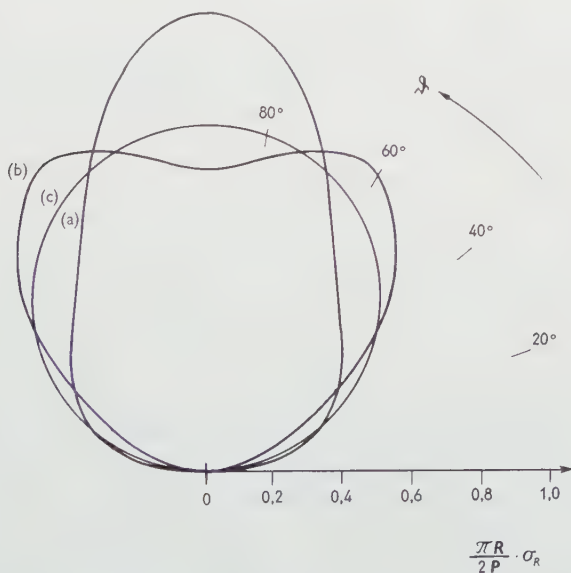
für  $a^2 > b$  und

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R = \frac{2P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{1}{\sin^3 \vartheta [r^2 + (s - \operatorname{ctg} \vartheta)^2] [r^2 + (s + \operatorname{ctg} \vartheta)^2]} \cdot \frac{1}{R}, \\ \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{R\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

für  $a^2 < b$ . Wird wiederum  $p = q = r = 1, s = 0$  gesetzt, so erhält man (mit  $\vartheta = 90^\circ - \theta$ )

$$\sigma_R = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{R}, \quad (6c)$$

das bekannte Ergebnis für den isotropen Fall. Man sieht, dass in allen Fällen die Spannung eine einfache Radialspannung ist. Daher wird in Figur 1 zur Veranschaulichung der Spannungsverteilung eine Darstellung von  $\sigma_R$  als Funktion von  $\vartheta$  bei konstantem  $R$  gewählt. Dabei ist die Art der Abweichung vom isotropen Fall klar ersichtlich. Auffallend sind im Fall (b) die zwei Maxima der Spannung, die in der Nähe von  $\operatorname{ctg} \vartheta = \pm s$  auftreten. Diese sind physikalisch zu erwarten, wie noch ausgeführt werden wird. Dazu muss aber zunächst noch gezeigt werden, wie die  $p, q, r, s$  aus den auf die Kristallachsen bezogenen Elastizitätskoeffizienten  $s_{ijk}$  zu gewinnen sind.



Figur 1

Polar diagramm der Spannungen nach Gleichungen (6). Die Kurven (a) und (b) entsprechen den Orientierungen (a) und (b) (siehe Text). Der Kurve (c) entspricht Isotropie.

## Berechnung der Koeffizienten

Die Koeffizienten  $p, q, r, s$  sind die in (4a) bzw. (4b) angegebenen Funktionen von  $a$  und  $b$ . Die letzteren hängen wiederum nach (2) ab von  $s'_{11}, s'_{12}, s'_{22}$  und  $s'_{66}$ . Diese gestrichenen elastischen Parameter hängen von sämtlichen festen Parametern  $s_{ik}$  sowie den Richtungskosinussen zwischen  $(x, y, z)$  und den kristallographischen Achsen  $(\xi, \eta, \zeta)$  ab. Die Schritte zur Gewinnung der  $s'_{ik}$  sind bei VOIGT ausführlich, wenn auch etwas umständlich, dargestellt. Obwohl die Berechnung im allgemeinen mühsam ist, lassen sich beispielsweise beim kubischen System durch geschickte Umformung der Ausdrücke in den Richtungskosinussen für den praktischen Gebrauch recht handliche Formen gewinnen<sup>3)</sup>. Das in Figur 1 angeführte Beispiel ist daher mit kubischen Koeffizienten berechnet. Sie sind nachstehend angegeben.

Das Schema der Richtungskosinusse ist

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$y$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$z$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$

ferner ist  $\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 = \Omega_\alpha$  usw.

Dann lauten die benötigten Elastizitätskoeffizienten:

$$s'_{11} = s_{11} - 2 \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) \Omega_\alpha,$$

$$s'_{22} = s_{11} - 2 \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) \Omega_\beta,$$

$$s'_{12} = s_{12} - \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) (\Omega_\gamma - \Omega_\alpha - \Omega_\beta),$$

$$s'_{66} = s_{44} - 4 \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) (\Omega_\gamma - \Omega_\alpha - \Omega_\beta).$$

Dabei sind  $s_{11}, s_{12}$  und  $s_{44}$  die auf die Kristallachsen bezogenen festen Parameter. Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  lassen sich nunmehr nach (2) leicht berechnen und daraus folgen nach (4) unmittelbar die  $p, q, r, s$ .

Für die Zahlenwerte der festen Elastizitätskoeffizienten unseres Beispiels wurden Angaben für  $\alpha$ -Eisen nach SCHMID und BOAS<sup>4)</sup> verwendet. Sie

<sup>3)</sup> Eine vollständige Liste der 21  $s'_{ik}$  sowie der 21  $c'_{ik}$  für das kubische System zusammen mit Tabellen zur Vereinfachung der Berechnung ist erhältlich als *Engineering School Bulletin No. 66* (North Carolina State College).

<sup>4)</sup> E. SCHMID und W. BOAS, *Kristallplastizität* (Berlin 1935).

lauten:

$$s_{11} = 7,57 \cdot 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}}, \quad s_{12} = -2,82 \cdot 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}},$$

$$s_{44} = 8,62 \cdot 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}}.$$

Die von MÖLLER und BRASSE<sup>5)</sup> neubestimmten Werte (8,53; - 3,24; 8,49) führen zu nur geringfügigen Unterschieden in den Ergebnissen.

In Figur 1 werden neben dem isotropen Fall (c) zwei Fälle unterschieden. Diese sind beschrieben durch Angabe der Millerschen Indizes derjenigen kristallographischen Richtungen, welche mit der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse zusammenfallen. Dabei sind die Orientierungen so gewählt, dass eine der Lösungen (4a), die andere der Lösung (4b) entspricht.

*Orientierung (a):*  $x - \langle 110 \rangle$ ,  $y - \langle 110 \rangle$ ,  $z - \langle 100 \rangle$ . Dafür ist  $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 1/4$ ,  $\Omega_\gamma = 0$ ,

$$a = 2,34; \quad b = 1 \quad (a^2 > b); \quad p = 0,47; \quad q = 2,12.$$

*Orientierung (b):*  $x - \langle 100 \rangle$ ,  $y - \langle 110 \rangle$ ,  $z - \langle 110 \rangle$ . Dafür ist  $\Omega_\alpha = 0$ ,  $\Omega_\beta = \Omega_\gamma = 1/4$ ,

$$a = 0,20; \quad b = 0,60 \quad (a^2 < b); \quad r = 0,70; \quad s = 0,54.$$

Die Orientierungen (a) und (b) erfüllen ausserdem die Forderung, dass  $x$  oder  $y$  eine geradzählige Symmetrieachse sei.

### Diskussion

Vergleicht man in Figur 1 das Verhalten der Fälle (a) und (b) mit dem des isotropen Falles (c), so fällt sofort auf, dass in den beiden anisotropen Fällen die Spannungen sich in gewissen Vorzugsrichtungen verstärken: im Fall (a) hauptsächlich in der  $y$ -Richtung, im Fall (b) in zwei Schrägrichtungen. Zum Verständnis dieses Verhaltens braucht man nur zu bedenken, dass die bevorzugten Richtungen elastisch harte Richtungen, also Richtungen maximalen  $E$ -Moduls, sind. Die elastisch harten Richtungen übernehmen also tatsächlich, wie man auch ohne Rechnung erwarten würde, den grösseren Anteil der Spannungen. Dieses Bild bedarf nur noch einer kleinen Korrektur, wie man am besten mit Fall (b) ausführt. Da der anisotrope Körper nicht allein in der härtesten  $\langle 111 \rangle$ -Richtung, sondern auch in allen anderen Richtungen endliche (wenn auch kleinere) Werte des  $E$ -Moduls hat, wird man vermuten, dass die maximale Spannung irgendwo zwischen der Richtung der Einzellast am Rand

<sup>5)</sup> H. MÖLLER und F. BRASSE, Arch. Eisenhüttenw. 26, 231 (1955).

und der Richtung grössten  $E$ -Moduls zu suchen ist. So findet man auch, dass die  $\langle 111 \rangle$ -Richtung in einem Winkel  $\vartheta = 55^\circ$  von der  $x$ -Achse auftritt, das Maximum der Spannung dagegen bei etwa  $62^\circ$ .

Das Ergebnis lässt sich am einfachsten so zusammenfassen, dass für dieses Problem die maximale Spannung auftritt,

1. im isotropen Fall — in Richtung der eingepprägten Randspannung,
2. bei Anisotropie — in einer von der Richtung maximalen  $E$ -Moduls stark mitbestimmten Richtung.

Das gilt selbstverständlich auch im Fall (a), wo  $x$ - und  $y$ -Richtung härteste Richtungen sind. Bei der  $x$ -Richtung macht sich das allerdings nur bemerkbar durch eine schwache Ausbuchtung der Kurve bei niedrigen Werten von  $\vartheta$ , da die Spannung nach wie vor in der  $x$ -Richtung selbst verschwinden muss.

### Vergleich mit der Erfahrung

Das einzige dem Verfasser bekannte experimentelle Ergebnis, das eindeutig auf das Bestehen einer solchen Lösung hinweist, ist ein Fall, bei dem sich die Einzellast am Rand offenbar periodisch wiederholt. Da die Berechnung der für eine solche Lösung benötigten Fourier-Koeffizienten wohl mit erheblichen Umständen verbunden ist, sei die Besprechung dieser Lösung auf die wichtigsten Grundzüge beschränkt. Es interessiert hier insbesondere der Fall (b). Ausgehend von den Einzellasten am Rand, wird man zunächst in einem ungestörten Bereich die schon besprochene Lösung finden. Wie sich die Spannungsfelder dann gegenseitig durchsetzen, kann man in grober Annäherung durch Betrachten der «Grundwelle» der Fourier-Entwicklung ermitteln, zu der man am einfachsten gelangt durch Aufsuchen einer in  $x$  periodischen Lösung der Differentialgleichung (2).

Mit dem Ansatz

$$\varphi = A e^{i k x + i k \lambda y}, \quad (7)$$

wobei sich ergibt, dass

$$\lambda_{1-4} = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a^2 - b} - a},$$

erhält man

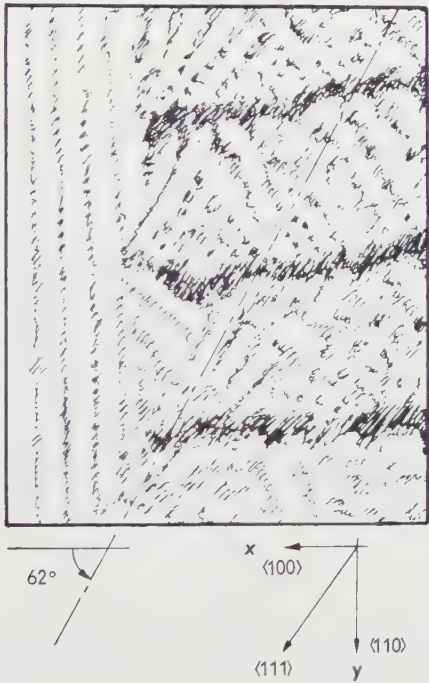
$$\varphi = e^{i k x} (B_1 e^{-p k y} + B_2 e^{-q k y} + B_3 e^{p k y} + B_4 e^{q k y}), \quad (7a)$$

solange  $a^2 > b$ . Dabei haben  $p$  und  $q$  die gleiche Bedeutung wie in (4a). Ist dagegen  $a^2 < b$ , so erhält man

$$\varphi = e^{i k x} [C_1 e^{-(r-i s) k y} + C_2 e^{-(r+i s) k y} + C_3 e^{(r-i s) k y} + C_4 e^{(r+i s) k y}].$$

Die  $r$  und  $s$  sind identisch mit denen von (4b). Die Konstanten  $B$  und  $C$

bestimmen sich aus den Randbedingungen<sup>6)</sup>. Es ist zu bemerken, dass Lösung (7b) nicht nur in  $x$ , sondern auch in  $y$  periodisch ist, da  $s$  reell ist. Es folgt daraus unmittelbar, dass selbst bei nur in  $x$  periodischer Randbedingung die Spannungen in  $x$  und  $y$  periodisch sind.



Figur 2  
Nichthomogene Spannungsverteilung nach DIJKSTRA und MARTIUS<sup>7)</sup>.

Betrachtet man die in Figur 2 skizzierte Spannungsverteilung, so fällt die Periodizität in  $y$  sofort auf. Zum besseren Verständnis von Figur 2 seien noch einige Einzelheiten über sein Entstehen angefügt. Es handelt sich um die Nachzeichnung einer mikroskopischen Aufnahme (Vergrößerung etwa 100fach) der Verteilung von kolloidalen  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  auf der elektrolytisch polierten Oberfläche einer unter Zug befindlichen Probe von  $\alpha$ -Eisen und ist einer Arbeit von DIJKSTRA und MARTIUS<sup>7)</sup> entnommen. Dabei ordnen sich die magnetischen Bezirke, deren Grenzen sich durch das Kolloid abzeichnen, in der Richtung

<sup>6)</sup> Es sei übrigens bemerkt, dass die Lösung (4) natürlich nicht «erraten» wurde, sondern durch Fourier-Synthese aus (7a) und (7b) ermittelt ist. Doch ist dieser Rechengang uninteressant per se und würde die Geschlossenheit der Darstellung nur stören.

<sup>7)</sup> L. J. DIJKSTRA und U. M. MARTIUS, Rev. Mod. Phys. 25, 146 (1953).



maximaler elastischer Spannung an. Die inhomogene und doppeltperiodische Spannungsverteilung löst allmählich eine homogene Spannungsverteilung ab, so dass die inhomogene auf Kosten der benachbarten homogenen (deren parallele Streifen links in Figur 2 zu sehen sind) wächst. Das lässt sich folgendermassen erklären: Sobald eine Korngrenze oder Mosaikgrenze bei der elastischen Verformung nicht mehr imstande ist, sich als Ganzes zu bewegen, sondern sich gegenüber der Umgebung verfestigt, setzt sich die elastische Verformung durch die sich periodisch wiederholenden weicheren «Lücken» der Grenze hindurch fort. Letztere haben natürlich die Periodizität der die Korn- oder Mosaikgrenze bildenden Versetzungen.

Vergleicht man die Winkel  $\vartheta$ , welche die sich deutlich abzeichnenden Richtungen maximaler Spannung mit der  $x$ -Achse bilden, so findet man fast genau  $62^\circ$  (wie im vorigen Abschnitt auch berechnet), während sie sich von  $55^\circ$  noch deutlich unterscheiden. Diese gute Übereinstimmung zwischen experimentellem Ergebnis und Theorie ergibt sich übrigens teilweise wegen des zu vernachlässigenden Einflusses der Glieder mit  $s'_{16}$  und  $s'_{26}$ , selbst wenn die Orientierung noch mehrere Winkelgrade von der hier angenommenen abweicht. Es sei noch vermerkt, dass durch Ausmessen der Periodenlänge in  $y$  der Abstand zwischen den Versetzungen in  $x$  ermittelt werden kann. Es ist nämlich, wie aus Gleichung (7b) hervorgeht, die Periodenlänge in  $y$ :  $2\pi/k$  s. Man sieht gleichfalls, dass die gesuchte Periodenlänge in  $x$ ,  $2\pi/k$ , sich nur um  $1/s$  davon unterscheidet. Nun gilt aber nach (6b) angenähert, dass

$$s = \operatorname{ctg} \vartheta_{max},$$

wobei  $\vartheta_{max}$  der Winkel maximaler Normalspannung ist. Damit findet man leicht die gesuchte Periodenlänge in  $x$ .

Diese Arbeit wurde gefördert von der National Science Foundation unter Kontrakt-Nr. G-1113.

Der Verfasser dankt seinem Kollegen, Herrn Prof. Dr. P. H. McDONALD, für manche anregende Diskussion.

### Summary

The solution of the two-dimensional stress problem in an anisotropic medium is given in closed form for the boundary conditions of a concentrated load at a point on the straight boundary of a semi-infinite plate. The properties of a periodic repetition of such concentrated loads are discussed and compared with an existing observation of a non-uniform stress distribution in  $\alpha$ -iron.

(Eingegangen: 24. Oktober 1955.)



# The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe

By SHIGEO UCHIDA, Tokyo, Japan<sup>1)</sup>

## Summary

An exact solution of pulsating laminar flow superposed on the steady motion in a circular pipe is presented under the assumption of parallel flow to the axis of pipe. Total mass of flow on time average is found to be identified with that given by HAGEN-POISEUILLE's law calculated on the steady component of pressure gradient. The phase lag of velocity variation from that of pressure gradient increases from zero in the steady motion to  $90^\circ$  in the pulsation of infinite frequency. Integration of work for changing kinetic energy of fluid through one period is vanished, while that of dissipation of energy by internal friction remains finite and excess amount caused by the components of periodic motion is added to the components of steady flow.

It is found that the given rate of mass flow is attained in pulsating motion by giving the same amount of average gradient of pressure as in steady flow, but that excess works to the steady case are necessary for maintenance of this motion.

## 1. Introduction

The purpose of the investigations on nonsteady motions of viscous fluid through pipes or channels was in early time to analyze mainly the propagation of sound waves and the stability problems on laminar motions, and many of them were treated by the principle of small perturbations. On the one hand, pulsating flows through small pipes have been carried out for long years in the circulation system of the blood, and recently theories of pulsating flow are applied to the super-charging system of reciprocating engines and the surging phenomena in power plants, and so forth. For the purpose of analyses of these problems, pressure gradients necessary for the transmission of given mass of fluid, energy dissipations caused by periodic motion and necessary works for maintaining pulsation flow will be significant and interesting factors. The present investigation aims mainly at the analysis of these characteristics in pulsating motions.

In an experiment on sound waves in resonators, RICHARDSON [1]<sup>2)</sup> measured velocity distributions across an orifice of circular section and he found the fact

<sup>1)</sup> Institute of Science and Technology, University of Tokyo.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 421.

that there is a portion of the maximum velocity not far distant from the wall. The theoretical verification of this phenomena was made by SEXL [2], and further confirmatory experiment was also made by RICHARDSON and TYLER [3] on the flow produced by the reciprocating motion of a piston. The object of their investigations was a pure periodic motion without mean transmission of mass of fluid.

The present author has found that the fundamental equation can be linearized by introducing the assumption of axially parallel flow which may be allowed for the expression of principal characteristics of pulsating flows as mentioned above and that periodic motions superposed on steady Poiseuille flow which causes mean transmission of fluid mass in one direction can be solved in an exact form. By the property of the linearity, elements of periodic part of solution are given in the identical form with that of SEXL's solution. SEXL [2] has calculated velocity distributions only, while in the present paper principal characters as a nonsteady pipe-flow, i. e. relation between mean mass-flow and necessary gradient of pressure and loss of energy by dissipation which must be overcome by the excess work from the exterior, etc., are reported.

## 2. Fundamental Equations

Nonsteady flow of incompressible fluid with axial symmetry through a rectilinear pipe of circular section is considered. It will be convenient to take the cylindrical coordinates whose  $x$  axis is identified with the center line of the pipe.

The equation of continuity is expressed by

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

where  $r$  is radius and  $u, v$  are velocity components in  $x$  and  $r$  directions respectively. In this equation component of twisting flow is first omitted.

Neglecting external forces two components of NAVIER-STOKES' equation in a symmetrical flow are referring to the cylindrical coordinates

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (3)$$

If the flow direction is assumed to be parallel to the  $x$  axis, velocity has  $x$  direction only and  $v$  is vanished. The equation of continuity gives

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

or

$$u = u(r, t)$$

which indicates the velocity to be constant in the direction parallel to the center line. This property may be acceptable for the fully developed laminar flow of liquids.

Substituting  $v = 0$  into (3)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

is reduced. It shows that the pressure is constant across the section of pipe and becomes only function of  $x$  and  $t$ .

With these relations equation of motion (2) is converted into

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (6)$$

### 3. Solution of Uniform Pulsating Flow

In the uniform pulsating flow, where  $\partial u / \partial x = 0$ , pressure gradient becomes only function of  $t$  with the aid of (4), (5) and (6) and will be able to express by Fourier series as follows

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{cn} \cos n t + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{sn} \sin n t \quad (7)$$

or, for the sake of simplicity in calculation, complex form

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n e^{i n t}, \quad \kappa_n = \kappa_{cn} - i \kappa_{sn} \quad (8)$$

is introduced, where  $\kappa_{cn}$  and  $\kappa_{sn}$  are constants representing the amplitudes of elemental vibrations.

As the corresponding solution following expression of Fourier series will be assumed

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{cn} \cos n t + \sum_{n=1}^{\infty} u_{sn} \sin n t \quad (9)$$

or in complex form

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{i n t}, \quad u_n = u_{cn} - i u_{sn} \quad (10)$$

is assumed, where coefficients  $u_{cn}$  and  $u_{sn}$  are functions of  $r$  only.

Substituting (8) and (10) into (6) and comparing the terms of same family, differential equations for the coefficients are

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{\nu} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_n}{dr} + \frac{-i n}{\nu} u_n + \frac{\kappa_n}{\nu} = 0. \quad (12)$$

Integrations are given by

$$u_0 = -\frac{\kappa_0}{\nu} \cdot \frac{r^2}{4} + A_0 \log_e r + B_0, \quad (13)$$

$$u_n = \frac{\kappa_n}{i n} + D_n J_0(k r i^{3/2}) + E_n K_0(k r i^{1/2}) \quad (14)$$

where  $k = \sqrt{n/\nu}$  and  $J_0$  and  $K_0$  are first and second solutions of Bessel function of zero order respectively. The solution is given by the real part of the following expression

$$\left. \begin{aligned} u = & -\frac{\kappa_0}{\nu} \cdot \frac{r^2}{4} + A_0 \log_e r + B_0 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\kappa_n}{i n} + D_n J_0(k r i^{3/2}) + E_n K_0(k r i^{1/2}) \right] e^{i \beta t}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

At the axis of the pipe  $r = 0$  but  $|\log_e r|$  and  $K_0(k r i^{1/2})$  is infinite, and since  $u$  is finite  $A_0 = E_n = 0$ .

Boundary condition given at the wall is

$$u = 0 \quad \text{at} \quad r = a \quad (16)$$

where  $a$  is the radius of pipe.

Unknown coefficient in (15) is determined by (16), and the last form of solution is given by

$$u = \frac{\kappa_0}{4 \nu} (a^2 - r^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \kappa_n}{n} \left[ 1 - \frac{J_0(k r i^{3/2})}{J_0(k a i^{3/2})} \right] e^{i n t}. \quad (17)$$

Total mean mass-flow  $G$ , which is transmitted in the  $x$  direction, is given by

$$G = \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} dt \int_0^a 2 \pi u r dr = \frac{\pi a^4 \kappa_0}{8 \nu} \quad (18)$$

or

$$G = \frac{\pi a^4}{8 \mu} \left( -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \quad (18')$$

where  $(-\partial \bar{p} / \partial x) = \rho \kappa_0$  represents time mean of pressure gradient. It is found that the total mean mass-flow in pulsating motion is identified with the steady Poiseuille flow subjecting the same amount of pressure gradient as the mean pressure gradient in the pulsating flow.

The total mean velocity  $U$  defined by  $U = G/(\pi a^2)$  is

$$U = \frac{a^2 \kappa_0}{8 \nu} = \frac{a^2}{8 \mu} \left( -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right). \quad (19)$$

Taking  $U$  as the standard of velocity, non-dimensional expression of velocity is obtained from (17) as follows.

$$\frac{u}{U} = \frac{u_s}{U} + \frac{u'}{U}, \quad \frac{u_s}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{u'}{U} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8B}{(ka)^2} \cos nt + \frac{8(1-A)}{(ka)^2} \sin nt \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8B}{(ka)^2} \sin nt - \frac{8(1-A)}{(ka)^2} \sin nt \right\} \end{aligned}$$

where

$$A = \frac{\text{ber } ka \text{ ber } r - \text{bei } ka \text{ bei } r}{\text{ber}^2 ka + \text{bei}^2 ka}, \quad B = \frac{\text{bei } ka \text{ ber } r - \text{ber } ka \text{ bei } r}{\text{ber}^2 ka + \text{bei}^2 ka}. \quad (21)$$

Corresponding pressure gradients is given with the aid of (8) and (19).

$$-\frac{2a}{\varrho U^2/2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{64}{Re} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \sin nt \right] \quad (22)$$

where  $Re$  is the mean Reynolds' number of pipe defined by

$$Re = \frac{2aU}{\nu}. \quad (23)$$

$\kappa_{cn}/\kappa_0$  and  $\kappa_{sn}/\kappa_0$  are ratios of amplitude of periodic variation of pressure gradients to that of average one.

If any variation of pressure gradient is given by the form dissolved into Fourier series, the corresponding velocities can be calculated by (20).

#### 4. Velocity Distribution and Its Asymptotic Expressions

Periodical part of velocity distribution is characterized by the parameter  $\sqrt{n/\nu} a$ . Forms of solution in extreme cases are easily obtained by the asymptotic expansions of Bessel function.

Slow vibration:  $\sqrt{n/\nu} a \ll 1$ .

When high viscous liquid pulsate slowly in a narrow pipe, parameter  $\sqrt{n/\nu} a$  becomes sufficiently small that approximately  $\text{ber } ka \rightarrow 1$ ,  $\text{bei } ka \rightarrow 0$ . (20) is transformed into

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} = & 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \sin nt \right] \\ = & 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{1}{\kappa_0} \left[ -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

<sup>3)</sup> Editor's Note: ber and bei signify Kelvin Functions; cf. e.g. *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, p. 6 (McGraw-Hill, New York 1953).

$$\text{or} \quad u = \frac{1}{4\nu} (a^2 - r^2) \left[ -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (24')$$

The velocity distribution is given by a parabola as in the case of steady Poiseuille flow, while the magnitude of velocity varies periodically in the same phase with that of pressure gradient.

Rapid vibration:  $\sqrt{n/\nu} a \rightarrow \infty$ .

When low viscous liquid pulsate rapidly in a large pipe, parameter  $\sqrt{n/\nu} a$  becomes very high so that  $\sqrt{n/\nu} a > 10$ , then asymptotic expansion

$$\begin{aligned} \text{ber } k a &= \frac{e^{k a/2}}{\sqrt{2 \pi k a}} \left\{ \cos \left( \frac{k a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + O \left( \frac{1}{k a} \right) \right\}, \\ \text{bei } k a &= \frac{e^{k a/2}}{\sqrt{2 \pi k a}} \left\{ \sin \left( \frac{k a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + O \left( \frac{1}{k a} \right) \right\} \end{aligned}$$

can be used.

Motion near the center of pipe will be given by putting  $k a \rightarrow \infty$ ,  $k r \rightarrow 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \sin n t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \cos n t \\ &= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \cos \left( n t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \sin \left( n t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

or

$$u = \frac{\kappa_0}{4\nu} (a^2 - r^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{n} \cos \left( n t - \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{n} \sin \left( n t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (25')$$

In the rapid pulsation, fluid flows at the center of pipe with the phase lag of  $90^\circ$  from the wave of pressure gradient and its amplitude diminishes with increasing frequency.

Motion near the wall will be given by putting  $k r \rightarrow k a \rightarrow \infty$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \\ &\quad \times \left[ \sin n t - \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-k(a-r)/\sqrt{2}} \sin \left\{ n t - \frac{k}{\sqrt{2}} (a-r) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \\ &\quad \times \left[ -\cos n t + \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-k(a-r)/\sqrt{2}} \cos \left\{ n t - \frac{k}{\sqrt{2}} (a-r) \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



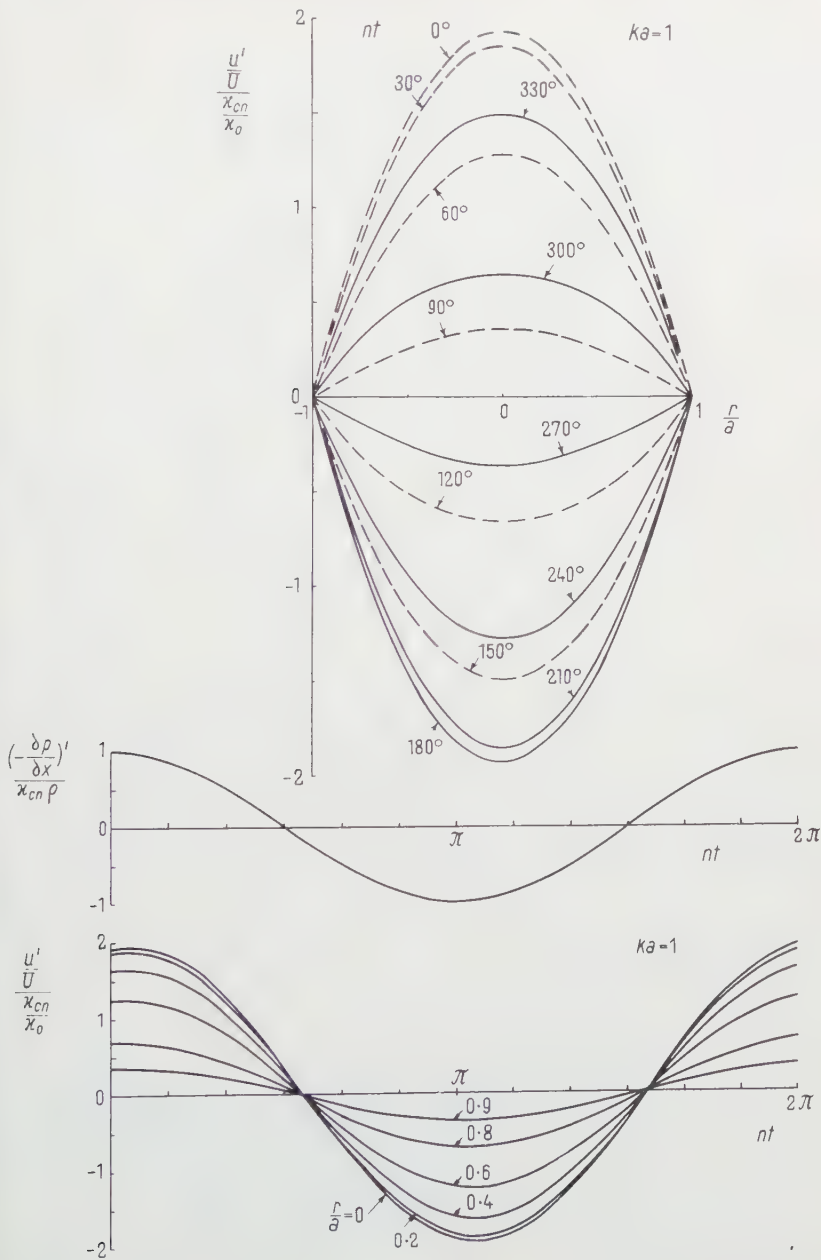


Figure 1  
Velocity profile for  $ka = 1$ .

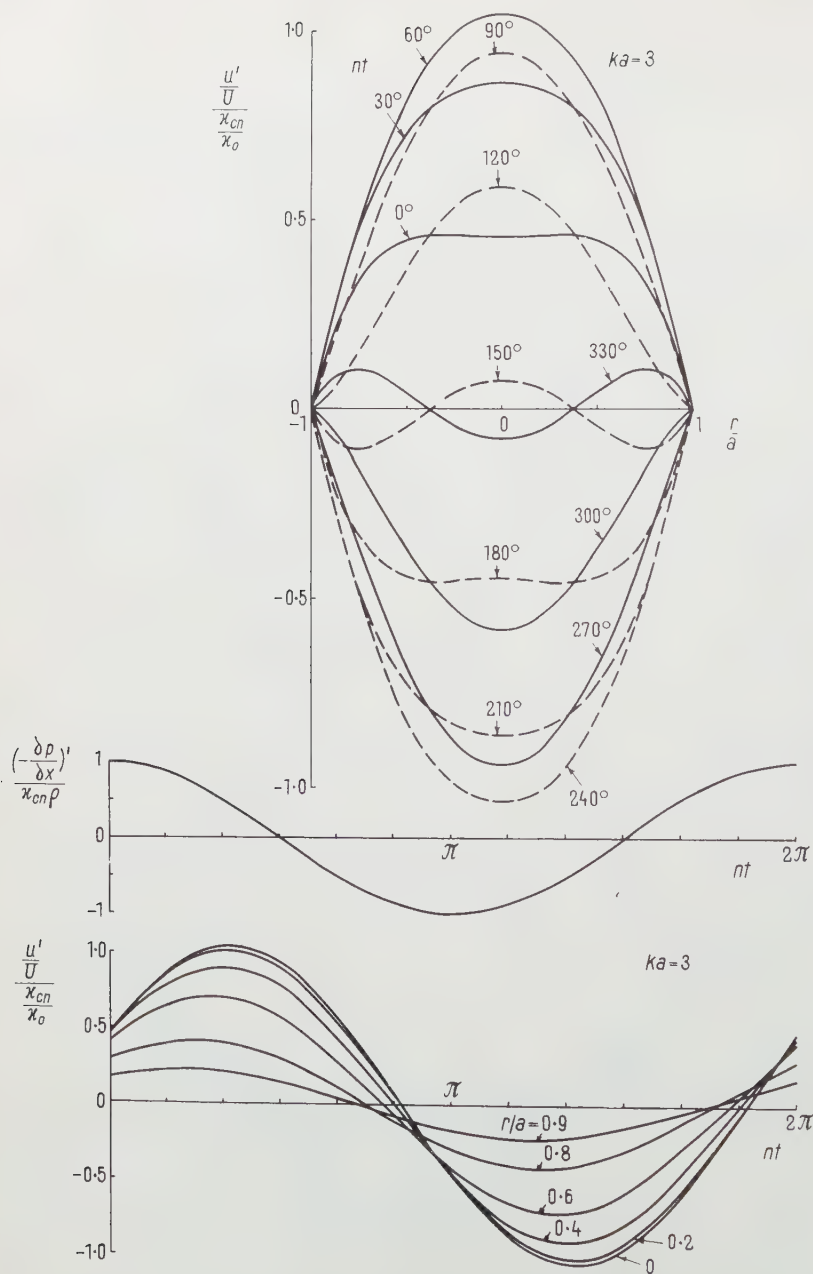


Figure 2  
Velocity profile for  $ka = 3$ .

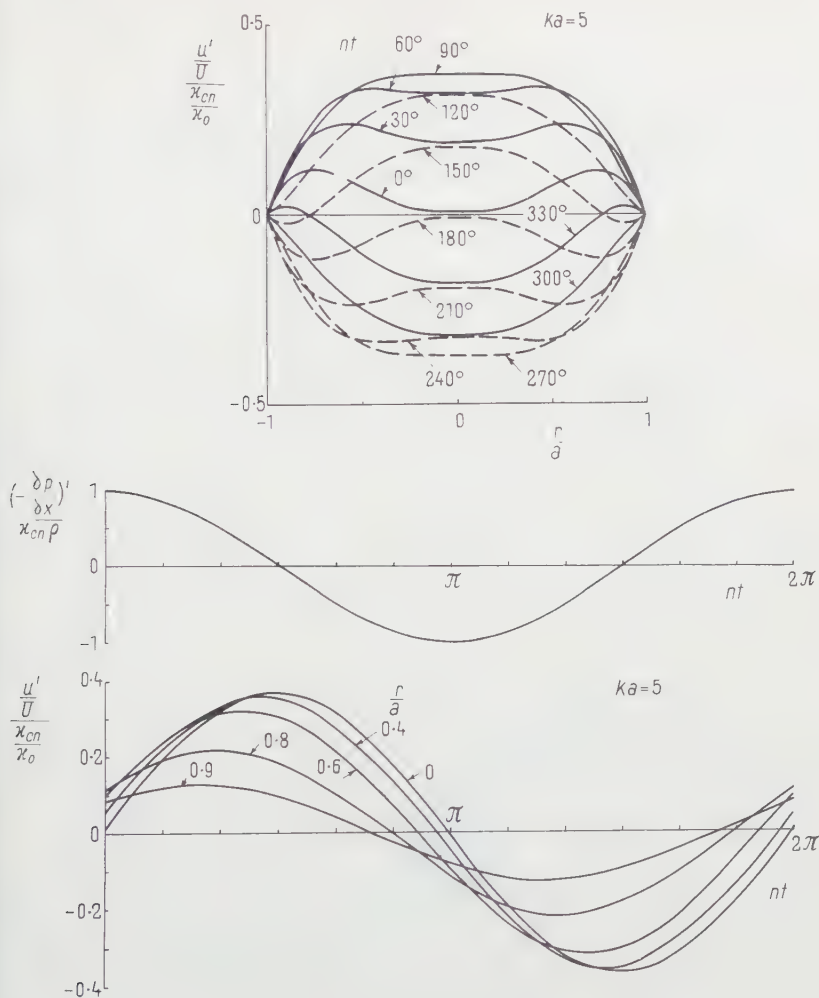


Figure 3  
Velocity profile for  $ka = 5$ .

It will be found that maximums of velocity distribution exist in the neighbourhood of wall in the rapid vibration.

Several examples for the simple periodic pulsation given by

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \kappa_0 + \kappa_{cn} \cos nt = \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)', \\ \text{where} \quad \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \kappa_0, \quad \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)' = \kappa_{cn} \cos nt \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

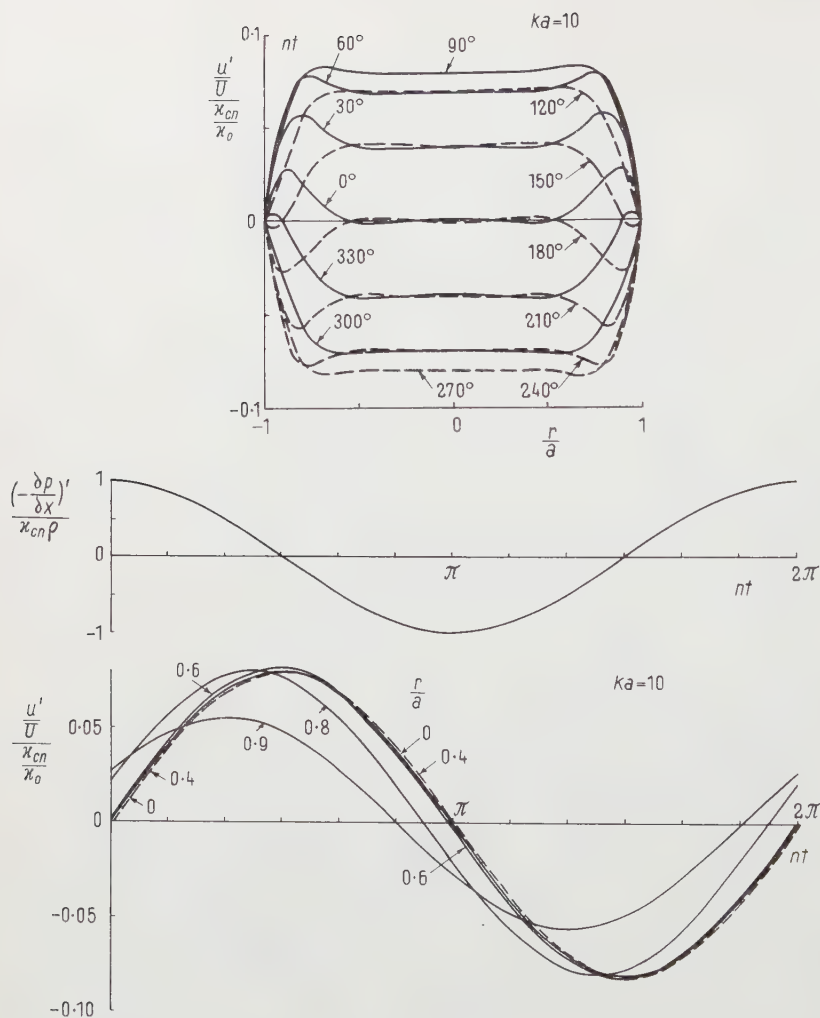


Figure 4  
Velocity profile for  $ka = 10$ .

are shown in Figure 1 through Figure 4, in which

$$\frac{u}{U} = \frac{u_s}{U} + \frac{u'}{U} \quad (28)$$

where

$$\frac{u_s}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad \frac{u'}{U} = \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8B}{(ka)^2} \cos nt + \frac{8(1-A)}{(ka)^2} \sin nt \right\}.$$

### 5. Sectional Mean Velocity

Instantaneous mass of flow and accordingly sectional mean velocity are also changed periodically, and to study the relation with pressure gradient will be significant for the practical use. Sectional mean velocity denoted by  $u_m$  is given by

$$u_m = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi u r dr$$

or

$$\frac{u_m}{U} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \left\{ \frac{2D}{ka} \cos nt + \left(1 - \frac{2C}{ka}\right) \sin nt \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \left\{ \frac{2D}{ka} \sin nt - \left(1 - \frac{2C}{ka}\right) \cos nt \right\} \quad (29)$$

where using the notation

$$\text{ber}'ka = \frac{d(\text{ber}ka)}{d(ka)}, \quad \text{bei}'ka = \frac{d(\text{bei}ka)}{d(ka)}$$

and

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\text{ber}ka \text{bei}'ka - \text{bei}ka \text{ber}'ka}{\text{ber}^2ka + \text{bei}^2ka}, \\ D &= \frac{\text{ber}ka \text{ber}'ka + \text{bei}ka \text{bei}'ka}{\text{ber}^2ka + \text{bei}^2ka}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Table 1  
Coefficients for Calculating Mean Velocity

$ka$	$\frac{8}{(ka)^2} \left\{ 1 - \frac{2C}{ka} \right\}$	$\frac{8}{(ka)^2} \cdot \frac{2D}{ka}$	$ka$	$\frac{8}{(ka)^2} \left\{ 1 - \frac{2C}{ka} \right\}$	$\frac{8}{(ka)^2} \cdot \frac{2D}{ka}$
0	0	1.0000	2.4	0.4856	0.5220
0.2	0.0067	1.0000	2.8	0.4661	0.3779
0.4	0.0266	0.9992	3.2	0.4208	0.2710
0.6	0.0598	0.9962	3.6	0.3696	0.1966
0.8	0.1000	0.9888	4.0	0.3215	0.1460
1.0	0.1680	0.9744	5.0	0.2291	0.0773
1.2	0.2250	0.9444	6.0	0.1696	0.0460
1.4	0.2935	0.9013	7.0	0.1302	0.0296
1.6	0.3563	0.8434	8.0	0.1029	0.0201
1.8	0.4113	0.7713	9.0	0.0832	0.0143
2.0	0.4516	0.6900	10.0	0.0707	0.0105

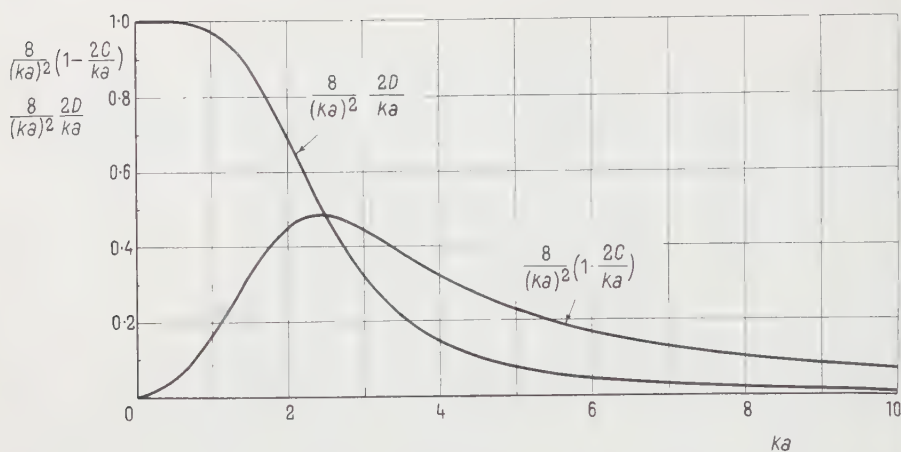


Figure 5  
Coefficients for calculating mean velocity.

The values of coefficients

$$\frac{8}{(ka)^2} \left\{ 1 - \frac{2C}{ka} \right\} \quad \text{and} \quad \frac{8}{(ka)^2} \cdot \frac{2D}{ka}$$

are shown in Table 1 and Figure 5.

In a simple periodic pulsation produced by (27), (29) is reduced to

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_m}{U} &= 1 + \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \left\{ \frac{2D}{ka} \cos nt + \left( 1 - \frac{2C}{ka} \right) \sin nt \right\} \\ &= 1 + \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{2C}{ka} \right)^2 + \left( \frac{2D}{ka} \right)^2} \cos(n t - \delta_u) \\ &= 1 + \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \sigma_u \cos(n t - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

where

$$\sigma_u = \frac{8}{(ka)^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{2C}{ka} \right)^2 + \left( \frac{2D}{ka} \right)^2} \quad (32)$$

is the coefficient of amplitude and

$$\delta_u = \tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \frac{2C}{ka}}{\frac{2D}{ka}} \right\} \quad (33)$$

represents the phase lag to the wave of pressure gradient. Several examples are shown in Figures 6 and 7.



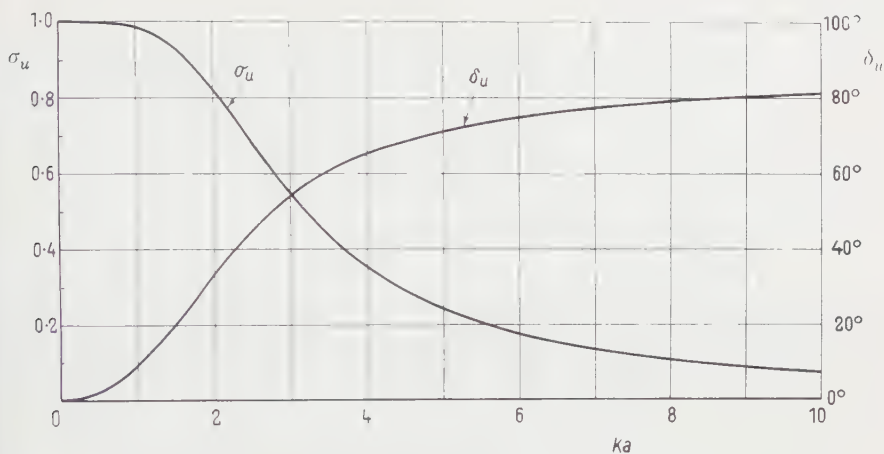


Figure 6  
Coefficients of amplitude and phase lag of mean velocity.

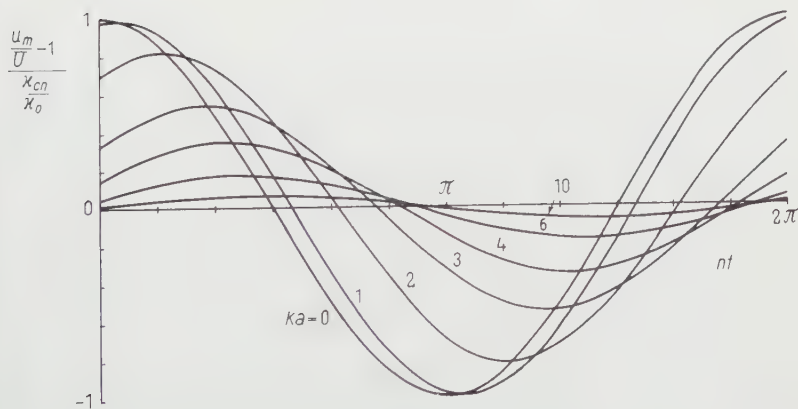


Figure 7  
Sectional mean velocity (periodic components).

6. Surface Friction and Balance of Force

Instantaneous frictional force acting on the wall is given by

$$\tau = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}$$

or

$$\frac{\tau}{\rho U^2/2} = \frac{16}{Re} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{2C}{ka} \cos nt + \frac{2D}{ka} \sin nt \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{2C}{ka} \sin nt - \frac{2D}{ka} \cos nt \right\} \right] \quad (34)$$

where  $C$  and  $D$  are given by (30).

In a simple periodic pulsation produced by (27)

$$\frac{\tau}{\rho U^2/2} = \frac{16}{Re} \left[ 1 + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{2C}{ka} \cos nt + \frac{2D}{ka} \sin nt \right\} \right] \quad (35)$$

$$= \frac{16}{Re} \left[ 1 + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \sigma_{\tau} \cos(n t - \delta_{\tau}) \right]$$

where

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\left( \frac{2C}{ka} \right)^2 + \left( \frac{2D}{ka} \right)^2} \quad (36)$$

represents the coefficient of amplitude of shearing stress at the wall and

$$\delta_{\tau} = \tan^{-1} \frac{D}{C} \quad (37)$$

the phase lag from the wave of pressure gradient (Figure 8).

It will be interesting that the phase of sectional mean velocity is much delayed from the pulsating wave of pressure gradient while that of shearing stress is less delayed from it.

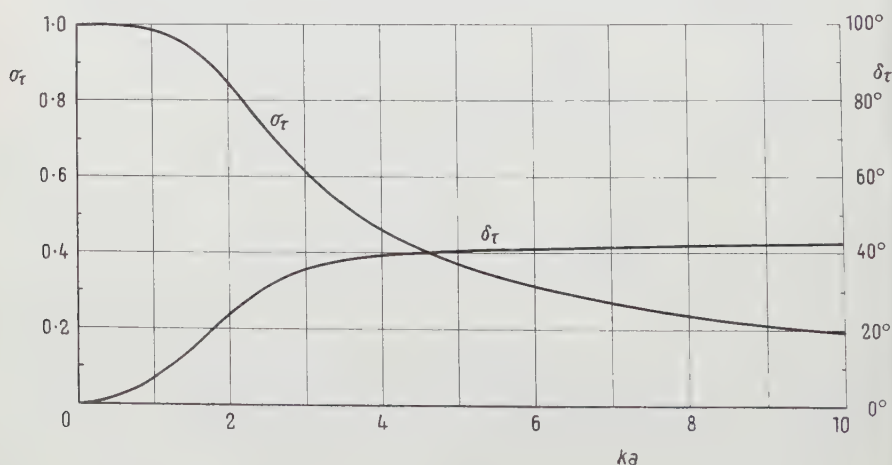


Figure 8  
Coefficients of amplitude and phase lag of shearing stress.

If (6) is integrated over the section of pipe by multiplying  $2\pi \rho r dr$  and integrating from  $r = 0$  to  $r = a$ , the relation of balance of force and acceleration of mass enclosed in the circular cylinder of unit length is obtained as follows:

$$-\pi a^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \pi a^2 \rho \frac{du_m}{dt} + 2\pi a \tau$$

or

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-\partial p / \partial x}{(\rho U^2/2)/2a} = \frac{du_m/dt}{U^2/2a} + \frac{2\tau}{\rho U^2/2} \quad (38)$$

The present solution can easily check this relation, in which mean frictional force involved in  $\tau$  is just balanced by the term of mean pressure gradient and there are no steady acceleration in this case. An example indicating the balance of force in periodic component is shown in Figure 9.

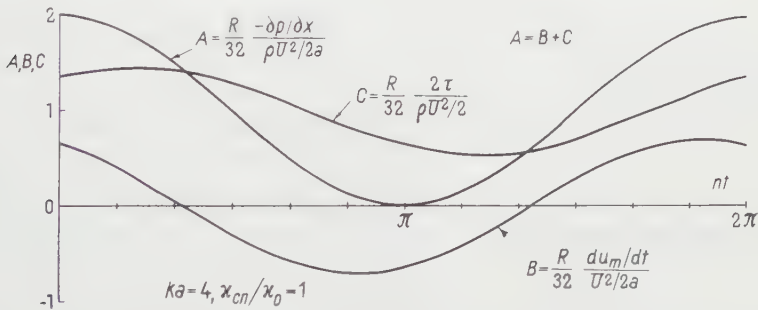


Figure 9

Balance of periodic force component ( $A$  pressure gradient;  $B$  acceleration;  $C$  shearing force).

## 7. Total Work and Dissipation of Energy

Considering the fluid in the volume  $V$  within the closed surface  $S$ , forces acting on this mass of fluid are the external force, the normal pressure on the boundary and the viscous stress. The rate at which these do work on the element is denoted by  $W_e$ . It is generally proved that this rate of work done from the exterior equals to the sum of the rate of increase of the kinetic energy and the rate of dissipation of energy due to internal friction. For example, by MILNE-THOMSON [4] it is expressed as follows.

$$W_e = \frac{dT}{dt} + W_i \quad (39)$$

where  $T$  is the kinetic energy and  $W_i$  is the rate of dissipation of energy in the

volume  $V$ . The latter is given by

$$W_i = \mu \int_{(V)} \xi^2 dV + 2 \mu \int_{(S)} \left\{ \mathbf{n} (\mathbf{q} \wedge \xi) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial q^2}{\partial n} \right\} dS \quad (40)$$

where  $\mathbf{q}$  and  $\xi$  represent the velocity and the vorticity vector respectively and  $\mathbf{n}$  is the unit inward normal to  $dS$ . When the fluid is enclosed within fixed boundaries at which  $\mathbf{q} = 0$  as in this case the rate of dissipation is given by

$$W_i = \mu \int_{(V)} \xi^2 dV. \quad (41)$$

In the cylindrical coordinates  $x, r$  and  $\varphi$ , corresponding components of velocity to whom are  $u, v$  and  $w$  respectively,

$$\xi = \frac{1}{r} \left[ \left\{ \frac{\partial(rw)}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{i}_x + \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rw)}{\partial x} \right\} \mathbf{i}_r + r \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \mathbf{i}_\varphi \right].$$

If the circular cylinder of radius  $a$  with unit length is chosen as the volume  $V$ ,  $W_i$  in the present case is given by

$$W_i = 2 \pi \mu \int_0^a \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr. \quad (42)$$

Equation (39) can be easily reduced in this case by multiplying  $2 \pi \rho u r dr$  to the equation of motion (6) and integrating from  $r = 0$  to  $r = a$ , giving

$$\pi a^2 u_m \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2 \pi \int_0^a \frac{\partial(\rho u^2/2)}{\partial t} r dr + 2 \pi \mu \int_0^a \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr \quad (43)$$

where the work done from the exterior is

$$W_e = \pi a^2 u_m \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (44)$$

and the rate of increase of kinetic energy is

$$W_k = 2 \pi \int_0^a \frac{\partial(\rho u^2/2)}{\partial t} r dr. \quad (45)$$

The last term of (43) represents the rate of energy dissipation as shown by (42).

It will be much interesting to compare the total mean work necessary for transmission of fluid by pulsating flow with the necessary work in steady flow. The total mean work or change of energy concerning (42), (44) and (45) are defined by

$$\overline{W}_{e,k,i} = \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} W_{e,k,i} dt. \quad (46)$$

Substituting the previous solution into (46) with the aid of (42), (44) and (45), the total mean work from the exterior, the total mean change of kinetic energy and the total mean dissipation of energy are respectively

$$\bar{W}_e = 8 \pi \mu U^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \right)^2 + \left( \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \right)^2 \right\} \frac{8D}{(ka)^3} \right], \quad (47)$$

$$W_k = 0, \quad (48)$$

$$\bar{W}_i = 8 \pi \mu U^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \right)^2 + \left( \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \right)^2 \right\} \frac{8D}{(ka)^3} \right] \quad (49)$$

where

$$D = \frac{\text{ber } ka \text{ ber}' ka + \text{bei } ka \text{ bei}' ka}{\text{ber}^2 ka + \text{bei}^2 ka}. \quad (30)$$

Formula (48) shows that the kinetic energy changes instantaneously with the relation of 'give and take' among other forms of energy but as a total it causes no loss of energy. Energy loss is caused by the dissipation as shown in (49) and it will be interesting that the amount of energy dissipation is increased by the existence of components of periodic motion. In this respect, there will be no advantages to send mass of fluid by pulsating motions.

The relation given from (47) and (49),

$$W_e = W_i \quad (50)$$

shows that pressure gradient does works equal to the loss of energy after full cycle of motions.

When the pulsation is extremely slow and  $ka$  tends to zero, the coefficient of excess work is

$$\frac{8D}{(ka)^3} = \frac{1}{2}. \quad (51)$$

The value  $1/2$  will not be strange, because in this case phases of pressure gradient and mean sectional velocity  $u_m$  tend to identify.

In the extremity of rapid pulsation where  $ka \rightarrow \infty$

$$\frac{8D}{(ka)^3} = 0. \quad (52)$$

In the pulsating motion with very high frequency under finite amplitude, however, compressibility of fluid will not be negligible and the present theory might not be valid.

The value of coefficient of excess work for periodic motion is given in Table 2 and Figure 10.

Table 2  
Coefficient of Excess Work for Maintaining Periodic Motion

$k a$	$\frac{8 D}{(k a)^3}$	$k a$	$\frac{8 D}{(k a)^3}$	$k a$	$\frac{8 D}{(k a)^3}$	$k a$	$\frac{8 D}{(k a)^3}$
0	0.5000	1.2	0.4722	2.4	0.2610	6.0	0.0230
0.2	0.5000	1.4	0.4507	2.8	0.1890	7.0	0.0148
0.4	0.4996	1.6	0.4217	3.2	0.1355	8.0	0.0101
0.6	0.4981	1.8	0.3857	3.6	0.0983	9.0	0.0071
0.8	0.4944	2.0	0.3450	4.0	0.0730	10.0	0.0053
1.0	0.4872			5.0	0.0386		

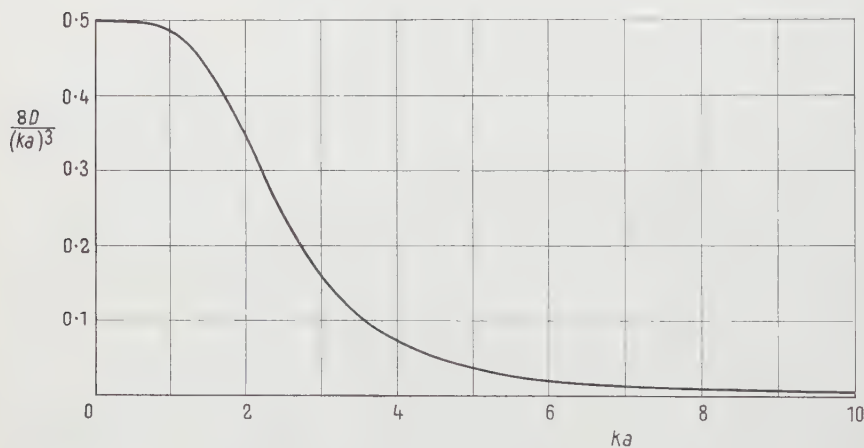


Figure 10  
Coefficient of excess work for maintaining periodic motion.

## 8. Distribution of the Dissipation of Energy

The local distribution of dissipation of energy is given by

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{W}_i &= \mu \zeta^2 - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\
 &= \frac{\mu U^2}{a^2} \left[ -4 \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8 B'}{k a} \cos n t \quad \frac{8 A'}{k a} \sin n t \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8 B'}{k a} \sin n t + \frac{8 A'}{k a} \cos n t \right\} \right]^2 \quad (53)
 \end{aligned} \right\}$$



where

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\text{ber } k a \text{ ber}' k r + \text{bei } k a \text{ bei}' k r}{\text{ber}^2 k a + \text{bei}^2 k a}, \\ B' &= \frac{\text{bei } k a \text{ ber}' k r - \text{ber } k a \text{ bei}' k r}{\text{ber}^2 k a + \text{bei}^2 k a}. \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

In a simple periodic pulsation produced by the condition

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \kappa_{cn} \cos n t \tag{27}$$

the distribution of energy dissipation is simplified as follows

$$\mathfrak{W}_i = \frac{\mu U^2}{a^2} \left[ -4 \frac{r}{a} + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8 B'}{k a} \cos n t - \frac{8 A'}{k a} \sin n t \right\} \right]^2. \tag{55}$$

As shown in some examples given by Figures 11 and 12, dissipations are fluctuated periodically around the component of steady flow given by

$$\mathfrak{W}_{is} = \frac{\mu U^2}{a^2} 16 \left( \frac{r}{a} \right)^2. \tag{56}$$

When the amplitude ratio of pulsating pressure gradient to steady one,  $\kappa_{cn}/\kappa_0$ , is not large, the maximum value of dissipation is occurred at the wall of pipe. With the increase of amplitude ratio  $\kappa_{cn}/\kappa_0$ , the situation of maximum dissipation moves into flowing liquid and its distance from the wall is varied periodically with the time as shown in Figure 12. These phenomena will be interesting, if connections can be made with the mechanism of generation of turbulence.

REFERENCES

[1] E. G. RICHARDSON, Proc. phys. Soc. Lond. 40, 206 (1928).  
[2] T. SEXL, Z. Phys. 61, 349 (1930).  
[3] E. G. RICHARDSON, and E. TYLER, Proc. phys. Soc. Lond. 42, 1 (1929-30).  
[4] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, London 1938), p. 513.

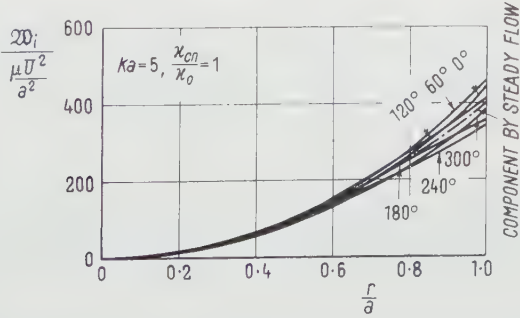


Figure 11  
Distribution of energy dissipation (small amplitude of periodic component).

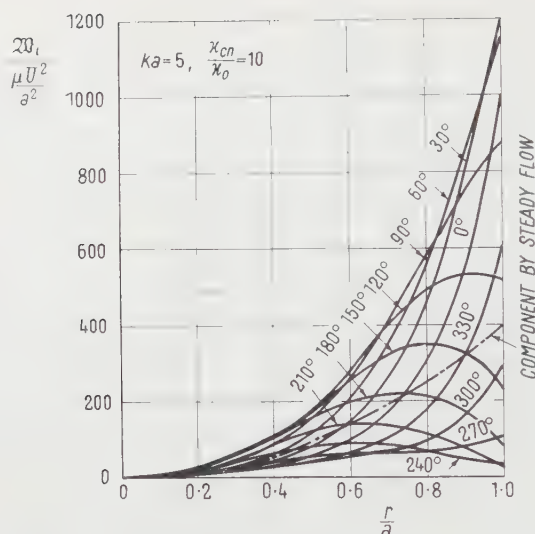


Figure 12

Distribution of energy dissipation (large amplitude of periodic component).

### Zusammenfassung

Eine exakte Lösung der pulsierenden laminaren Strömung in einem Kreisrohr wird angegeben mit der Annahme, dass die Richtung dem Geschwindigkeitsvektor der Rohrachse parallel ist. Die Durchflussmenge stimmt überein mit der aus der stationären Druckgefällekomponente gerechneten Menge. Für die Erhaltung der Bewegung dagegen ist die der Dissipation entsprechende Extraarbeit notwendig. Die Quantität dieser Arbeit hängt ab von den Frequenzen der Stromschwingungen.

(Received: December 14, 1955.)

## Geschichteter Kreiszylinder im Felde periodischer Temperaturschwankungen

Von VÁCLAV VODIČKA, Pilsen, CSR<sup>1)</sup>

Die rechnerische Behandlung der Wärmewellen in homogenen isotropen Körpern ist ein technisch wichtiges, wenn auch mathematisch nicht zu schwieriges Problem<sup>2)</sup>. Viel komplizierter ist die Rechnung für einen mehrschichtigen

<sup>1)</sup> Technische Hochschule.

<sup>2)</sup> VODIČKA, V., Schweiz. Arch. angew. Wiss. Tech: 6, 177 (1948); Appl. Sci. Res. [A] 5, 268 (1955); Appl. Sci. Res. [A] 5, 327 (1955).

Körper, wie weiter an dem Fall eines unendlich langen hohlen Kreiszyinders gezeigt werden wird.

1. Problemstellung. Ein beiderseitig unendlich langer Zylinderkörper besteht aus  $n$  homogenen und isotropen coaxialen Schichten, deren  $k$ -te die physikalischen Konstanten  $\lambda_k, c_k, \gamma_k$  hat und von den Flächen  $\varrho = \varrho_k, \varrho = \varrho_{k+1}$  begrenzt ist. Die beiden Körperoberflächen  $\varrho = \varrho_1, \varrho = \varrho_{n+1}$  sind den Temperaturschwankungen  $b e^{i\omega t}, B e^{i\Omega t}$  ausgesetzt ( $b, B, \omega, \Omega$  sind positive Festwerte), und man fragt nach dem Verlauf des Temperaturfeldes  $u_k = u_k(\varrho, t)$  in einzelnen Schichten, wenn überall mit Wärmeübergang gerechnet werden wird.

Mit üblicher Bezeichnungsweise drückt sich unser Problem wie folgt aus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} &= a_k^2 \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \varrho} \right), \quad a_k^2 = \frac{\lambda_k}{c_k \gamma_k} \\ (\varrho_k < \varrho < \varrho_{k+1}, \quad t > 0; \quad k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} - h(u_1 - b e^{i\omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_1, \quad t > 0), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \varrho} - h_k(u_k - u_{k-1}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_{k-1}, \quad t > 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varrho} + h'_k(u_k - u_{k+1}) &= 0, \quad h'_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} h_k \\ (\varrho = \varrho_{k+1}, \quad t > 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \varrho} + H(u_n - B e^{i\Omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_{n+1}, \quad t > 0). \quad (4)$$

Die  $h, h_k, H$  sind gegebene positive Konstanten.

2. Reduktion auf zwei Teilprobleme. Unsere Aufgabe lässt sich bekannterweise dadurch in zwei einfachere Teilprobleme zerspalten, dass man

$$u_k = v_k + w_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

setzt. Sowie alle  $v_k(\varrho, t)$  als auch alle  $w_k(\varrho, t)$  genügen dabei dem Gleichungssystem (1) und den Forderungen (3.1), (3.2), während die anderen Bedingungen sich folgendermassen gestalten:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho} - h(v_1 - b e^{i\omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_1); \quad \frac{\partial v_n}{\partial \varrho} + H v_n = 0 \quad (\varrho = \varrho_{n+1}; \quad t > 0), \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \varrho} - h w_1 = 0 \quad (\varrho = \varrho_1); \quad \frac{\partial w_n}{\partial \varrho} + H(w_n - B e^{i\Omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_{n+1}; \quad t > 0). \quad (7)$$

3. Integrale von (1) mit Rücksicht auf (3.1), (3.2). Die Lösung von (1) wird mit noch freien Parametern  $\mu_k$  und mit den Integrationskonstanten

$B_k, C_k$  in der Form

$$f_k(\varrho, t) = [B_k I_0(\varrho \sqrt{\mu_k}) + C_k K_0(\varrho \sqrt{\mu_k})] e^{\alpha_k^2 \mu_k t} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

angesetzt;  $I_0, K_0$  sind modifizierte Zylinderfunktionen.

Geht man mit (8) in (3.1) und (3.2) ein, so folgt erstens

$$\mu_k = A_k^2 \mu, \quad A_k = \frac{a_1}{a_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.1)$$

und zweitens das in  $B_k, C_k$  lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} I_0(\alpha_k \zeta_k) B_{k+1} + K_0(\alpha_k \zeta_k) C_{k+1} \\ = \left[ I_0(\zeta_k) + \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} I_1(\zeta_k) \right] B_k + \left[ K_0(\zeta_k) - \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} K_1(\zeta_k) \right] C_k, \\ \left[ I_0(\alpha_k \zeta_k) - \frac{\alpha_k \zeta_k}{h'_k \varrho_{k+1}} I_1(\alpha_k \zeta_k) \right] B_{k+1} \\ + \left[ K_0(\alpha_k \zeta_k) + \frac{a_k \zeta_k}{h'_k \varrho_{k+1}} K_1(\alpha_k \zeta_k) \right] C_{k+1} = I_0(\zeta_k) B_k + K_0(\zeta_k) C_k, \\ \alpha_k = \frac{A_{k+1}}{A_k}, \quad \zeta_k = \zeta_k(\mu) = A_k \varrho_{k+1} \sqrt{\mu} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

womit wir uns jetzt eingehender befassen wollen;  $I_1, K_1$  sind Macdonaldsche Funktionen mit dem Index 1.

Schreibt man (9.2) in Form der Matrizengleichungen

$$\left. \begin{aligned} \left\| \begin{matrix} B_{k+1} \\ C_{k+1} \end{matrix} \right\| &= \alpha_k \zeta_k M_k(\mu) \left\| \begin{matrix} B_k \\ C_k \end{matrix} \right\|, \quad M_k(\mu) = \| m_k^{(rs)}(\mu) \| \\ (r, s &= 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n-1) \\ m_k^{(11)}(\mu) &= \frac{h'_k}{\alpha_k h_k} I_1(\zeta_k) K_0(\alpha_k \zeta_k) + K_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ I_0(\zeta_k) + \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} I_1(\zeta_k) \right], \\ m_k^{(12)}(\mu) &= -\frac{h'_k}{\alpha_k h_k} K_1(\zeta_k) K_0(\alpha_k \zeta_k) + K_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ K_0(\zeta_k) - \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} K_1(\zeta_k) \right], \\ m_k^{(21)}(\mu) &= -\frac{h'_k}{\alpha_k h_k} I_1(\zeta_k) I_0(\alpha_k \zeta_k) + I_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ I_0(\zeta_k) + \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} I_1(\zeta_k) \right], \\ m_k^{(22)}(\mu) &= \frac{h'_k}{\alpha_k h_k} K_1(\zeta_k) I_0(\alpha_k \zeta_k) + I_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ K_0(\zeta_k) - \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} K_1(\zeta_k) \right], \end{aligned} \right\}$$

so erhält man daraus sofort

$$\left. \begin{aligned} \left\| \begin{matrix} B_{k+1} \\ C_{k+1} \end{matrix} \right\| &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k P_k(\mu) \left\| \begin{matrix} B_1 \\ C_1 \end{matrix} \right\| \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ L_k &= \frac{\varrho_2 \varrho_3 \cdots \varrho_{k+1}}{a_2 a_3 \cdots a_{k+1}}, \quad P_k(\mu) = M_k(\mu) M_{k-1}(\mu) \cdots M_2(\mu) M_1(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

oder auch

$$\left. \begin{aligned} B_{k+1} &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k [\dot{p}_k^{(11)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(12)}(\mu) C_1], \\ C_{k+1} &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k [\dot{p}_k^{(21)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(22)}(\mu) C_1] \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (10.2)$$

worin allgemein

$$P_k(\mu) = \|\dot{p}_k^{(rs)}(\mu)\| \quad (r, s = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10.3)$$

gesetzt worden ist.

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse (8) bis (10.3) führt zur Lösung

$$\left. \begin{aligned} f_1(q, t) &= [B_1 I_0(q \sqrt{\mu}) + C_1 K_0(q \sqrt{\mu})] e^{a_1^2 \mu t}, \\ f_{k+1}(q, t) &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k \{ [\dot{p}_k^{(11)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(12)}(\mu) C_1] I_0(A_{k+1} q \sqrt{\mu}) \\ &+ [\dot{p}_k^{(21)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(22)}(\mu) C_1] K_0(A_{k+1} q \sqrt{\mu}) \} e^{a_1^2 \mu t} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

von (1), wobei für jeden Wert des Parameters  $\mu$  und der Integrationskonstanten  $B_1, C_1$  die Bedingungen (3.1) und (3.2) mitbefriedigt sind.

4. Lösung des ersten Teilproblems. Die Lösungsfunktionen  $v_k(q, t)$  werden mit noch zu bestimmenden Grössen  $\mu, B_1, C_1$  in der Form (11) angesetzt. Geht man damit in die letzten noch zu befriedigenden Gleichungen (6) ein, so folgt einerseits

$$\mu = \frac{i \omega}{a_1^2} \quad (12)$$

und andererseits ergibt sich mit diesem Werte von  $\mu$  und mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= q_{11}(\mu) = h I_0(\zeta_0) - \frac{\zeta_0}{q_1} I_1(\zeta_0), \\ q_{12} &= q_{12}(\mu) = h K_0(\zeta_0) + \frac{\zeta_0}{q_1} K_1(\zeta_0), \\ q_{21} &= q_{21}(\mu) = [H I_0(\zeta_n) + \frac{\zeta_n}{q_{n+1}} I_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(11)}(\mu) \\ &\quad + [H K_0(\zeta_n) - \frac{\zeta_n}{q_{n+1}} K_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(21)}(\mu), \\ q_{22} &= q_{22}(\mu) = [H I_0(\zeta_n) + \frac{\zeta_n}{q_{n+1}} I_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(12)}(\mu) \\ &\quad + [H K_0(\zeta_n) - \frac{\zeta_n}{q_{n+1}} K_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(22)}(\mu), \\ \zeta_0 &= \zeta_0(\mu) = q_1 \sqrt{\mu}, \quad \zeta_n = \zeta_n(\mu) = A_n q_{n+1} \sqrt{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

das Gleichungssystem

$$q_{11} B_1 + q_{12} C_1 = h b, \quad q_{21} B_1 + q_{22} C_1 = 0.$$

Einsetzung der daraus berechneten Werte von  $B_1, C_1$  in (11) führt dann mit der Bezeichnung

$$\Delta = q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} \quad (14)$$

zur folgenden Lösung des ersten Teilproblems:

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varrho, t) &= \frac{h b}{\Delta} [q_{22}(\mu) I_0(\varrho \sqrt{\mu}) - q_{21}(\mu) K_0(\varrho \sqrt{\mu})] e^{i \omega t}, \\ v_{k+1}(\varrho, t) &= \frac{h b}{\Delta} (i \omega)^{k/2} L_k \left\{ [q_{22}(\mu) p_k^{(11)}(\mu) - q_{21}(\mu) p_k^{(12)}(\mu)] I_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\mu}) \right. \\ &\quad \left. + [q_{22}(\mu) p_k^{(21)}(\mu) - q_{21}(\mu) p_k^{(22)}(\mu)] K_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\mu}) \right\} e^{i \omega t} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Schliesslich soll noch der zur effektiven Aufstellung der ausserordentlich komplizierten Lösungsformeln (15) nötige Weg zusammenfassend skizziert werden. Zuerst berechnen wir aus (3.2), (12), (9.1), (9.2) und (10.1) der Reihe nach die Grössen  $h'_k, \mu, A_k, \alpha_k$  und  $L_k$ , worauf sich mit Hilfe von (9.2) und (13) auch die Werte von  $\xi_0, \xi_k$  und  $\xi_n$  ergeben. Der eigentliche Kern und zugleich auch die schwierigste Phase unseres Problems liegt jedoch in der Aufsuchung der Elemente  $p_k^{(rs)}(\mu)$  der durch (9.3) und (10.1) bestimmten Matrizen (10.3). Die Vorschrift (13) gibt dann die Werte  $q_{rs}(\mu)$ , und daraus berechnet man nach (14) die Determinante  $\Delta$ , womit alle zur Aufstellung von (15) nötigen Grössen und Ausdrücke vorbereitet sind.

5. Lösung des zweiten Teilproblems. Auch hier werden die gesuchten  $w_k(\varrho, t)$  in der Form (11) vorausgesetzt. Die Rechnung geht unter Berücksichtigung von (7) ganz analog vor sich wie im vorigen Falle und führt zur Lösung

$$\left. \begin{aligned} w_1(\varrho, t) &= \frac{H B}{\tilde{\Delta} L_{n-1}(i \Omega)^{(n-1)/2}} [-\tilde{q}_{12}(\tilde{\mu}) I_0(\varrho \sqrt{\tilde{\mu}}) + \tilde{q}_{11}(\tilde{\mu}) K_0(\varrho \sqrt{\tilde{\mu}})] e^{i \Omega t}, \\ w_{k+1}(\varrho, t) &= \frac{H B L_k(i \Omega)^{k/2}}{\tilde{\Delta} L_{n-1}(i \Omega)^{(n-1)/2}} \left\{ [-\tilde{q}_{12}(\tilde{\mu}) p_k^{(11)}(\tilde{\mu}) + \tilde{q}_{11}(\tilde{\mu}) p_k^{(12)}(\tilde{\mu})] I_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\tilde{\mu}}) \right. \\ &\quad \left. + [-\tilde{q}_{12}(\tilde{\mu}) p_k^{(21)}(\tilde{\mu}) + \tilde{q}_{11}(\tilde{\mu}) p_k^{(22)}(\tilde{\mu})] K_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\tilde{\mu}}) \right\} e^{i \Omega t} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\}$$

Hierin ist

$$\tilde{\mu} = \frac{i \Omega}{a_1^2}, \quad (16.1)$$



und mit diesen Werten berechnen sich die Grössen  $\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_k, \tilde{\zeta}_n, \tilde{p}_k^{(rs)}(\tilde{\mu}), \tilde{q}_{rs}(\tilde{\mu})$  und  $\tilde{J}$  in genau derselben Weise wie früher die entsprechenden Ausdrücke  $\zeta_0, \zeta_k, \zeta_n, p_k^{(rs)}(\mu), q_{rs}(\mu)$  und  $J$  mit Hilfe von  $\mu$ . Alle anderen in (16) vorkommenden Hilfsgrössen bleiben dieselben wie in den Formeln (15).

6. Schlussbemerkung: a) Obwohl die durch (5), (15) und (16) bestimmte Lösung unserer ursprünglichen Aufgabe (1) bis (4) recht kompliziert ist, so lässt sich doch der Wellencharakter jeder einzelnen Teillösung  $v_k(\varrho, t), w_k(\varrho, t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) leicht dadurch zum Vorschein bringen, dass man sich (15) und (16) in der Normalform

$$v_k(\varrho, t) = V_k(\varrho) e^{i\omega[t + \varphi_k(\varrho)]}, \quad w_k(\varrho, t) = W_k(\varrho) e^{i\Omega[t + \psi_k(\varrho)]} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

geschrieben denkt. Der ganze Effekt in jeder Schicht erscheint so als Wellenspiel zweier sich überlagernden und in der  $\varrho$ -Richtung fortschreitenden Temperaturwellen.

b) Unsere allgemeine Theorie enthält als einen Spezialfall auch die Verhältnisse für einen «einschichtigen» Hohlzylinder (das heisst für den Fall  $n = 1$ ). Man bekommt das zugehörige Temperaturfeld durch Summierung von  $v_1(\varrho, t)$  aus (15) und  $w_1(\varrho, t)$  aus (16). Jedoch hat man bei der Berechnung von  $q_{21}(\mu)$  und  $q_{22}(\mu)$  aus (13) alle  $p_{11}^{(rs)}(\mu) = 1$  zu setzen. Aber auch in diesem allereinfachsten Falle ist das Ergebnis noch immer sehr kompliziert.

c) Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn es möglich ist, an den Trennflächen zwischen einzelnen Körperschichten stetige Änderung sowohl der Temperatur als auch des Wärmefflusses anzunehmen.

### Summary

This paper treats, from a general viewpoint, the propagation of heat waves in an infinite hollow multilayer cylinder subjected to periodic variations of temperature. The hub of this important problem lies in multiplying certain two-by-two matrices together, and the results are very complicated.

(Eingegangen: 30. Januar 1956.)

# Die Wasserdampfkondensation an natürlichem Aerosol bei geringen Übersättigungen

VON WALTER WIELAND, Locarno-Monti<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Die Wasserdampfkondensation in der Atmosphäre ist eine alltägliche Erscheinung. Schon im vergangenen Jahrhundert wurde die Bedeutung der Kondensationskerne erkannt, doch ist bis heute unbestimmt, welche Partikeln des mannigfaltigen Aerosols bei der Kondensation bevorzugt werden. Die Ursache mag damit begründet werden, dass die Feinheit des Aerosols sowohl physikalische wie auch chemische Untersuchungen schwierig gestaltet und nicht selten mit indirekten Methoden gearbeitet werden muss, um eine bestimmte Eigenschaft der Kerne studieren zu können.

Durch geeignete Wahl der Auffangplatten und Benützung eines Doppelkonimeters ist es C. JUNGE und Mitarbeitern [1], [2]<sup>2)</sup> gelungen, das Verhalten des natürlichen und künstlichen Aerosols in Abhängigkeit der relativen Feuchte (RF) der Umgebung zu untersuchen. Aus diesen aufschlussreichen Arbeiten werden folgende Resultate erwähnt:

Im Grössenbereich von  $r = 10^{-6}$  cm bis  $10^{-3}$  cm setzt sich das natürliche Aerosol vorwiegend aus Mischkernen zusammen. Die Kerne sind somit Konglomerate hygroskopischer und wasserunlöslicher Substanzen.

Ein merkliches Anwachsen der Kerne durch Adsorption oder Absorption von Wasserdampf beginnt erst oberhalb einer relativen Feuchte von 70%.

Für Kerne mit einem Radius grösser als  $10^{-5}$  cm gilt das Verteilungsgesetz

$$\frac{dN}{d \log r} = \frac{\text{const}}{r^3}, \quad (1)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Teilchen mit dem Radius  $r$  eines natürlichen Aerosols ist.

Die an Hand von Elektronenmikroskop-Aufnahmen gewonnenen Resultate [3], [4] geben wenig Aufschluss, da einerseits bei gut ausgebildeten Kristallen die Umrisse durch angelagerte Fremdkörperchen verdeckt werden und anderseits leicht flüchtige Stoffe im Hochvakuum verdampfen.

Über die Anzahl der Kondensationskerne, die in einer Expansionskammer mit einem Hub von 1,25 ausgefällt werden, liegen Tausende von Messungen vor [5], [6]. Die vollautomatischen Kondensationskernzähler [7], [8] erlauben

<sup>1)</sup> Osservatorio Ticinese della Centrale Meteorologica Svizzera.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 459.

wohl, im Gegensatz zu den einfacheren Konstruktionen [9], [10], eine fortlaufende Registrierung des Kernganges, ergeben aber keine Aussage über die Aktivität der Kerne im eigentlichen Kondensationsbereich. Es wird nachgewiesen:

Zunahme der Kerndichte durch künstliche oder natürliche Fabrikation von Initialkernen.

Umgekehrt die Abnahme durch Diffusion, Sedimentation und Koagulation [11], [12].

Abhängigkeit des natürlichen Aerosols von der Windrichtung [13], [14], [15].

Die Abnahme der Kernzahl mit der Höhe [16], [17]. Jedoch erlaubt die geringe Anzahl der Messungen noch keine definitive Aussage über die Höhenverteilung.

Die Meteorologen interessieren sich aber vor allem für eine Angabe über den Einsatz der ersten eigentlichen Kondensation am Aerosol in der Atmosphäre und für die Eigenschaften dieser meteorologisch wirksamen Kondensationskerne. Die Lösung dieser Aufgabe wird dadurch erschwert, dass der Übersättigungsgrad in der Atmosphäre nicht genügend genau ermittelt werden kann. Nach Flugzeug- und Ballonaufstiegen schwanken die Werte zwischen 100% und 120% RF.

Anscheinend wurden Messungen über den Einsatz der Kondensation an Kernen bei geringen Übersättigungen nur von J. AITKEN [18] und C. JUNGE [19] ausgeführt. Beide arbeiteten mit dem Expansionsprinzip.

Die von J. AITKEN aufgebaute Apparatur liess eine Berechnung der Wasserdampfübersättigung nicht zu, aber er konnte nachweisen, dass je nach der Zusammensetzung des Aerosols eine grössere oder kleinere Übersättigung notwendig ist, um alle Kerne auszufällen. Besonders hat er darauf hingewiesen, dass für Freiluftaerosol geringere Übersättigungen notwendig sind als für junges Rauchaerosol.

Die von C. JUNGE konstruierte Expansionskammer erlaubte eine Übersättigungsänderung von 0,5 zu 0,5%. Das zu untersuchende Aerosol musste aber vorgängig verdünnt werden. Systematische Untersuchungen an natürlichem Aerosol wurden nicht durchgeführt.

#### Theoretische Betrachtungen:

Die unsicheren Aussagen über das Verhalten der natürlichen Kondensationskerne bei geringen Wasserdampfübersättigungen und die spärlichen meteorologischen Angaben liessen vermuten, dass sich alle Aitken-Kerne an der Wolkenbildung beteiligen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der in den verschiedenen Wolkentypen gemessenen Tröpfchendichte [20], die in der Regel, besonders aber über Industriegebieten, wesentlich kleiner ist als die Kerndichte.

Dies veranlasste eine weitere Gruppe, vor allem H. KOEHLER [21], die hygroskopischen Kerne vom übrigen Aerosol zu trennen. Die Bedeutung dieser Unterscheidung wird ersichtlich, wenn wir die Grössenänderung der Kerne

mit der relativen Feuchte verfolgen. Für ein Lösungströpfchen, das im Dampfdruckgleichgewicht mit der Umgebung steht, gilt:

$$\frac{p}{p_{\infty}} = 1 + \frac{\Delta p_1}{p_{\infty}} - \frac{\Delta p_2}{p_{\infty}},$$

dabei sind:  $p_{\infty}$  Dampfdruck über der ebenen Wasserfläche,  
 $p$  Dampfdruck über der Tröpfchenoberfläche,  
 $\Delta p_1$  Dampfdruckerhöhung infolge der Oberflächenkrümmung,  
 $\Delta p_2$  Dampfdruckerniedrigung infolge des gelösten Stoffes.

Werden nur Lösungströpfchen mit einem Radius grösser als  $10^{-6}$  cm betrachtet, so kann eine eventuelle elektrische Aufladung vernachlässigt werden.

Bei Berücksichtigung des Gesetzes von THOMSON für den Einfluss der Oberflächenspannung und des Gesetzes von RAOULT für verdünnte Lösungen folgt:

$$\frac{p}{p_{\infty}} = 1 + \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3}. \quad (2)$$

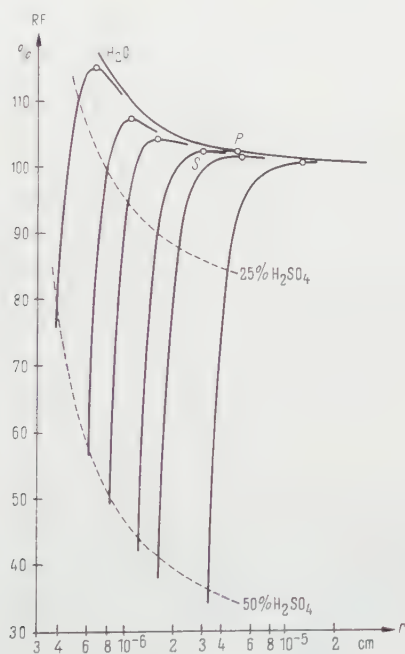
Da bei stark hygroskopischen Lösungströpfchen oder Kernen  $\Delta p_2$  wesentlich grösser sein kann als  $\Delta p_1$ , ist ein Anwachsen schon unterhalb 100% RF möglich, wie dies auch in Figur 1 für  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Tröpfchen dargestellt ist. Mit zunehmender Feuchte der Umgebung vergrössert sich der Radius, bis der Scheitelpunkt S der Wachstumskurve erreicht wird. Nachher wächst das Lösungströpfchen bei konstant gehaltener Feuchte weiter an. Der Verlauf der Wachstumskurve bis 100% RF wurde durch C. JUNGE [19] experimentell bestätigt.

Als Quelle hygroskopischer Kondensationskerne werden vor allem die Meere betrachtet. Die an der Brandung und bei starkem Wellengang zersprühten Wassertropfen verdampfen, zurück bleiben kleine NaCl-Kristalle, die vom Luftstrom fortgetragen werden und später unter geeigneten Bedingungen als Kondensationszentren wirken können. Tatsächlich zeigt eine Analyse von Regenwasser auf Chlor und Natrium, dass eine derartige Niederschlagsregulierung möglich wäre. Ebenso hat A. H. WOODCOCK [22] in Meeresluft bis in eine Höhe von 2700 m NaCl-Kristalle nachgewiesen, in Bodennähe teilweise eine Dichte von  $5 \cdot 10^6$  NaCl-Partikeln/ $\text{m}^3$ . Über Festland hat H. DESSENS [23] mit Hilfe der Spinnfadenmethode einzelne NaCl-Kristalle als Rückstände verdampfter Nebeltröpfchen gefunden.

Ob allein die durch die Meere gelieferten NaCl-Kerne als meteorologische Kondensationskerne in Betracht kommen, wird verschiedentlich bezweifelt. Die Analyse von Regenwasser auf Chlor ist nicht stichhaltig, da Chlor auch in anderen Verbindungen oder selbst als Gas in die Regentropfen gelangen kann [1]. Zudem wäre es ausgeschlossen, dass dieselbe Luftmasse über Festland zwei oder mehrmals ausregnen könnte, da der Nachschub an NaCl-Kernen fehlt. Es ist somit noch nicht abgeklärt, ob die verschiedenartigen Mischkerne oder die Meersalzkristalle die Wolkenbildung in der Atmosphäre ermöglichen.

Um den komplizierten Vorgang der Wasserdampfkondensation in der Atmosphäre etwas besser verstehen zu können, soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden:

1. Bei welcher Übersättigung tritt am Freiluftaerosol Kondensation ein?
2. Lassen sich die meteorologisch bedeutenden Kondensationskerne von den übrigen Aitken-Kernen trennen?



Figur 1

Wachstumskurven von  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Lösungströpfchen nach C. JUNGE. Die mit  $\text{H}_2\text{O}$  bezeichnete Kurve ist die Dampfdruckgleichgewichtskurve für reine Wassertröpfchen.

Da bei Untersuchungen mit dem Expansionsprinzip eine bestimmte Übersättigung nur für sehr kurze Zeit erhalten bleibt, wird versucht, das Problem mit einer Methode zu lösen, die an das Mischwolkenprinzip anlehnt.

Entsprechend Figur 1 wird für diese Arbeit definiert:

1. Der Abschnitt links des Scheitelpunktes  $S$  einer Wachstumskurve gehört zur *Vorkondensation*, derjenige rechts davon zur eigentlichen *Kondensation*.
2. Entsprechend wird bis und mit Scheitelpunkt von Kondensationskernen oder Lösungströpfchen gesprochen und nach dem Überschreiten der Schwelle von Kondenströpfchen.



Es ist somit ausgeschlossen, dass bei gleichbleibender Feuchte und ruhiger Luft ein Kondenströpfchen andauernd schwebt, es wird weiter anwachsen, bis es im Schwerfeld ausfällt.

Es ist denkbar, dass auch ein grosses Lösungströpfchen dank seiner Masse rasch sedimentiert, jedoch sind bei den vorgenommenen Experimenten die Messzeiten so kurz, dass dieser Einfluss vernachlässigt werden darf.

## 2. Vorversuche

### 1. Experiment

Zwei Luftmassen mit verschiedenem Wasserdampfdruck und verschiedener Temperatur sollen unter folgenden Bedingungen durchmischt werden: die beiden Volumen  $V_1$  und  $V_2$  und der Luftdruck seien gleich, die Wände des Behälters sollen den Vorgang nicht beeinflussen.

Dann gilt nach vollendeter Mischung

$$\text{für den Dampfdruck: } p = \frac{p_1 + p_2}{2};$$

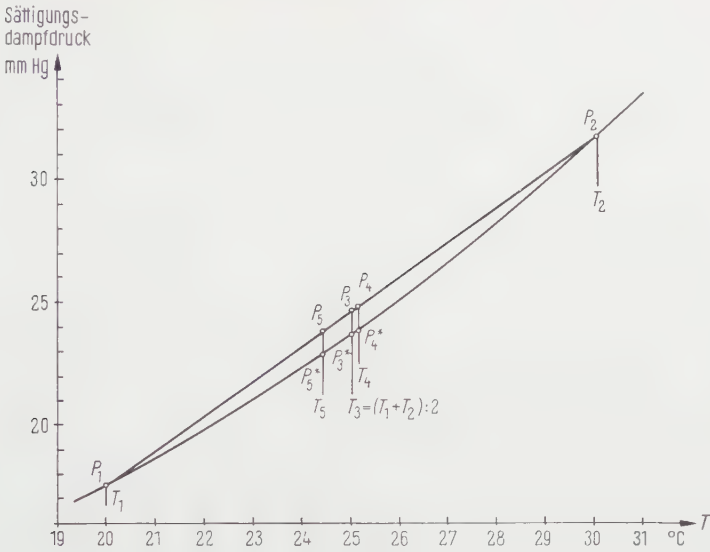
$$\text{für die Temperatur: } T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Besitzen die beiden Luftmassen eine relative Feuchtigkeit von 100%, so ist die gemischte Luft immer mit Wasserdampf übersättigt (Figur 2), und bei Anwesenheit von hinreichend aktiven Kondensationskernen bildet sich ein feiner Nebel. Zur Bestimmung der Übersättigung des Gemisches aus den Anfangstemperaturen  $T_1$  und  $T_2$  und den entsprechenden Sättigungswerten  $p_1$  und  $p_2$  erweist sich die in Figur 3 dargestellte Kurvenschar als zweckmässig. Ist für eine bestimmte Kurve die Temperatur  $T_1$  konstant und  $T_2$  variabel, so kann für jede Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_2 - T_1$  aus dem Temperaturmittel und dem Mittelwert der entsprechenden Sättigungsdampfdrucke die relative Feuchte berechnet werden. In Figur 3 sind die Übersättigungspromille  $\bar{U}$  gegen die Temperaturdifferenzen  $\Delta T$  aufgetragen.

### 2. Experiment

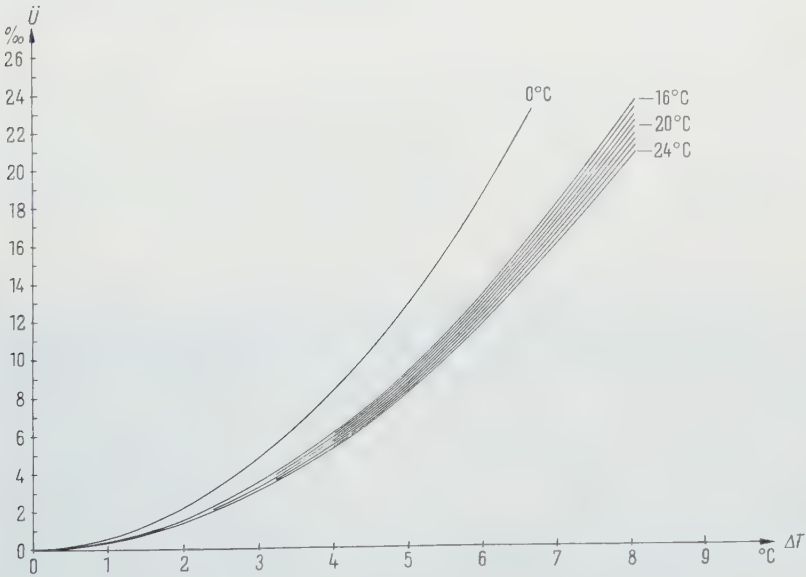
In der Anordnung, wie sie Figur 4a zeigt, wird ein zylindrisches Gefäss von 65 mm Durchmesser und 10 mm Höhe mit einem Aluminiumblock, auf dessen Unterseite ein feuchtes Löschpapier aufgeklebt ist, zugedeckt. Die eingeschlossene Luft wie auch die Wandung und Bodenfläche besitzen die Tem-





Figur 2

Verlauf der Übersättigung.  $P_1$   $P_3^*$   $P_2$  = Sättigungsdampfdruckkurve.

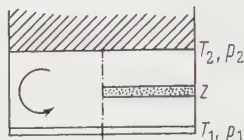


Figur 3

Diagramm zur Bestimmung der Übersättigungspromille bei Mischprozessen berechnet mit:  $(T_1 + T_2)/2$  und  $(p_1 + p_2)/2$  (Sättigungswerte),  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Neben den Kurven sind die Temperaturen  $T_1$  der kälteren Luftmassen angegeben.

peratur  $T_1$ , der Wärmeblock die Temperatur  $T_2 > T_1$ . Innerhalb einer Sekunde wird im geschlossenen Gefäss, je nach der Grösse der Temperaturdifferenz, ein stärkerer oder schwächerer Nebel sichtbar. Die Luft bleibt jedoch nicht ruhig, sondern gleichzeitig mit der Nebelbildung entsteht ein Ringwirbel (Figur 5),



Figur 4a

Stationärer Zustand im Messzylinder. Links: für Wirbelbewegung; rechts: für «ruhige» Luft.  $z$  Zone maximaler Übersättigung.



Figur 4b

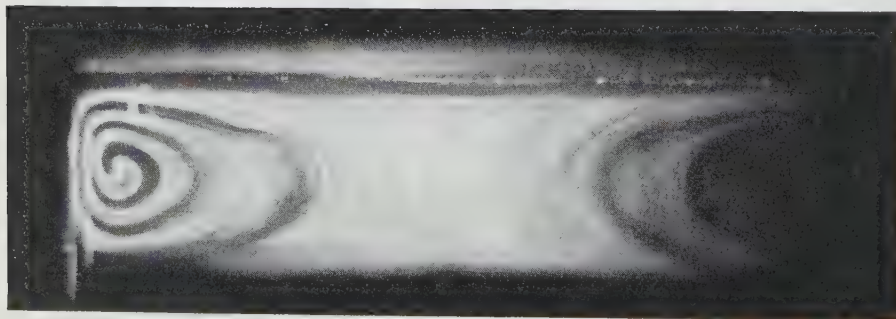
Temperaturgefälle zu Figur 4a.

der das ganze Gefäss ausfüllt und über längere Zeit erhalten bleibt. Die den Nebel bildenden Tröpfchen fallen innerhalb weniger Sekunden aus, neue bilden sich keine.

Um die Übersättigung innerhalb des Messgefässes berechnen zu können, sind abgesehen von den Randeffekten folgende Vorgänge zu berücksichtigen:

- a) die Wasserdampfdiffusion und der Wärmeausgleich von der Deckfläche zur Bodenfläche,
- b) die Wirbelbewegung,
- c) die Kondensation an den Kernen.

In der nachfolgenden Diskussion wird immer angenommen, dass der Dampfdruck direkt unterhalb des mit Wasser getränkten Löschpapiers dem Sättigungsdruck bei der Temperatur  $T_2$  gleich sei und direkt über der Bodenfläche dem Sättigungsdampfdruck bei  $T_1$ . Die der Bodenfläche zugeführte Wärme soll sofort abgeleitet werden, so dass  $T_2$  und  $T_1$  konstant sind.



Figur 5

Die Wirbelbildung im Messzylinder, mit Rauch sichtbar gemacht.

a) Wasserdampfdiffusion und Wärmeausgleich

Besitzen Deck- und Bodenfläche unendliche Ausdehnung, so ist eine Wirbelbewegung im Zwischengebiet ausgeschlossen. Nach genügend langer Zeit stellt sich der stationäre Zustand ein, die Temperatur und der Dampfdruck nehmen mit der Höhe linear zu (Figur 4b). Die eingeschlossene Luft ist deshalb mit Wasserdampf übersättigt.

In Figur 2 ist beispielsweise die Decktemperatur 30°C und die Bodentemperatur 20°C. Der jeweilige Übersättigungsbetrag wird einerseits durch die Sättigungsdampfdruckkurve und anderseits durch die Gerade  $p_1 p_2$  begrenzt. Die maximale Abweichung finden wir in  $p_4$ , da  $p_4^*$  mit dem Berührungspunkt der zu  $p_1 p_2$  parallelen Tangente an die Dampfdruckkurve zusammenfällt. Die grösste relative Feuchte wird durch das Verhältnis  $p_5$  zu  $p_5^*$  gegeben. Sie liegt also unterhalb der Mittelfläche des betrachteten Luftvolumens.

In Tabelle 1 wurde für drei verschiedene Zustände der Verlauf der Übersättigungspromille von der halben Höhe an abwärts berechnet, um die maximalen Beträge zu finden. Die Abweichungen vom jeweiligen Temperaturmittel sind in der ersten Zeile in Zehntelsgrad angegeben, während in der ersten Kolonne die Temperaturmittel eingesetzt sind. Die Temperaturdifferenz zwischen Deck- und Bodenfläche beträgt in jedem Falle 10°C.

Tabelle 1

Temperaturmittel °C $T_2 - T_1 = 10^\circ \text{C}$	Abweichung vom Temperaturmittel °C					Übersättigungspromille
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8 negativ	
25	3,88	3,90	3,91	3,92	3,91	Übersättigungspromille
15	4,57	4,60	4,63	4,63	4,62	
5	5,35	5,39	5,43	5,43	5,42	

Nach Tabelle 1 sind die Abweichungen zwischen den Übersättigungspromillen der gleichen Zeile sehr gering. Es existiert somit im betrachteten Luftvolumen eine Zone, deren relative Feuchte angenähert durch den aus dem Temperatur- und Dampfdruckmittel errechneten Wert bestimmt ist.

Es soll nun die Ausbreitung der Übersättigung kurz nach dem Aufsetzen der Deckschicht verfolgt werden. Die Diffusion des Wasserdampfes ist gegeben durch

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

und der Temperatúrausgleich durch

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Je nachdem  $D$  grösser, gleich, kleiner als  $a$  ist, haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

$D = a$ : Dies ist der Fall der Gleichzeitigkeit der Ausbreitung der Temperatur und des Dampfdruckes. Die für den stationären Zustand berechnete Übersättigung wird nie überschritten, aber in jedem Zeitpunkt erreicht. Die Zone der maximalen relativen Feuchte wandert mit der Zeit von der Deckfläche gegen die Mittelfläche zu.

$D < a$ : Die Temperatur eilt voraus. Die grösste Übersättigung finden wir im stationären Fall.

$D > a$ : Hier eilt der Dampfdruck der Temperatur voraus. In diesem Falle treten anfänglich grosse Übersättigungswerte auf, die mit fortschreitender Zeit in die Werte des stationären Zustandes übergehen.

Verwenden wir die Angaben der Smithsonian Meteorological Tables, so ist:

$D$  für Wasserdampf bei  $20^{\circ}\text{C}$ :  $0,257 \text{ cm}^2/\text{s}$ ;

$a$  für Luft bei  $20^{\circ}\text{C}$ :  $0,215 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

Nun ist aber zu berücksichtigen, dass beim Experiment die Oberflächen-temperatur des Löschblattes anfänglich tiefer ist als nachher im stationären Zustand. Vor dem Aufsetzen des Wärmeblockes wird die Oberfläche des feuchten Löschpapiers stärker abgekühlt, da mehr Wasser verdampft. Durch die niedrigere Temperatur und den tieferen Wasserdampfdruck wird die Übersättigung verringert. Später steigt die Temperatur wohl an, aber zu diesem Zeitpunkt hat sich der stationäre Zustand nahezu eingestellt.

Das Experiment bestätigt, dass dieser Einfluss stärker ist als die sich ungünstig auswirkende Differenz der diskutierten Koeffizienten. Die stärkste Nebelbildung wird immer im Mittelfeld beobachtet und nicht in der Nähe des Wärmeblockes, wie das für  $D > a$  zu erwarten wäre.

### b) Der Wirbel

Es wird nun angenommen, dass in dem abgeschlossenen Gefäss mit den Randbedingungen  $T_2, p_2$  und  $T_1, p_1$  ein Ringwirbel mit vertikaler Achse existiere, dessen Rotationsgeschwindigkeit genügend gross ist, um die Luft derart zu durchmischen, dass im Wirbelfeld sowohl der Dampfdruck wie auch die Temperatur konstant sind. Besitzen Deck- und Bodenfläche gleiche Oberflächenbeschaffenheit, so sind die beiden Grenzschichten gleich dick. Aus Symmetriebetrachtungen folgt für den stationären Zustand, dass die Diffusion durch die beiden Grenzschichten gleich sein muss. Dies ist aber nur der Fall, wenn

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \text{und} \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Also erneut die gleichen Formeln wie für den Mischprozess.

Die *Wirbelbildung*. Bevor die unter a) und b) beschriebenen Vorgänge miteinander verbunden werden, einen kurzen Hinweis auf die Entstehung des Wirbels im Messzylinder. Sobald der Wärmeblock auf den Zylinder gesetzt wird, bildet sich unter der Deckfläche ein Warmluftkissen. Diese Schichtung ist aber nicht stabil, weil die der Wandung benachbarte, warme Luft sich dort abkühlt und als Folge davon abgleitet. Durch Zustrom aus der Mitte wird die an der Deckfläche abgesogene Luftmenge ersetzt. Dadurch entsteht ein laminarer Ringwirbel, dessen Rotationsgeschwindigkeit durch die Gefäßdimensionen und die Temperaturdifferenz ( $T_2 - T_1$ ) bestimmt ist. Kleine Differenzen bewirken eine schwach ausgeprägte Wirbelbewegung, mit zunehmender Decktemperatur vergrößert sich die Rotationsgeschwindigkeit. Dementsprechend geht der unter a) beschriebene Vorgang immer mehr in b) über. Für die beiden Grenzfälle wurde bereits gezeigt, dass die grösstmögliche Übersättigung genügend genau mit Hilfe der Gleichungen des Mischprozesses berechnet werden kann. Das trifft auch für alle Übergangsformen zu, denn jedes aufsteigende Volumenelement durchquert die Zone der grössten RF.

### c) Die Kondensation an den Kernen

Die Berechnung der Übersättigung wurde immer ohne Berücksichtigung des Kondensationsvorganges ausgeführt. Es bleibt noch zu zeigen, dass dadurch das Resultat nicht geändert wird.

Sobald sich der überschüssige Wasserdampf an den Kernen niederschlägt, sind die unter a) zusammengefassten Überlegungen nicht mehr gültig. Der Kondensationsvorgang bewirkt nicht nur eine lokale Abnahme der Übersättigung, sondern gleichzeitig, dank der freiwerdenden Kondensationswärme, eine örtliche Zunahme der Temperatur.

Für die Kerne, die bereits zu Kondenströpfchen angewachsen sind, haben diese Störstellen keinen Einfluss mehr. Sie fallen im Schwerfeld aus. Die restlichen, hinreichend aktiven Kondensationskerne müssen sich gedulden, bis sich das Dampfdruck- und Temperaturgleichgewicht von neuem eingestellt hat. Durch die Wirbelbewegung und die fallenden Kondenströpfchen wird dieser Vorgang beschleunigt.

Der Ausgleich vollzieht sich sehr rasch, sind doch selbst bei geringen Übersättigungen innerhalb 40 s alle Tröpfchen ausgefallen.

## 3. Das Messgerät

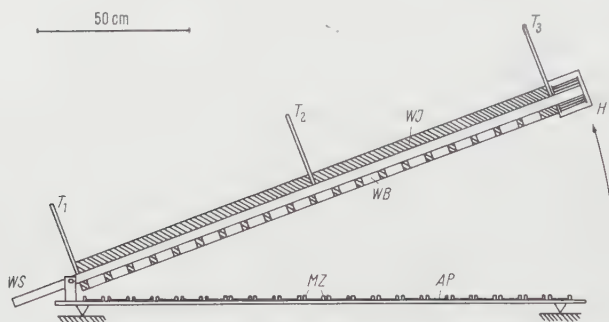
Dank den beschriebenen Eigenschaften eignet sich das 2. Experiment gut zur Untersuchung der Aktivität der Kondensationskerne. Da jedoch zu berücksichtigen ist, dass besonders bei Messungen im Freien die Art und die Anzahl



der Kerne in kleinen Zeitintervallen grossen Änderungen unterworfen sind, muss dieselbe Luftmasse gleichzeitig in verschiedenen Behältern mit verschiedener Übersättigung untersucht werden.

Das in Figur 6 schematisch dargestellte Gerät kann in zwei Teile zerlegt werden:

Wärmestab mit den Wärmeblöcken,  
Grundplatte mit den Messzylindern.



Figur 6

Messgerät für geringe Wasserdampfübersättigungen.

WS Wärmestab; WB Wärmeblock; WJ Wärmeisolation; H Heizung;  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  Thermometer; MZ Messzylinder; AP Auffangplatte.

### Der Wärmestab WS

Auf dem einen Ende einer Antikorodalstange von 2 m Länge und 40 mm Durchmesser sitzt die Heizung  $H$ , deren Heizleistung mit einem Drehwiderstand reguliert werden kann. Das andere, freie Ende ist über ein Lager mit der Grundplatte verbunden. Am Wärmestab sind in gleichen Abständen 20 zylindrische Wärmeblöcke  $WB$  aus Antikorodal mit einer Höhe von 30 mm und einem Durchmesser von 70 mm befestigt. Die Verbindungen zwischen den Blöcken und der Stange werden durch Antikorodalstifte mit einem Durchmesser von 5 mm bewerkstelligt.

Als erste Isolation wurde Resozel und Glimmerband verwendet. Um aber die seitlichen Wärmeverluste möglichst zu reduzieren, wurde der ganze Wärmestab zusätzlich mit Watte eingepackt, so dass nur noch die Bodenflächen der Wärmeblöcke mit den aufgeklebten Löschpapieren sichtbar sind. Im Ruhezustand sind auch diese mit einem wärmeisolierenden Wattlepolster zugedeckt.

Im stationären Zustand fliesst ein Wärmestrom vom aufgeheizten Ende zum Lager des Stabes. Die schmalen Hälse, die den Wärmestab mit den Wärmeblöcken verbinden, beeinflussen den laminaren Fluss nur wenig. Zudem



dringen Temperaturschwankungen der Heizung weniger rasch in die Blöcke ein, als dies bei weiten Verbindungen der Fall wäre.

Da trotz der guten Isolation die seitliche Wärmeabgabe nicht vollständig vermieden werden konnte, besitzt der Stab kein lineares Temperaturgefälle.

Für eine bestimmte Heizleistung wurden die Temperaturen  $T_{a,i}$  ( $i=1, \dots, 20$ ) der Wärmeblöcke mit einem Thermoelement ausgemessen. Die entsprechenden Werte  $T_{a,i}^*$  eines linearen Temperaturgefälles lassen sich aus den beiden Endtemperaturen des Wärmestabes berechnen. Wird die Messung für eine weitere Heizleistung wiederholt ( $T_{b,i}$ ,  $T_{b,i}^*$ ), so zeigt sich, dass

$$\frac{T_{a,i}^* - T_{a,i}}{T_{b,i}^* - T_{b,i}} = \text{const.}$$

Es genügt somit, bei einer beliebigen Heizleistung die Temperaturen der Stabenden und der Mitte zu kennen, um mit Hilfe einer Eichkurve alle Wärmeblocktemperaturen berechnen zu können.

### *Die Grundplatte*

Sie besteht aus einer Antikorodalplatte von 2 m Länge, 20 cm Breite und 5 mm Dicke und trägt die 20 Messzylinder *MZ* von 10 mm Höhe und 65 mm Durchmesser.

### *Die Messtechnik*

Die Messungen dürfen erst dann ausgeführt werden, wenn sich im Wärmestab der stationäre Zustand des Temperaturgefälles eingestellt hat.

Durch Senken des Stabes werden alle 20 Messgefäße gleichzeitig zugedeckt. In jedem Zylinder entsteht eine der Wärmeblocktemperatur entsprechende Wasserdampfübersättigung, damit ein Nebel, an dessen Bildung alle hinreichend aktiven Kondensationskerne beteiligt sind.

Die Wassertröpfchen fallen im Schwerfeld innerhalb 1–2 s auf eine mit Kopallack überzogene Glasplatte und bilden in der Lackschicht feine Löcher. Die Anzahl der Löcher, die mit derjenigen der sedimentierten Tröpfchen übereinstimmt, wird nachträglich photoelektrisch ausgezählt [24].

Da, im Gegensatz zum Scholzschens Kernzähler, die Bodenfläche eine geringere Temperatur besitzt als das eingeschlossene Luftvolumen, kondensiert schon bei kleinsten Übersättigungen ein Teil des Wasserdampfes auf die Platte. Wird der früher beschriebene [24] hochempfindliche Lack verwendet, so perforieren auch jene feinen Wassertröpfchen die Lackhaut und fälschen derart das Resultat. Werden jedoch der Lösung pro 10 cm<sup>3</sup> Flüssigkeit 5 Tropfen rohes Leinöl zugesetzt, so halten derart lackierte Platten einer Übersättigung von mindestens 1,2% stand, ohne dass der direkt kondensierte Wasserdampf

«Fremdlöcher» verursacht. Die relativ grossen Wassertropfchen der Kondensationskerne vermögen jedoch die Lackschicht gut zu durchlöchern, wie dies eine Kontrolle unter dem Mikroskop zeigte.

## 4. Die Messungen

### 1. Messreihe: Untersuchungen im Freien

Der Messort, das Osservatorio Ticinese in Locarno-Monti, ist dadurch gekennzeichnet, dass er sich am Nordhang eines ausgeprägten Talkessels befindet, dessen Talsohle (200 m ü. M.) von steil ansteigenden Bergen, die bis 2000 m Höhe erreichen, eingerahmt ist.

Entsprechend dieser eigenartigen Lage können wir für die durch den Kessel begrenzte Luftmasse im wesentlichen drei Fälle unterscheiden:

*Nordföhlage.* Saubere, in der Regel am Nordfuss der Alpen ausgereinete Luft durchspült das Tal. Diese Lagen sind im allgemeinen durch grosse Sichtweiten und trockene Luft gekennzeichnet.

*Südwindlage.* Feuchte, warme, meist maritime Luft dringt in das Tal ein. Die geringen Sichtweiten (zeitweise unter 5 km) zeigen an, dass es sich um «verunreinigte» Luftmassen handelt.

*Ruhelage.* Es besteht keine nennenswerte Längsströmung, dieselbe Luftmasse bleibt für einige Tage im Kessel eingeschlossen und ist nur der Eigenzirkulation des Tales ausgesetzt. Die Luft altert zusehends, und entsprechend nimmt die Sicht ab.

*Die umliegende Industrie.* Im Bereich der zuströmenden Nordföhluftmassen befindet sich als einziges kleines Industriezentrum Bodio (Distanz 40 km).

Die Südwinde überqueren die industriereiche Poebene mit den Hauptzentren in Mailand und Turin. Dieses ausgedehnte Industriegebiet wird wohl für die starke Verunreinigung dieser Luftmassen verantwortlich sein.

Im Sommer darf der Hausbrand vernachlässigt werden. Bei Ruhelagen sind einzig die Betriebe in Locarno als kernerzeugende Unternehmen zu erwähnen. Obschon ihr Anteil an der Gesamtkernzahl gering ist, muss bei Windstille diese andauernde Fabrikation von Initialkernen berücksichtigt werden.

In Tabelle 2 sind die Messungen im Freien unter Berücksichtigung der meteorologischen Daten zusammengestellt worden. Dabei wurde beurteilt:

die Druckverteilung aus der Bodenkarte des Osservatorio Ticinese,

die Bodenwinde aus den Windregistrierungen in Locarno-Monti,

die Höhenwinde aus den Sondierungen von Mailand und Agno (Flugplatz Lugano),

die Niederschläge aus der Bodenkarte und den Beobachtungen in Locarno-Monti,

Tabelle 2  
*Die meteorologischen Verhältnisse zur Zeit der Messungen*

Messung Nr.	Datum Zeit	Druckverteilung am Boden	Winde		Niederschläge	Luftmassen	Bewölkung	Sicht	RF %	Temperatur °C
			Boden	Höhe						
5	2.8.55 15.15	Hochdruckbrücke von den Azoren bis Skandinavien, Tief über Algerien und sekunda- res Tief über der Adria	mittelstar- ker Föhn	mit der Höhe zu- nehmendes Abdrehen auf SW	Gewitter in Süddeutsch- land, Gewitter im Alpengebiet	gehobene Fest- landsluft aus Deutschland ver- schiebt sich südwärts	9 10 10 Cb	40	45	20,4
7	4.8.55 10.25	Hoch über dem Atlantik, schwaches Sekundärtief über Oberitalien, Kaltfront eines nordrussischen Tiefs verläuft längs der Alpen und stösst gegen Süden vor	mittelstar- ker Nord- wind	N-Wind, späteres Abdrehen auf W	starker Nieder- schlag am Nordfuss der Alpen	erwärmte Polarluft	3 10 Sc	30	53	23,0
9	16.40	Frontdurchgang etwa 13 00	schwacher bis mäs- siger SE- Wind		13.41 Schauer über der Sta- tion (Ferne- witter)	in Locarno-Monti stationär	3 10 Sc	40	42	23,8
10	5.8.55 02.50	Hochdruckkeil schwenkt nach Mitteleuropa	mässiger Nordföhn, jedoch im Abklingen	mit zuneh- mender Höhe abdrehend auf W	kein Nieder- schlag am Nord- fuss der Alpen	alternde Polarluft	0 1 10 Ac	30	35	17,2
13	8.8.55 17.00	Hochdruckrücken von den Azoren bis Nordskandina- vien, Tief über Dänemark und Italien	seit rund 15 h N-Föhn zeitweise böig	starke Nordwinde	Nordstau mit Niederschlag am Nordabfall der Alpen	kalte Meeresluft aus N	0-1/10 Sc	50	25	22,1

Fortsetzung der Tabelle 2

Messung Nr.	Datum Zeit	Druckverteilung am Boden	Winde		Niederschläge	Luftmassen	Bevölkung	Sicht	RF %	Temperatur °C
15	9.8.55 19.05	Hoch über dem Atlantik, Tief über Ungarn, flache Druckverteilung über dem Mittelmeer, Mittel- und Westeuropa	Föhn seit 1 ½ d		schauerartiger Regen über Deutschland und am Nord- fuss der Alpen	über Deutschland verdrängt warme Festlandsluft die kalte Meeresluft	0-1/10 Sc	55	27	20,0
16	19.23		Wind- sprung von N auf SE			fraglich	0-1/10 Sc	50	27	19,1
17	12.8.55 11.20	sehr flache Druckverteilung über Mittel- und Südeuropa	sehr schwacher E-Wind	auf 5000 m starker SW-Wind	über Station am Morgen vereinzelte Schauer, seit 5 min Schauer über Station	Feuchte Mischluft	10/10 Sc	10	85	16,9
19	17.20		sehr schwache NE-Winde		vereinzelte Schauer über Station seit morgens		10/10 Sc	10	90	16,8

die Luftmassen soweit möglich aus den monatlichen Witterungsberichten des Deutschen Wetterdienstes,

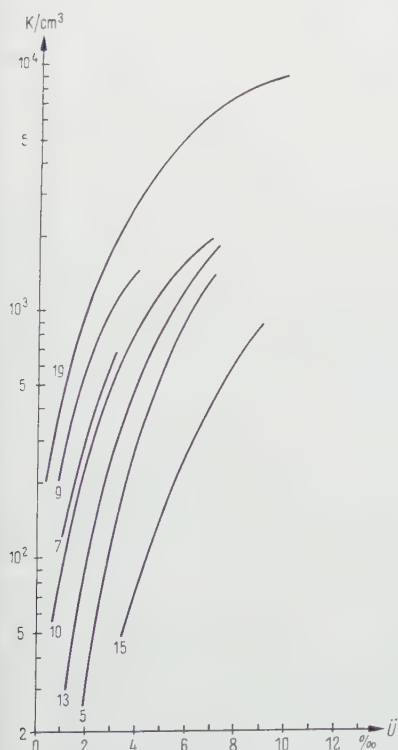
die Bewölkung aus den Beobachtungen in Locarno-Monti,

die Sicht ebenfalls an Hand der Beobachtungen in Locarno-Monti. Diese Angaben sind allerdings nur beschränkt gültig, da der nahe Horizont die Blickweite auf maximal 25 km reduziert.

Die Feuchtigkeit und die Temperatur wurden an der Meßstelle gemessen.

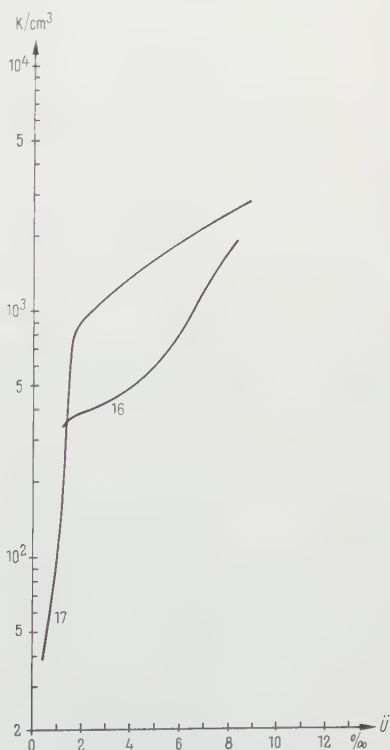
Nach jeder Messung wurde anschliessend eine Kontrollmessung durchgeführt, die nicht besonders angegeben ist, da die Werte gute Übereinstimmung zeigten.

Die gemessenen Kerndichten sind in den Figuren 7 und 8 in Funktion der Übersättigungspromille aufgetragen. Da in einem Messgefäß alle hinreichend aktiven Kerne ausfallen und nicht nur die einer bestimmten Übersättigung zugeordneten, werden die Kurven als Summenkurven bezeichnet.



Figur 7

Summenkurven von Aerosol ungestörter Luftmassen. 5, 13, 15 ausgesprochene Föhnlagen; 19 Mischluft.



Figur 8

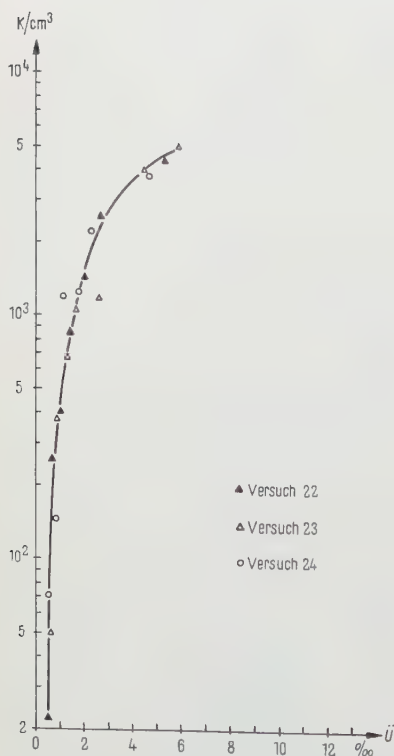
Summenkurven von Aerosol gestörter Luftmassen. 17 Regenschauer; 16 Windsprung.

## 2. Messreihe: Untersuchungen in einem abgeschlossenen Raum

Als Messraum diente ein gut abgeschlossenes Zimmer mit  $10 \text{ m}^3$  Rauminhalt.

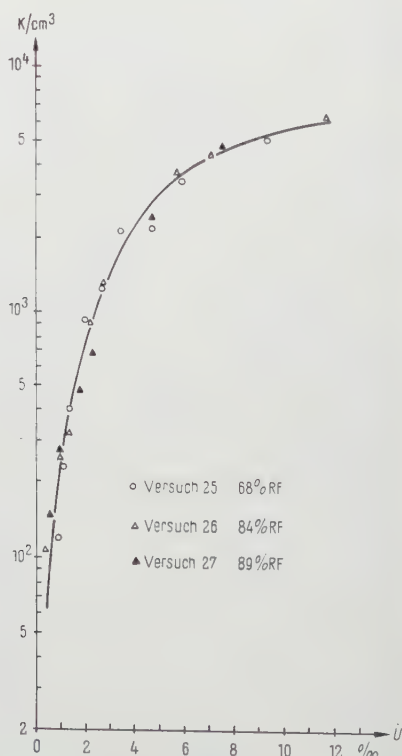
Da Hausbrand oder Mottfeuer in der Nähe der Meßstelle die Untersuchungen im Freien beeinflussen könnten, wurde im Versuchsraum mit einer Blindprobe zuerst die Kerndichte der Zimmerluft bestimmt, dann eine Zigarette geraucht, eine weitere Messung ausgeführt und nach halbstündiger Wartezeit die dritte. Die gewonnenen Werte sind in Figur 9 zusammengefasst.

In einer zweiten Meßserie wurde der Einfluss der relativen Feuchte der Aussenluft auf das natürliche Aerosol untersucht. Wiederum wurde zuerst die Kerndichte der Zimmerluft bestimmt und dann durch Aufhängen nasser Tücher



Figur 9

Summenkurve von Zimmeraerosol. 22 Blindprobe mit reiner Zimmerluft; 23 nach dem Rauchen einer Zigarette; 24  $\frac{1}{2}$  Stunde später.



Figur 10

Summenkurve von Zimmeraerosol. Die Verteilung wird durch die variable RF der Zimmerluft nicht beeinflusst.



in zunehmendem Masse der Wasserdampfgehalt der Luft erhöht. Die relative Feuchte betrug bei den drei Messungen  $68^{\circ}_0$ ,  $84^{\circ}_0$  und  $89^{\circ}_0$ . Den Verlauf der Kerndichten zeigt Figur 10.

## 5. Diskussion der Messresultate

### Die Summenkurven

Bei der Beurteilung von Figur 7 und 8 ist zu berücksichtigen, dass die eingezeichneten Kurven die Mittelwerte einer Punkteverteilung wiedergeben. In seltenen Fällen wichen einzelne Messpunkte um mehr als  $0,5^{\circ}_0$  RF von der entsprechenden Kurve ab. Diese Werte wurden nicht berücksichtigt. Dickenunterschiede des Lackes auf derselben Auffangplatte bewirken unterschiedliche Empfindlichkeit gegenüber den fallenden Kondenströpfchen und zudem bei der photoelektrischen Auszählung verschiedenartige Kontraste und somit stärkere oder schwächere Zählimpulse. Unter diesen Umständen war es nicht möglich zu entscheiden, ob diese extremen Abweichungen reell seien oder nicht.

Die Kurven der ungestörten Luftmassen verlaufen nahezu parallel und scheinen sich der y-Achse asymptotisch anzuschmiegen. Das bedeutet jedoch, dass unterhalb  $100^{\circ}_0$  RF keine Kondenströpfchen ausgefällt werden können, was mit der Definition in Einklang steht. Zugleich finden wir darin eine Bestätigung, dass die zur Berechnung der Übersättigung angewandten Vereinfachungen zulässig sind.

Vergleichen wir die verschiedenen Kurven mit den meteorologischen Angaben in Tabelle 2, so stellen wir fest:

Alle Summenkurven von Tagen mit starkem oder mittelstarkem Nordwind (Föhn) befinden sich auf der rechten Hälfte der Kurvenschar. Mit zunehmender Winddrehung auf Süden oder abnehmender Windstärke verschieben sich die Kurven nach links.

Die beiden Summenkurven gestörter Luftmassen in Figur 8 zeigen einen Verlauf, der scheinbar in keiner Weise mit demjenigen ungestörter Luftmassen in Verbindung gebracht werden kann. Die Kurve 17, die 5 min nach Beginn eines Schauers aufgenommen wurde, zeigt gegen kleine Übersättigungen zu einen starken Abfall. Es scheint, dass der fallende Regen die Zusammensetzung des Aerosols beeinflusste. Die Messreihe 16, die 18 min nach dem extremsten Föhnfall aufgenommen wurde, kann nur mit dem in jene Zeit fallenden Windsprung von N auf SE erklärt werden.

Die Summenkurven der Messungen, die in einem abgeschlossenen Raume ausgeführt wurden, verlaufen im wesentlichen wie diejenigen in Figur 7. Die Messwerte der Versuche 22, 23 und 24 mit Zimmerluft und Rauchaerosol weichen nicht voneinander ab (Figur 9). Dasselbe trifft in Figur 10 für die Versuche 25, 26 und 27 mit variabler RF zu. Es folgt also:

1. Sehr junges und feines Aerosol vermag selbst nach Ablauf einer halben Stunde den anfänglichen Verlauf der Summenkurve eines natürlichen Aerosols nicht zu verändern. Eine Beeinflussung der Messungen durch Hausbrand in der näheren Umgebung ist somit nicht zu erwarten.

2. Die Summenkurve wird durch zunehmende Feuchte bis 90% RF nicht merklich beeinflusst.

### Wasserdampfübersättigung in der Atmosphäre

Die Summenkurven in Figur 7 erlauben eine Abschätzung der zur Wolkenbildung notwendigen Übersättigung.

In Tabelle 3 sind die in verschiedenen Wolkenarten gemessenen Tröpfchendichten zusammengestellt.

Tabelle 3 [25]

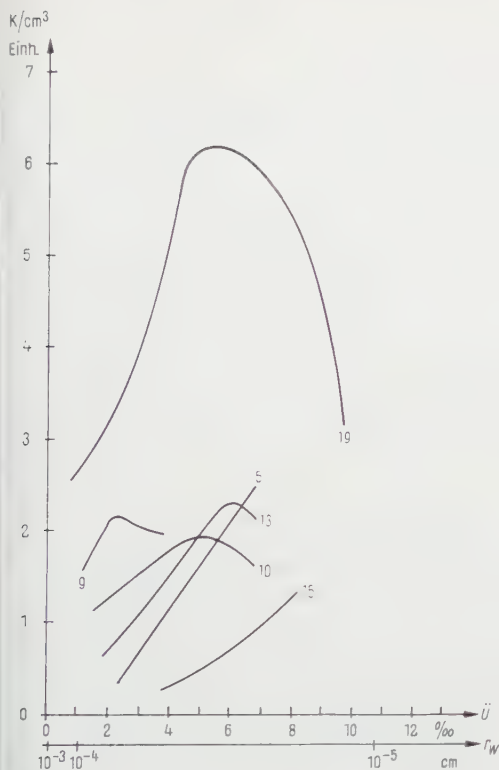
Wolkenart	Tröpfchenzahl/cm <sup>3</sup>
Stratokumulus	350
Kumulus (1)	1000
Altostratus	450
Stratus	260
Nimbostratus	330
Kumulus (2)	545

Unter der Annahme, dass sich in jedem Wolkentröpfchen nur ein einziger Kondensationskern befindet, ist bei einer typischen Föhnluftmasse zur Bildung einer Kumuluswolke mit 1000 Tröpfchen pro Kubikzentimeter eine Übersättigung von 9,5‰ notwendig, während für Mischluft, wie sie Kurve 19 charakterisiert, schon 1,8‰ genügen.

Dichte Wolken sind in Föhnluft sehr selten zu beobachten, also darf angenommen werden, dass in der Atmosphäre eine relative Feuchte von 101‰ selten überschritten wird.

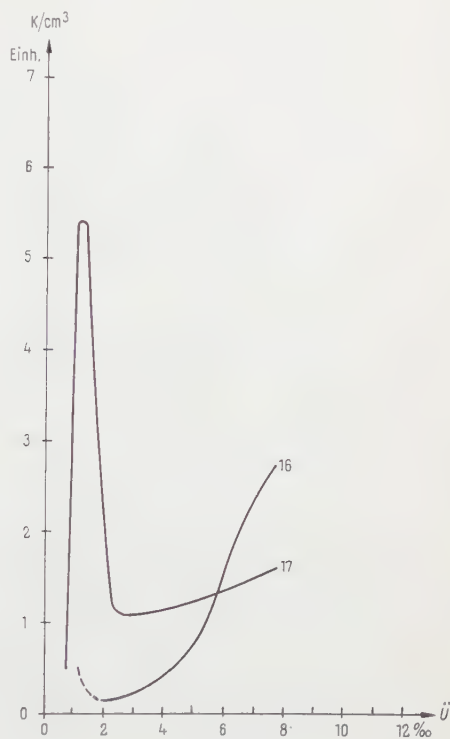
### Die Aktivitätsspektren

Um die Anzahl der bei einer bestimmten Übersättigung aktiven Kondensationskerne zu erhalten, ist die Differentiation der Summenkurve notwendig. Diese wurde in Figur 11 für die ungestörten Luftmassen und in Figur 12 für die gestörten Luftmassen in Übersättigungsintervallen von 0,5 zu 0,5‰ durchgeführt. Die Ordinatenwerte entsprechen somit nicht der genauen Kernzahl. Die Kurven geben nur die Verteilung wieder.



Figur 11

Aktivitätsspektren von Aerosol ungestörter Luftmassen. Die beiden Abszissen geben die Übersättigungswerte und die entsprechenden Wirkungsradien wieder.

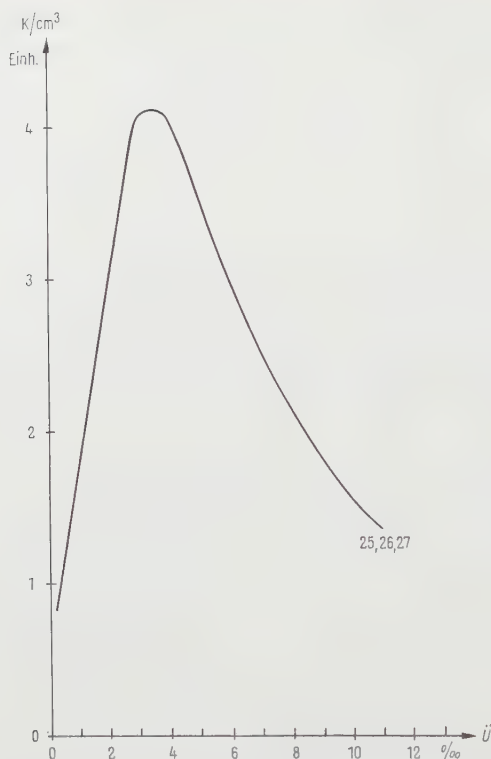


Figur 12

Aktivitätsspektren von Aerosol gestörter Luftmassen. Das Aerosol eines Regenschauers (Kurve 17) besitzt eine auffallende Spitze.

Betrachten wir die Aktivitätsspektren der ungestörten Luftmassen, so stellen wir fest, dass bei ausgesprochenen Föhnlagen die Kernzahl mit abnehmen der Kondensationsfähigkeit zunimmt (Kurve 5 und 15). Mit zunehmender Anreicherung der Luftmassen mit aktivem Aerosol ändert sich der Charakter der Spektren. Die Kerndichte nimmt anfänglich zu, erreicht ein Maximum, um dann wieder abzunehmen. Das Zimmeraerosol in Figur 13 zeigt ein ähnliches Verhalten. Auffallend ist der Verlauf der Kurve 17 in Figur 12, die einer gestörten Luftmasse angehört. Sie zeigt eine nadelartige Spitze und nachher einen eher flachen Verlauf.

Bevor nicht entschieden ist, wie weit die Grösse der Kerne oder ihre chemische Zusammensetzung für den Verlauf der Aktivitätsspektren massgebend ist, können die verschiedenen Kurven nicht ausgewertet werden.



Figur 13

Aktivitätsspektrum von Zimmeraerosol. Differentiation der Summenkurve in Figur 10.

Die Wirkungsradien und das Grössenverteilungsgesetz von W. JACOBI (1)

An Hand der Wachstumskurven in Figur 1 wird definiert:

Der Wirkungsradius  $r_w$  eines Kondensationskernes entspricht dem Radius eines Wassertropfchens, das mit jenem Wasserdampfdruck im Gleichgewicht steht, der für die Scheitelpunktfeuchtigkeit des Lösungströpfchens notwendig ist. (In Figur 1 sind die entsprechenden Punkte  $S$  und  $P$ ).

Mit dieser Definition kommt zum Ausdruck, ob ein Kern Eigenschaften besitzt, die die Kondensation fördern oder nicht. Ist  $r$  der Radius des Kernes, so können wir unterscheiden:

$r_w > r$ : Absorptions- oder Adsorptionskerne;

$r_w = r$ : reine Wassertropfchen;

$r_w < r$ : der Kern ist wasserabstossend.

Aus der Übersättigung im Messgefäß kann mit Hilfe der Beziehung

$$\ln \left( \frac{p_r}{p_\infty} \right) = \frac{2 \alpha M}{\varrho R T r} \quad (4)$$

der entsprechende Wirkungsradius  $r_w$  berechnet werden.

Dabei sind:

$p_r$  Dampfdruck über der gekrümmten Tropfenoberfläche (Radius  $r$ );

$p_\infty$  Dampfdruck über der ebenen Wasseroberfläche;

$\alpha$  Oberflächenspannung bei  $t^\circ\text{C}$ ,  $75,7 (1 - 0,002 t)$  dyn  $\text{cm}^{-1}$ ;

$M$  Molekulargewicht des Wassers ( $= 18,02$ );

$R$  Gaskonstante;

$\varrho$  Dichte des Wassers.

Für geringe Übersättigungen, also Wassertropfendurchmesser grösser als  $10^{-6}$  cm, ist bei einer festen Temperatur:

$$U = \frac{C}{r_w} \quad (U = 0, \quad r_w = \infty, \quad U = \text{Gleichgewichtsübersättigung}).$$

Wir können somit in den Abbildungen der Aktivitätsspektren an Stelle der Übersättigungswerte die entsprechenden Wirkungsradien einsetzen. Als Beispiel wurde das in Figur 11 für eine Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  ausgeführt.

Wird nun auf einem weiteren Blatt die Kerndichte in Funktion von  $\log r_w$  aufgetragen, so kann in Analogie zum Grössenverteilungsgesetz (1) die Zunahme der Kerndichte mit abnehmendem  $r_w$  untersucht werden.

Für die ungestörten Luftmassen wurden in Tabelle 4 die Kontrollwerte für das Gesetz

$$\frac{dN}{d \log r_w} = \frac{C}{r_w} \quad (5)$$

berechnet und nachstehend in Tabelle 4 zusammengestellt.

In der ersten Kolonne sind die Kurvennummern eingetragen und in der ersten Zeile die Wirkungsradien.

Tabelle 4

Kurven-Nr.	Wirkungsradien									
	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	$10 \cdot 10^{-6}$ cm
15	17	15	14							
5	34	32	31	32	30					
13		33	31	30	30	30				
10			19	18	19	18	17			
9					52	48	42	40	41	
19			87	64	50	44	35	32	31	30

Für die Kurven 5, 13 und 10 ergibt die angenommene Gesetzmässigkeit übereinstimmende Kontrollwerte. Die Kurven 9 und 19 gehorchen eher den

Gleichungen

$$\frac{dN}{d \log r_w} = \frac{C}{r_w^{4/3}} \quad \text{und} \quad \frac{dN}{d \log r_w} = \frac{C}{r_w^{3/2}}. \quad (6)$$

Wie aus Figur 1 ersichtlich ist, stimmen selbst für sehr hygroskopische Substanzen Wirkungsradius und Halbmesser des entsprechenden Lösungströpfchens nahezu überein.

Die Grösse des Lösungströpfchens im Scheitelpunkt der Wachstumskurve ist bestimmt durch das Volumen des hygroskopischen Kernes. Für einen kugligen Kern mit Radius  $r$  gilt somit:

$$r_w = C r^3.$$

Setzen wir diesen Wert in den Gleichungen (5) und (6) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} \text{für die Kurven 5, 13 und 10: } \frac{dN}{d \log r} = \frac{C}{r^3}; \\ \text{für 9: } \frac{dN}{d \log r} = \frac{C}{r^4}; \quad \text{für 19: } \frac{dN}{d \log r} = \frac{C}{r^{4.5}}. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Aus den Aktivitätsspektren wird somit das gleiche Verteilungsgesetz gefunden, wie es W. JACOBI an Hand optischer Messungen für Mischkerne erhalten hat.

Daraus folgt: Aktivität und Grösse der Kerne verlaufen parallel.

Bei einer nachträglichen Überprüfung des Verteilungsgesetzes in Kitzbühel (Frühling 1954) hat H. W. GEORGI<sup>3)</sup> festgestellt, dass der Exponent von  $r$  von der Wetterlage abhängig ist. So fand er während eines starken Schneeschauers einen Exponenten von 3,7 vor, bei kleinen Windstärken Werte von 2,9 bis 3,1 und bei Windstille sogar 2,6.

Der Wert 3 darf also nur als Mittelwert betrachtet werden. Die überraschend grossen Exponenten der Kurven 9 und 19 könnten mit der industriellen Tätigkeit in Locarno verknüpft sein.

### Beurteilung der Aktivitätsspektren

Der Zusammenhang zwischen der Kondensationsfähigkeit und der Grösse der Partikeln eines Mischkernacrosols ermöglicht endlich die Diskussion der verschiedenen Aktivitätsspektren.

Sofern wir als Initialkerne nur sehr feines Aerosol zulassen, wird die Gröszenverteilung der Kondensationskerne im wesentlichen durch die Koagulation und die Sedimentation gesteuert. Der Niederschlag von Kondenströpfchen kann als beschleunigte Sedimentation betrachtet werden. Bei der Koagulation werden die grossen Kerne bevorzugt, sie wachsen andauernd auf Kosten der kleinen an, bis sie im Schwerefeld ausfallen. Sofern die Kerne nicht unipolar

<sup>3)</sup> Herr Dr. H. W. GEORGI, Universitätsinstitut für Meteorologie und Geophysik in Frankfurt am Main, hat mir diese unveröffentlichten Werte in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt.



aufgeladen sind, wird sich jedes Aerosol im Laufe der Zeit vergrößern. Es sind somit mehr grosse als kleine Kerne vorhanden, sofern nicht eine genügend starke Initialkernquelle den Verlust andauernd ersetzt. Grosse Kerndichten beschleunigen diesen Vorgang.

#### a) Aktivitätsspektren der ungestörten Luftmassen

Die *Föhnluftmassen* verlieren beim Überqueren der Alpen durch wiederholten Niederschlag die grossen Kerne. Gleichzeitig durchmischen sie sich mit kernarmer Luft aus den höheren Schichten der Atmosphäre; die Kerndichte wird kleiner. Auf dem Wege nach Locarno nimmt die «gereinigte» Luft frische Initialkerne auf. Die mitgeführte Initialkerndichte ist umgekehrt proportional der Windgeschwindigkeit, sofern bei starken Winden vom aufgewirbelten Aerosol abgesehen wird.

Die Aktivitätsspektren reproduzieren diese Vorgänge sehr deutlich:

*Kurve 15:* Nach 1 $\frac{1}{2}$  tägiger Föhnperiode hält noch starker Nordwind an. Die Massenkonzentration der Kerne pro Kubikzentimeter Luft ist klein, das Maximum der Grössenverteilungskurve fällt ausserhalb des Messbereiches.

*Kurve 5:* Mittelstarker Föhn. Die Koagulation wurde durch die grössere Anzahl Initialkerne beschleunigt, die Kurve verschiebt sich gegen grössere Radien zu.

*Kurve 13:* Böiger Nordföhn. Der Einfluss der Initialkerne hat sich verstärkt, das Maximum der Verteilungskurve liegt bereits innerhalb des Messbereiches.

*Kurve 10:* Mässiger Nordföhn ist im Abklingen begriffen. Nebst der Möglichkeit, in vermehrtem Masse Initialkerne aufzunehmen, ist nun auch die verlängerte Koagulationszeit zu berücksichtigen. Die Vergrößerung des Aerosols ist schon ausgeprägt.

Das eine Beispiel einer *stationären Luftmasse* (Kurve 9) zeigt die normale Entwicklung aus der «Föhnreihe». Das Maximum ist nicht besonders ausgeprägt, da die Fabrikbetriebe von Locarno laufend Initialkerne erzeugen.

Auffallend ist die Zunahme der grossen Mischkerne nach dem Vorstoss *maritimer Luftmassen* (Kurve 19). Der Einfluss der ausgiebigen Initialkernquellen in der Poebene ist offensichtlich.

Ein Vergleich dieser Resultate mit den in Locarno-Monti von F. AMBROSETTI [26] ausgeführten Ionenmessungen zeigt, wenn auch nur grob, den parallelen Verlauf der Kerne und der Ionen. So ist in Föhnluft die Kleinionenzahl 1,5- bis 2mal grösser als das Mittel (Extremwert 3). Umgekehrt ist die Anzahl der Gross- und Mittelionen in derselben Luftmasse 1,5- bis 4mal kleiner.

#### b) Aktivitätsspektren der gestörten Luftmassen

Mischen sich zwei Luftmassen mit verschiedenartigem Aerosol, so muss im resultierenden Spektrum die Überlagerung der beiden ursprünglichen Aktivitäts-

spektren zum Ausdruck kommen. Kurve 16 zeigt, wie durch einen *Windsprung* von Föhn auf SE die normale Verteilung gestört wird.

Auffallend ist der Verlauf der Kurve 17. Die Messung wurde 5 min nach dem Aufprallen der ersten Tropfen eines *Regenschauers* ausgeführt. Kernkoagulation allein wird wohl in den seltensten Fällen eine derart hervorstechende Spitze in der Grössenverteilungskurve zur Folge haben. Um eine befriedigende Erklärung zu finden, ist der Niederschlagsmechanismus zu berücksichtigen.

Durch Kondensation von Wasserdampf an den aktivsten Kernen werden die ersten Wolkentröpfchen gebildet. Die Koagulation zwischen den Wolkentröpfchen und den freien Kernen ist aber nach C. JUNGE [1] wesentlich grösser als die Eigenkoagulation der Kerne. Die Kerndichte innerhalb der Wolke nimmt somit ab, und die an die Tröpfchen gebundenen Kerne vergrössern sich. Um aber einen grosstropfigen Niederschlag zu erhalten, sind mehrere Zusammenstösse zwischen den Wolkentröpfchen notwendig. Das führt wiederum zu einer beträchtlichen Vergrösserung der gebundenen Kerne.

Je nach der relativen Feuchte der bodennahen Luftschicht verdunstet ein Teil des nunmehr grosstropfigen Niederschlages, bevor er auf die Erdoberfläche aufprallt. Zurück bleiben die durch drei verschiedene Koagulationsprozesse stark angewachsenen Kerne. Da sich die umgebende Luft durch die Verdunstung abgekühlt hat, sinkt sie mit ihren Kernriesen zu Boden.

Das Aktivitätsspektrum dieses Aerosols zeigt deshalb eine selektive Zunahme der grossen Kerne, während die Anzahl der Kerne mit kleineren Radien gering ist.

Dieser Vorgang der Kernvergrösserung kann in der Natur häufig beobachtet werden, wenn sich Schauerwolken ohne auszuregnen rasch auflösen. An Stelle der Tröpfchenwolke ist bei günstiger Beleuchtung eine auffallende Dunstwolke zu sehen, was auf grosses Aerosol schliessen lässt.

Diese wenigen Beispiele zeigen bereits, wie die Aktivitätsspektren der Kondensationskerne und die mannigfaltigen Vorgänge in der Meteorologie sehr eng miteinander verknüpft sind.

### Die Bedeutung der Kondensationskerne maritimen Ursprungs

Aus den Summenkurven und den Aktivitätsspektren ist ersichtlich, dass die Wolkenbildung über dem inneren Festland ohne Zuhilfenahme der Meersalzkerne erklärt werden kann. Nur in zwei der diskutierten Fälle (Kurve 17 und 19) drang Mittelmeerluft bis zum Messort vor. Die damit verbundene Zunahme der Bewölkung und der anschliessende Niederschlag ist der zugeführten Feuchte und nicht einem besonders gearteten Aerosol zu verdanken.

Das schliesst nicht aus, dass in küstennahen Gebieten Meersalzkerne für den Niederschlagsprozess von entscheidender Bedeutung sind. Dies besonders, wenn mangels ergiebiger Initialkernquellen die Entstehung grosser Mischkerne

verunmöglicht wird. So haben G. YAMAMOTO und T. OHTAKA [27] festgestellt, dass im gewöhnlichen Nebel mehrheitlich Kernkonglomerate enthalten sind, während im tropfenden Nebel die Meersalzkerne überwiegen.

### Zusammenfassung

Die geringe Anzahl der Messungen und der untersuchten Ereignisse erlauben noch keine Verallgemeinerungen.

An Hand der in einer bestimmten Zeitspanne in Locarno-Monti ausgeführten Messungen kann rückblickend zur Problemstellung bemerkt werden:

1. Im bodennahen Freiluftaerosol scheinen immer hinreichend aktive Kerne vorhanden zu sein, die eine Wasserdampfkondensation im Bereiche von 100 bis 101% RF ermöglichen.

2. Die zur Wolkenbildung wichtigen Kondensationskerne sind massgeblich durch ihre Grösse ausgezeichnet und lassen sich deshalb nicht von den übrigen Aitken-Kernen trennen, sofern nicht eine Übersättigungsgrenze eingeführt wird.

3. Aktivität und Grösse der Kerne verlaufen parallel.

4. Besteht das Aerosol nur aus Mischkernen, so ist die Koagulation, als vorbereitender Prozess für die anschliessende Kondensation in der Atmosphäre, von grosser Bedeutung.

5. Meersalzkerne können die Wasserdampfkondensation wohl unterstützen, sind aber nicht notwendig, da hinreichend aktive Mischkerne vorhanden sind.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Rahmen des Forschungsprogramms der «Eidg. Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr» am Osservatorio Ticinese in Locarno-Monti durchgeführt. Der Abteilung für Landwirtschaft des EVD danke ich für die zu dieser Arbeit benötigten finanziellen Mittel. Dank gebührt Herrn Prof. Dr. J. ACKERET, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER, Präsident der Kommission, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER und dem Leiter des Tessiner Instituts, Herrn J. C. THAMS, für das grosse Interesse, das sie diesen Untersuchungen entgegenbrachten.

### ANHANG

#### Kondensationskerne und Wolkenbildung

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die mit bodennahem Aerosol gefundenen Resultate auch für höher gelegene Luftschichten gültig sind. Da für die mittlere Atmosphäre Angaben über die Grössenverteilung der Kondensationskerne fehlen, wird ein direkter Vergleich mit den ausgeführten Messungen verunmöglicht. Kann jedoch gezeigt werden, dass sich in jenen Höhen die gleichen Prozesse wiederholen, so müssen auch die Resultate übereinstimmen.

### 1. Die Bedeutung der Temperaturinversion

Die mittlere Atmosphäre besitzt keine eigentlichen Kernquellen, da die Schwebeteilchen durch die aufsteigende, warme Luft hinaufgetragen werden. Ist diese Bewegung turbulent, so mischt sich kernreiche mit kernarmer Luft. Ist der Aufstieg laminar, so mischen sich nur die Randzonen des Warmluftpaketes, hingegen haben besonders die kleinen Kerne genügend Zeit, um in den «Aussenraum» zu diffundieren. Beide Vorgänge wirken somit kernvermindernd. Mit der Kernabnahme ist eine verzögerte Koagulation verbunden. Die Bildung grosser Kerne wird fraglich, und entsprechend sind für die Wasserdampfkondensation grosse Übersättigungen notwendig. Dies ist bei einem normal geschichteten Luftkörper mit einer Temperaturabnahme von  $1^{\circ}\text{C}$  pro 100 m Höhenzunahme der Fall, wie das beim aufsteigenden Rauchaerosol gut beobachtet werden kann.

Das Verhalten der Kerne ändert sich, sobald die aufsteigende, warme Luft auf eine Temperaturinversion stösst. Die weitere Konvektion wird verhindert, das Aerosol durch die Sperrschicht aufgefangen. Durch nachfolgende Luftpakete werden immer wieder Kerne nachgeschoben, so dass sich mit der Zeit die Kerndichte unterhalb der Inversion vergrössert. Gleichzeitig wird die Koagulation beschleunigt und die Bildung grosser Mischkerne ermöglicht. Die Aktivität des Aerosols gegenüber Wasserdampf nimmt zu. Die Grössenverteilung der Schwebeteilchen unterhalb der Sperrschicht wird durch die Anzahl und Grösse der nachgeschobenen Kondensationskerne, die Koagulation und die Lebensdauer der Inversion gesteuert. Analoge Vorgänge sind für das Wachstum des bodennahen Aerosols verantwortlich. Es ist somit zulässig, die gewonnenen Resultate auf die mittlere Atmosphäre zu übertragen.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass auch, vom Standpunkt des Aerosols aus betrachtet, der Temperaturinversion grosse, wenn nicht entscheidende Bedeutung zukommt. Sie allein ermöglicht den aufsteigenden Kondensationskernen die notwendige Vorbereitung auf den Kondensationsprozess hin.

Inversionen sind beinahe alltäglich. Sie entstehen nicht nur bei Warm- und Kaltlufteinbrüchen, sondern auch nachts durch die Abkühlung der bodennahen Luftschicht. Im letzten der drei Fälle wird zwar die Konvektion verhindert, aber nach Sonnenaufgang, sobald die Erdoberfläche genügend erwärmt ist, kann sie erneut einsetzen.

Im Talkessel des Langensees kann die Entstehung der Dunstschichten sehr gut verfolgt werden. Die Verhältnisse werden auch durch eine Messreihe mit dem Scholz-Zähler gut wiedergegeben:

oberhalb der Dunstschicht:	15 000 Kerne/cm <sup>3</sup> ;
in der Dunstschicht:	45 000 Kerne/cm <sup>3</sup> ;
unterhalb der Dunstschicht:	30 000 Kerne/cm <sup>3</sup> .

Die grössere Kernkonzentration unterhalb der Inversion kommt deutlich zum Ausdruck.

### 2. Die Wasserdampfkondensation

Sofern in der mittleren Atmosphäre wirklich ähnliche Grössenverteilungen der Schwebeteilchen zu erwarten sind, wie sie für bodennahes Aerosol gemessen



wurden, müssen auch die Summenkurven einen analogen Verlauf zeigen. Um das Problem der Kondensation diskutieren zu können, werden deshalb die Bodenwerte zu Hilfe genommen.

Die notwendige Wasserdampfübersättigung in der Atmosphäre kann durch zwei Prozesse erreicht werden:

der *adiabatische Aufstieg* eines Luftpaketes;

die *Mischung zweier Luftmassen* unter geeigneten Bedingungen.

Im vergangenen Jahrhundert wurde die 1784 von J. HUTTON aufgestellte Mischwolkentheorie durch die von H. WETTSFEIN [28] angeregte und von J. HANN ausgebaute Adiabaten Theorie abgelöst. Die wichtigsten Einwände gegen die Mischprozesstheorie waren die freiwerdende Kondensationswärme, die ohne adiabatischen Aufstieg nicht kompensiert werden konnte, und das damit verbundene Ausbleiben ergiebiger Niederschläge. W. v. BEZOLD [29] hat darauf die verschiedenen Möglichkeiten von Mischungsvorgängen zweier Luftmassen ausgiebig diskutiert und ist zum Schluss gekommen, dass mindestens der Bodennebel und die Schichtbewölkung nach der alten Theorie genügend erklärt werden könnten.

Es geht jedoch nicht darum, diese Streitfrage erneut aufzugreifen und die Wolke als Ganzes zu betrachten. Im Folgenden wird nur der erste Einsatz der Kondensation am vorhandenen Aerosol diskutiert, also die Bildung der ersten Kondensentröpfchen.

*Der adiabatische Prozess:* Um die Kondensation durch rein adiabatische Abkühlung zu ermöglichen, ist das Aufsteigen eines in sich geschlossenen Luftpaketes notwendig. Leider existieren über den Durchmesser dieser «Warmluftballone» nur wenige Angaben<sup>4)</sup>.

Die gedachten Wände des aufsteigenden Luftvolumens können wohl jegliche Mischung verhindern, Diffusion wird aber trotzdem stattfinden. Es wird sich somit vom Zentrum bis zur Randzone ein Wasserdampfdruckgefälle einstellen, dessen Stärke einerseits durch die Feuchte des umgebenden Raumes und andererseits durch die zunehmende RF des aufsteigenden Paketes bestimmt ist. Die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

ist mit der Differentialgleichung der Kondensationsadiabaten

$$\frac{d \log T}{d \log p_L} = \frac{R + r m / T}{c_p + r m dE / E dT}$$

zu verbinden.

Dabei sind:

$p_L$  Luftdruck;

$c_p$  spezifische Wärme trockener Luft;

$r$  Kondensationswärme pro Gramm Wasser;

$m$  Mischungsverhältnis Wasserdampf/trockene Luft;

$E = E(T)$  Sättigungsdruck des Wasserdampfes.

Dadurch entsteht eine neue Adiabatengleichung, die zeitabhängig wird.

<sup>4)</sup> Nach Aussagen von Segelfliegern kann der Durchmesser in seltenen Fällen bis 300 m und mehr betragen, doch bleibt immer ungewiss, ob es sich um einen Konvektionsschlauch oder ein geschlossenes Luftpaket handelt.

Um die komplizierte Rechnung zu umgehen, soll das Problem an Hand vorhandener Beobachtungen studiert werden.

Nach M. DIEM [25] schwankt der Flüssigwasser-Gehalt einer Wolke je nach Art zwischen 0,09 und 0,87 g/m<sup>3</sup>. Dieser kondensierte Wasserdampf muss durch den adiabatischen Prozess vorgängig freigemacht werden.

Aus der zu erwartenden Menge Kondenswasser kann für die verschiedenen Wolkenarten die notwendige Abkühlung der aufsteigenden Luft berechnet werden. Die Rechnungen wurden für die Basistemperaturen 10°C und 0°C ausgeführt. Dabei wurde angenommen, dass die Luftmassen zu Beginn des Aufstieges mit Wasserdampf gesättigt sind. Neben den in Tabelle 5 zusammengestellten Werten für die Abkühlung ist noch die Zeit eingetragen, die das Luftpaket für den Abkühlungsvorgang benötigt. Dabei wurde für alle Wolkenarten mit einer Steiggeschwindigkeit von 2 m/s und einer Temperaturabnahme von 0,6°C pro 100 m Steighöhe gerechnet.

Tabelle 5

Wolkenart	Gehalt an Flüssig-Wasser g	Basistemperatur 10°C		Basistemperatur 0°C	
		T °C	t s	T °C	t s
Sc	0,09	— 0,16	13	— 0,24	20
Cu (1)	0,32	— 0,56	46	— 0,87	72
As	0,28	— 0,49	41	— 0,76	63
St	0,29	— 0,51	42	— 0,79	66
Ns	0,40	— 0,70	58	— 1,13	84
Cu (2)	0,87	— 1,55	129	— 2,52	210

Die der Rechnung zugrunde gelegte Steiggeschwindigkeit trifft im günstigsten Fall für den Cu (1) zu. Für Cu (2) ist sie maximal zehnmal grösser und in allen anderen Fällen wesentlich kleiner. Die Werte sind somit, ausgenommen diejenigen für den Cu (2), für den Adiabaten-Prozess sehr günstig berechnet, und trotzdem sind die notwendigen Steigzeiten beachtlich gross. Wird zudem die Diffusion des Wasserdampfes in den Aussenraum berücksichtigt, werden die Steigzeiten um ein Vielfaches grösser. Es ist fraglich, ob dann noch eine Übersättigung möglich ist.

Um die Grössenordnung der Diffusion einigermaßen abschätzen zu können, sei hier ein kleines Experiment beschrieben.

Wird der Kondensationskernzähler von J. SCHOLZ im Bruchteil einer Sekunde expandiert, so bildet sich im Rezipienten eine dichte Tröpfchenwolke. Bei einer Expansionsdauer von 30 s kann keine Nebelbildung beobachtet werden, da in dieser Zeit der überschüssige Wasserdampf fortwährend an die Gefässwände diffundiert und keine hinreichende Übersättigung zustande kommt.

Diesem Experiment kann entgegengehalten werden, dass das Versuchsvolumen zu klein gewählt ist. Doch ist andererseits zu berücksichtigen, dass die Übersättigung im Scholz-Zähler, bei rasch ausgeführter Expansion, mindestens hundertmal grösser ist als diejenige, die in der Atmosphäre möglich ist.

Es soll nun die Wasserdampfkondensation an die Kerne untersucht werden. Dabei wird angenommen, dass noch keine Wolke existiere und das betrachtete Volumen aufsteigender Luft als erstes die Möglichkeit besitze, Wasserdampf



abzugeben. Das mitgeführte Aerosol zeige eine Grössenverteilung analog den Summenkurven für ungestörte Luftmassen.

In dem aufsteigenden Luftpaket werden die aktivsten Kerne in einem bestimmten Augenblick, bei hinreichender Übersättigung, als Kondensationszentren wirken, und die ersten Tröpfchen entstehen. Angenommen, es seien im Mittel 10 pro Kubikzentimeter. Um eine Kumuluswolke zu bilden, sind aber gegen 1000 Tröpfchen pro Kubikzentimeter notwendig. Aus den Summenkurven der Bodenwerte folgt, dass hierfür im günstigsten Falle eine weitere Übersättigung von mindestens 20‰ erforderlich ist. Dazu ist bei einer maximalen Aufstiegs-geschwindigkeit von 2 m/s eine Kondensationszeit von mindestens 2 s notwendig. Es ist deshalb nicht anzunehmen, dass der überschüssige Wasserdampf an neue Kerne diffundiert, sondern weiterhin an die bereits gebildeten Tröpfchen kondensiert.

Das oben beschriebene Experiment mit dem Scholz-Zähler darf hier als Vergleich zu Hilfe genommen werden. Die Gefässwände stellen die bereits vorhandenen Tröpfchen dar. Obschon sie eine wesentlich höhere Temperatur besitzen als die expandierte Luft, nehmen sie bei langer Kondensationszeit allen freiwerdenden Wasserdampf auf.

Wenn auch eventuell durch rein adiabatische Vorgänge einige Kondenströpfchen entstehen könnten, ist trotzdem schwierig zu erklären, wie die in den Wolken beobachtete Zahl der Tröpfchen entstehen sollte. Der Vorgang ist zu langsam.

*Der Mischprozess:* Unter diesem Abschnitt werden alle Vorgänge zusammengefasst, bei welchen zwei Luftpakete mit verschiedener Temperatur und verschiedenem Dampfdruck einander berühren. Der eine Extremfall ist die vollständige Mischung und der andere die Berührung entlang einer Grenzzone. Im 2. Kapitel wurde bereits gezeigt, dass die zweite Möglichkeit, ein reiner Diffusionsprozess, beinahe dieselben Resultate zeigt wie die Durchmischung.

Drei Merkmale zeichnen diese Vorgänge aus:

- Bei genügend grosser Temperaturdifferenz der beiden Luftmassen kann die Mischluft auch dann übersättigt sein, wenn die beiden Komponenten ursprünglich nicht mit Wasserdampf gesättigt waren. Das folgt aus den Figuren 2 und 3.
- An den Randzonen verläuft der Mischprozess so rasch wie die Kondensation an die Kerne, das zeigen die beschriebenen Experimente.
- Neben dem Aktivitätsspektrum des Aerosols entscheidet der Dampfdruck und die Temperatur der beiden Luftmassen über die Anzahl sich bildender Kondenströpfchen.

Nachteilig für diese Vorgänge ist die geringe Menge freiwerdenden Wasserdampfes, so dass keine grossen Tröpfchen entstehen können.

*Die Kombination von Mischprozess mit adiabatischem Aufstieg:* Bei der Gegenüberstellung der beiden Vorgänge zeigt sich, dass zur Einleitung der Kondensation eher der Mischprozess in Frage kommt. Da er nicht auf die Sättigung der beiden Luftmassen angewiesen ist, eilt er dem adiabatischen Prozess voraus. Ist die Kondensation eingeleitet, so wird, dank der freiwerdenden Kondensationswärme, die Konvektion verstärkt, so dass in dieser Phase Mischung und adiabatischer Aufstieg einander gegenseitig unterstützen und die Bildung grösserer Wolken-tröpfchen ermöglichen. In Tabelle 6 sind die beiden Vorgänge entsprechend ihrer Bedeutung zusammengestellt.

Es soll nun kurz überprüft werden, ob die Angaben in Tabelle 6 den Vorgängen in der Natur entsprechen.

Tabelle 6

Zeitlicher Ablauf	Vorgang	Zeitablauf	RF %	Ereignis
1. Prozess	adiabatischer Aufstieg	langsam	bis 100	Vorkondensation
2. Prozess	Mischung	schnell	über 100	Kondensation
3. Prozess	adiabatischer Aufstieg und Mischung	langsam bis schnell	ungefähr 100	Vergrösserung der Kondens-tröpfchen

Die *Schichtbewölkung* entsteht vorwiegend durch Mischung an der Grenzschicht zweier Luftmassen. Die Temperaturdifferenz ist in der Regel gering. Nach Tabelle 6 sind nur kleine Tröpfchen zu erwarten, da der 3. Prozess wegfällt.

Bei der *Quellbewölkung* vergrössert die aufsteigende Warmluft die Temperaturdifferenz zwischen den sich mischenden Luftmassen. Turbulenz beschleunigt die Mischung. Entsprechend der grösseren Übersättigung sind viele Kondens-tröpfchen zu erwarten. Der dritte Prozess ist für diese Wolkenart charakteristisch. Es müssen sich somit je nach Aufstieggeschwindigkeit mittelgrosse bis grosse Wolken-tröpfchen bilden.

In Tabelle 7 sind die zu erwartenden Werte den Beobachtungen von M. DIEM gegenübergestellt.

Tabelle 7

Wolkengruppe	Tröpfchenzahl je cm <sup>3</sup>	Flüssigwasser-gehalt	Tröpfchenzahl je cm <sup>3</sup>	Flüssigwasser-gehalt g/m <sup>3</sup>
Schicht-bewölkung	klein	klein	260–450	0,28–0,29
Quell-bewölkung	mittel bis gross	mittel bis gross	545–1000	0,32–0,87
	entsprechend Tabelle 6		nach M. DIEM	

Die Übereinstimmung ist befriedigend. Es ist jedoch zu erwarten, dass bei sehr grossen Temperaturdifferenzen und geeignetem Aerosol auch der Mischprozess zu grossen Tröpfchendichten führen kann. Dies könnte der Fall sein, wenn kalte, feuchte Luft über eine warme Wasserfläche wegstreicht.

Den Betrachtungen über die Bedeutung der Temperaturinversion und die Kondensation liegt vorderhand ein schwaches Fundament zugrunde, auch wenn verschiedene Tatsachen zugunsten der Überlegungen erwähnt werden können. Entscheiden werden die noch auszuführenden Messungen.

Vor allem wäre zu untersuchen:

1. über längere Zeit das Verhalten des bodennahen Aerosols,
2. die Höhenabhängigkeit des Aerosols und der Einfluss der Temperaturinversion,
3. die Aufstieggeschwindigkeit und die Grösse der Warmluftpakete bei wolkenlosem Himmel, um den Einfluss der Wasserdampfdiffusion berechnen zu können.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. JUNGE, *Die Konstitution des atmosphärischen Aerosols*, Ann. Met., Hamburg, Beiheft 1952.
- [2] W. JACOBI, C. JUNGE und W. LIPPERT, *Reihenuntersuchungen des natürlichen Aerosols mittels Elektronenmikroskop*, Arch. Met., Wien, 5, H. 2, 166 (1952).
- [3] F. LINKE, *Kondensationskerne, im Elektronenmikroskop sichtbar gemacht*, Naturwissenschaften 31, 230 (1943).
- [4] L. FACY, *Nature et structure des noyaux de condensation*, J. scien. meteor. 14, 67 (1952).
- [5] H. LANDSBERG, *Atmospheric Condensation Nuclei*, Beitr. Geophys. 3., Sup. B., 155 (1938).
- [6] H. BURCKHARDT und H. FLOHN, *Die atmosphärischen Kondensationskerne, Bäder Klimaheilk. 1939*.
- [7] L. W. POLLAK, *A Condensation Nuclei Counter with Photographic Recording*, Geofis. pur. appl. 22, 75 (1952).
- [8] F. VERZÄR, *Kondensationskernzähler mit automatischer Registrierung*, Arch. Met., Wien, 5, H. 3, 372 (1953).
- [9] J. AITKEN, *On a Simple Pocket Dust-Counter*, Proc. roy. Soc. Edinb. 18, 39 (1890).
- [10] J. SCHOLZ, *Vereinfachter Bau eines Kernzählers*, Met. Z. Schweiz. 49, 381 (1932).
- [11] J. J. NOLAN und V. H. GUERRINI, *The Determination of the Mass and Size of Atmospheric Condensation Nuclei*, Trans. Faraday Soc. 32, 1175 (1936).
- [12] H. FORSTER, *Studien über Kondensationskerne*, Dissertation (ETH, Zürich).
- [13] P. ACKERMANN, *Kondensationskernzählung in Payerne 1953*, Geofis. pur. appl. 29, 168 (1954).
- [14] M. BIDER, *Ergebnisse der eineinhalbjährigen Registrierungen der Anzahl der Kondensationskerne in Basel*, Geofis. pur. appl. 29, 178 (1954).
- [15] F. VERZÄR, *Kontinuierliche Zählung von atmosphärischen Kondensationskernen in St. Moritz*, Geofis. pur. appl. 29, 192 (1954).
- [16] A. SCHMAUSS und A. WIGAND, *Die Atmosphäre als Kolloid* (Vieweg & Sohn, Braunschweig).
- [17] S. OHTA, *Investigation on Condensation Nuclei*, Bull. Amer. met. Soc. 30, 295 (1949).
- [18] J. AITKEN, Coll. Scien. Papers of J. AITKEN (Cambridge University Press 1923).
- [19] C. JUNGE, *Übersättigungsmessungen an atmosphärischen Kondensationskernen*, Beitr. Geophys. 46, 108 (1936).
- [20] E. MÄRKI, *Die Ursachen der Gesetzmässigkeit in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrössen bei Regen und in den Wolken*, Met. Z. Schweiz 54, 174 (1937).
- [21] H. KOEHLER, *Zur Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre*, Geofys. Publ., Oslo, 2.
- [22] A. H. WOODCOCK, *Atmospheric Salt Particles and Raindrops*, J. Met. 9, 201 (1952).
- [23] H. DESSENS, L. LAFARGUE et P. STAHL, *Nouvelles recherches sur les noyaux de condensation*, Ann. Geophys. 1, 21 (1952).
- [24] W. WIELAND, *Eine neue Methode der Kondensationskernzählung*, Geofis. pur. appl. 30, H. 1, 137 (1955).

- [25] M. DIEM, *Messung der Grösse von Wolkenelementen* 11, Met. Rdsch. 1, 61 (1948).
- [26] F. AMBROSETTI, *Luftelektrische Messungen in Locarno-Monti*, Ann. schweiz. met. Zent.-Anst. 1943.
- [27] G. YAMAMOTO and T. OHTAKA, *Electron-Microscop-Study of Cloud and Fog Nuclei*, Sci. Rep. Tôhoku Univ. 7, 10 (1955).
- [28] H. WETTSTEIN, *Über die Beziehung der Elektrizität zum Gewitter*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 14, 60 (1869).
- [29] W. v. BEZOLD, *Zur Thermodynamik der Atmosphäre*, Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss. 19 (1890).

### Summary

The present paper describes a method by which the behaviour of natural aerosol can be examined in a medium of water vapour at low degree of supersaturation. During a short experimental period the activity of the condensation nuclei was examined with regard to their dependence on the weather situation.

It was found that:

1. Up to a relative humidity of 101% the size and activity of the nuclei run parallel.
2. Aerosol near the ground always contains sufficient active nuclei to form condensation droplets where the relative humidity of the surrounding medium is 100–101%.
3. The nuclei which are of importance for cloud-physics cannot be distinguished as a separate group from the other aerosol.

(Eingegangen: 28. Dezember 1955.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

## The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact

By HARRY DONALD CONWAY, Ithaca, New York, USA<sup>1)</sup>

### Introduction

In two recent articles [1], [2]<sup>2)</sup>, theoretical investigations were made of the distributions of contact pressure between (a) a rigid two-dimensional punch and an orthotropic half plane and (b) between a rigid, solid-of-revolution punch and a transversely isotropic half space. The indenting surfaces of the punches were of arbitrary form, friction was ignored, and the problems treated as elastic ones.

The present investigation concerns the calculations of the distributions of contact pressure between (a) two-dimensional, symmetrical, orthotropic bodies and (b) two transversely isotropic solids of revolution. It is seen that the problems are mathematically identical with the corresponding rigid punch problems and admit simple solutions.

<sup>1)</sup> Cornell University, College of Engineering, Department of Mechanics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 465.

### Analysis

Consider two two-dimensional bodies in contact at the point  $O$  as shown in Figure 1, and assume that the curvatures of the boundaries in the neighbourhood of  $O$  are sufficiently small for the bodies to be treated as half planes. The half planes are pressed together along their axes of symmetry, which pass through  $O$ , so that any two points of the half planes on this axis at great distances from  $O$

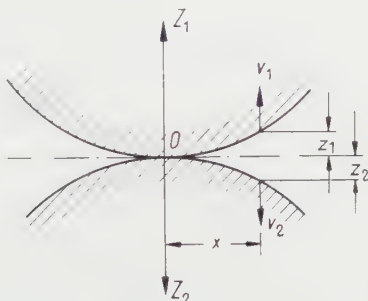


Figure 1

Two-dimensional or axisymmetrical bodies in contact.

will approach one another by a distance  $s$ . Assume that  $O$  does not move during this compression and that points at a very small distance  $x$  from  $O$  on the surfaces of the upper and lower half planes move vertically through distances  $v_1$  and  $v_2$  during the compression, as indicated in Figure 1.

If the original forms of the surfaces of the half planes in the vicinity of  $O$  are

$$z_1 = f_1(x), \quad z_2 = f_2(x) \quad (1)$$

and the aforementioned points coincide within the contact length after compression, then

$$s - (v_1 + v_2) = z_1 + z_2 = f_1(x) + f_2(x). \quad (2)$$

Thus, by differentiating with respect to  $x$ , it follows that

$$-(v'_1 + v'_2) = f'_1(x) + f'_2(x). \quad (3)$$

Assume the half planes to be of orthotropic material. It has been shown [1] that

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{E_2}{E_1} \quad (4)$$

where the moduli  $E_1$  and  $E_2$  for the upper and lower half planes, respectively, are defined by equations of the form

$$E = \frac{2}{(\alpha_1 + \alpha_2) S_{22}}$$

where the elastic constants are given by the stress-strain equations

$$\varepsilon_x = S_{11} \sigma_x + S_{12} \sigma_y, \quad \varepsilon_y = S_{22} \sigma_y + S_{12} \sigma_x, \quad \gamma_{xy} = S_{66} \tau_{xy} \quad (5)$$

and  $\alpha_1^2 \alpha_2^2 = S_{11}/S_{22}$  and  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (S_{66} + 2 S_{12})/S_{22}$ .



Thus, from equations (3) and (4), we write

$$v'_1 = -\frac{E_2}{E_1 + E_2} [f'_1(x) + f'_2(x)], \quad v'_2 = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} [f'_1(x) + f'_2(x)]. \quad (6)$$

The problem treated here is then mathematically identical with that of a half plane compressed by a rigid punch, the slope of which is such that the slope of the half plane in the contact length is altered by  $v'_1$  or  $v'_2$  as the case may be. This conclusion was also reached by MUSKHELISHVILI [3] but for the case of isotropic half planes rather than the more general orthotropic ones. A simple solution to the rigid punch problem for an isotropic half plane has been given by SCHUBERT [4] and has been extended to orthotropic half planes by the writer [1]. Thus the particular solutions which have already been given for the rigid punch problem have their counterparts in the present problem. Several of these will be discussed later.

Although the above discussion refers to problems in plane stress or plane strain, it will be seen that it also applies to that of two solids of revolution, approximating half spaces, pressed together along their common axis of symmetry. In this case the contact length is replaced by a circular contact area, and the problem is mathematically the same as that of a half space compressed by a rigid cylindrical punch. A relatively simple solution for the isotropic half space is available [4], as also is one for a transversely isotropic half space compressed by a rigid cylindrical punch [2]. Equation (4) for the axisymmetrical problem is then replaced by

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{E_{eq(2)}}{E_{eq(1)}} \quad (7)$$

where  $E_{eq(1)}$  and  $E_{eq(2)}$  are equivalent moduli defined by equations of the form

$$E_{eq} = \frac{\sqrt{A} \{ (\sqrt{AC} + L)^2 - (F + L)^2 \}^{1/2}}{2\sqrt{L} (AC - F^2)} \quad (8)$$

using the notation of LOVE [5] for the elastic constants  $A$ ,  $C$ ,  $F$  and  $L$ . Thus, for the axisymmetrical problem

$$v'_1 = -\frac{E_{eq(2)}}{E_{eq(1)} + E_{eq(2)}} [f'_1(x) + f'_2(x)], \quad v'_2 = -\frac{E_{eq(1)}}{E_{eq(1)} + E_{eq(2)}} [f'_1(x) + f'_2(x)]. \quad (9)$$

Some examples will now illustrate the above.

### Examples

Consider the case of two circular surfaces in contact, the radii of curvature at the contact point  $O$  being  $R_1$  and  $R_2$ , respectively, where  $R_1$  and  $R_2$  are sufficiently large for the assumption of half planes to be made. We may write, approximately

$$z_1 = \frac{x^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{x^2}{2R_2}$$

and hence it follows from equations (6) that

$$v'_1 = -\frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] x, \quad v'_2 = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] x.$$



The solution for a rigid punch of the form  $v' = kx$  pressed against a half plane has already been given [4]. From these results and for the present case, the pressure in the contact length is immediately written down as

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \left[ \frac{P}{\pi} + \frac{E_1 E_2}{4(E_1 + E_2)} \cdot \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} (a^2 - 2u^2) \right] \quad (10)$$

where  $2a$  is the contact length. To find the contact length, we write  $p(a) = 0$  and it follows that

$$a^2 = \frac{4P}{\pi} \cdot \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (11)$$

Substitution in equation (10) then gives

$$p(u) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - u^2}. \quad (12)$$

Writing  $E_1 = E_2 = E$  for the isotropic case, we obtain the well-known result of HERTZ [6].

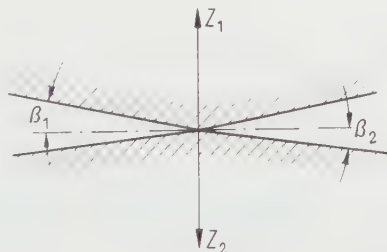


Figure 2a

Wedges or cones in contact.

Similarly, for the axisymmetrical case of two spheres of transversely isotropic material having large radii and using known results [4] for the corresponding rigid punch problem, we have

$$p(u) = \frac{1}{6\pi\sqrt{a^2 - u^2}} \left[ \frac{3P}{a} + \frac{2E_{eq(1)}E_{eq(2)}}{E_{eq(1)} + E_{eq(2)}} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} (4a^2 - 6u^2) \right]. \quad (13)$$

The equation  $p(a) = 0$  then gives

$$a^3 = \frac{3PR_1R_2(E_{eq(1)} + E_{eq(2)})}{4E_{eq(1)}E_{eq(2)}(R_1 + R_2)} \quad (14)$$

and hence

$$p(u) = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - u^2}. \quad (15)$$

These also give the well-known results of HERTZ [6] for the special case of isotropic spheres when  $E_{eq(1)} = E_{eq(2)} = E/(1 - \nu^2)$ ,  $\nu$  being Poisson's ratio. We now consider the case of two wedges in contact as shown in Figure 2a, the angles  $\beta_1$

and  $\beta_2$  being assumed small. Writing

$$z_1 = \beta_1 x, \quad z_2 = \beta_2 x$$

it follows for the plane stress problem that

$$v'_1 = -\frac{E_2}{E_1 + E_2} (\beta_1 + \beta_2), \quad v'_2 = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} (\beta_1 + \beta_2).$$

Now, the problem of a rigid wedge pressed against an orthotropic or isotropic half plane admits a simple solution [4], [1]. From the solution for this case we have, for the present problem

$$p(u) = \frac{E_1 E_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi (E_1 + E_2)} \cosh^{-1} \frac{a}{u} \quad (16)$$

and

$$a = \frac{P}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}. \quad (17)$$

Hence

$$p(u) = \frac{P}{\pi a} \cosh^{-1} \frac{a}{u}. \quad (18)$$

Similarly, we obtain the solution for the case of two cones pressed together from that for a rigid cone indenting an isotropic half space [4]

$$p(u) = \frac{E_{eq(1)} E_{eq(2)} (\beta_1 + \beta_2)}{2 [E_{eq(1)} + E_{eq(2)}]} \cosh^{-1} \frac{a}{u} \quad (19)$$

where

$$a^2 = \frac{2 P [E_{eq(1)} + E_{eq(2)}]}{\pi E_{eq(1)} E_{eq(2)} (\beta_1 + \beta_2)}. \quad (20)$$

Hence

$$p(u) = \frac{P}{\pi a^2} \cosh^{-1} \frac{a}{u}. \quad (21)$$

By assuming  $\beta_2$  to be negative and less than  $\beta_1$ , we solve the two-dimensional and axisymmetrical problems shown diagrammatically in Figure 2b. These have practical interest. It is seen that the pressure distributions have logarithmic singularities at the apex of the wedge or cone.

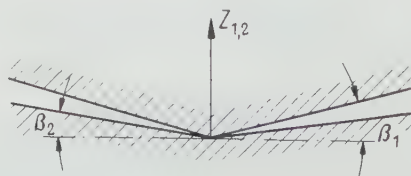


Figure 2b

Wedges or cones in contact.

## REFERENCES

- [1] H. D. CONWAY, *The Indentation of an Orthotropic Half Plane*, ZAMP 6, 402 (1955).
- [2] H. D. CONWAY, *The Indentation of a Transversely Isotropic Half-Space by a Rigid Punch*, ZAMP 7, 80 (1956).
- [3] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations*, 2nd edition (Moscow, 1946). Translated into English by J. R. M. RADOK (P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland, 1953), p. 305.
- [4] G. SCHUBERT, *Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken*, Ingen.-Arch. 13, 132 (1942).
- [5] A. E. H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition (Cambridge University Press, 1927), p. 160.
- [6] H. HERTZ, *Gesammelte Werke*, vol. 1 (Leipzig 1895), p. 155.

*Zusammenfassung*

Die vorliegende Untersuchung behandelt die Verteilung des Kontaktdruckes von (a) zwei zweidimensionalen, symmetrischen, orthotropen Körpern und (b) zwei transversal-isotropen Rotationskörpern. Man sieht, dass die zwei Probleme mathematisch identisch sind mit den entsprechenden Problemen der undeformierbaren Stempel und dass einfache Lösungen möglich sind. Mehrere Beispiele sind ausgearbeitet.

(Received: March 13, 1956.)

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Die Grundlagen der Akustik.** Von E. SKUDRZYK (Springer-Verlag, Wien 1954). XXII + 1084 S., 450 Textabbildungen; Ganzleinen Fr. 150.–.

Bei dem vorliegenden Werk handelt es sich um eine Enzyklopädie von wahrhaft imponierendem Umfang und Inhalt. Der Autor hat sich die Aufgabe nicht leicht gemacht, er ist den Problemen auf den Grund gegangen und hat den verschiedenen Literaturquellen nachgeforscht.

Es werden zuerst die für die Akustik besonders wichtigen mathematischen Gesetze und Funktionen rekapituliert, was in erster Linie zur Klärung und Erläuterung der physikalischen Verhältnisse dienen soll. Der Ableitung der Grundgleichungen des Schallfeldes sind längere Ausführungen gewidmet, wobei auch die verschiedenen Lösungen für die ebenen Wellen und die Kugelwellen eingehend diskutiert und die Effekte der Reflexion und Beugung von Schallwellen erörtert werden. Mit der Behandlung der elektromechanischen Analogien wird auf die Behandlung der akustischen Grundelemente, Masse und Steifigkeit, übergeleitet. Der Theorie der gekoppelten Systeme wird besondere Aufmerksamkeit gewidmet, wobei die graphischen Darstellungen sehr wertvoll sind. Damit sind auch die theoretischen Grundlagen für die Behandlung der elektroakustischen Wandler (Mikrophone und Schallsender) gegeben, deren Prinzipien einzeln besprochen werden. Ein besonderes Kapitel ist den so wichtigen piezoelektrischen Wandlern gewidmet. Mit den Ausführungen über das menschliche Ohr, über die Sprache und Musik wird in Kürze die physiologische Akustik behandelt, wobei immer wieder auf die Spezialliteratur verwiesen wird. Sinngemäss folgen dann die

Probleme der Raum- und Bauakustik. Mit der Theorie der inneren Reibung gelingt es, die akustischen Vorgänge in verlustbehafteten Medien zu erfassen. Längere Ausführungen widmet der Verfasser der Schallausbreitung- und Absorption im Wasser. Zum Schluss werden dann noch die strengen nichtlinearen Grundgleichungen des Schallfeldes behandelt.

Alle theoretischen Darlegungen werden immer wieder durch treffend ausgewählte numerische Beispiele erläutert. Die Benützung dieses inhaltsreichen Werkes wird durch ein besonders gut ausgearbeitetes Inhaltsverzeichnis sehr erleichtert. Von besonderem Wert ist auch ein wirklich vollständiges Literaturverzeichnis, das mehr als 100 Seiten umfasst.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Autor ein hervorragendes Nachschlagewerk der Akustik geschaffen hat, das sich als Ausgangspunkt zu einem vertieften Studium der Akustik eignet und das sicher in Fachkreisen grosse Anerkennung finden wird.

A. Lauber

**Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum.** Par W. SCHMEIDLER. (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1954 [Teubners Mathematische Leitfäden. vol. 46]). 89 p.; cart. DM 7.80.

La théorie de l'espace de HILBERT et des opérations linéaires dans cet espace constitue actuellement le chapitre le plus important de l'Analyse fonctionnelle. Le lecteur désireux de s'initier rapidement dans ce domaine si important par ses applications trouvera dans l'opuscule ci-dessus une excellente introduction à son étude.

Après avoir défini dans le premier chapitre l'espace abstrait de HILBERT et les deux plus importantes de ses réalisations, l'espace des suites numériques de HILBERT et celui des fonctions de carré intégrable, et établi les premières propriétés qui en découlent (existence de systèmes orthogonaux complets, etc.), l'auteur expose dans le second chapitre la théorie des opérateurs linéaires bornés et plus spécialement celles des opérateurs compacts ou totalement continus ainsi que celle des opérateurs hermitiens positifs. Il en déduit les théorèmes classiques de FREDHOLM sur les équations intégrales. Le troisième et dernier chapitre étudie la théorie spectrale des opérateurs hermitiens bornés ou non. Chaque chapitre se termine par un certain nombre d'exercices et de compléments.

M. Plancherel

**Elektrolyte.** Von HANS FALKENHAGEN. Zweite, neubearbeitete Auflage. (S. Hirzel Verlag, Leipzig 1953). 263 S., 94 Abb.; DM 15.60.

Die 2. Auflage von FALKENHAGENS *Elektrolyte* schliesst sich im Aufbau der Stoffbehandlung eng an die erste an: Betonung der theoretischen Überlegung, reichlicher Beizug von experimentellen Ergebnissen und Ausschaltung aller messtechnischen Details.

Nach Behandlung der klassischen Lehren über elektrolytische Lösungen (Kap. 1–4) werden die experimentellen Gründe für die Notwendigkeit ihrer Verbesserung geschildert (Kap. 5 und 6) und diese selbst in Form der Debye-Hückel'schen Theorie dargestellt (Kap. 7). Leider ist die statistische Ableitung der Grundgleichung nicht mehr, wie in der ersten Auflage, durch einen Abschnitt im Anhang unterbaut.

Im folgenden 8. Kapitel steht die Thermodynamik der Debye-Hückel-Elektrolyte zur Diskussion (Aktivitätskoeffizient, Löslichkeitsbeeinflussung usw.). Das längste Kapitel, Kapitel 9, behandelt die Theorie der Leitfähigkeit; ausführlich werden die allgemeinen Gleichungen nichtstationärer Vorgänge abgeleitet. Dann folgt die Bestimmung der Leitfähigkeit für Gleich- und Wechselfelder,

Vergleich der Ergebnisse mit empirischen Daten, schliesslich die Schilderung und theoretische Behandlung des Wienschen Feldstärkeeffekts. Ein kurzer Paragraph handelt vom Dissoziationsspannungseffekt. Eine Zusammenstellung von theoretischen und experimentellen Aussagen über die Viskosität starker Elektrolyte gibt Kapitel 10.

Wesentlich Neues bringen die beiden letzten Kapitel. Im elften werden eine die Raumbeanspruchung der Ionen erfassende Verteilungsfunktion von EIGEN und WICKE eingeführt und ihre Konsequenzen überprüft, im zwölften die Theorie der Mischung starker Elektrolyte von ONSAGER und FUOSS entwickelt.

Der «Falkenhagen» dürfte mit der neuen Auflage seinen angestammten Platz weiterhin behaupten, wozu nicht wenig auch die Ausführlichkeit von Autoren- und Inhaltsverzeichnis und eine enzyklopädisch anmutende Zitatenfülle beitragen.

W. Baumgartner

**Elements of Statistical Mechanics.** Von D. TER HAAR (Rinehart & Co., Inc., New York 1954). 468 S., 56 Fig.; \$8.50.

Von den zahlreichen Büchern über statistische Mechanik gibt es keines, das so wie dieses zur Einführung in das ganze Gebiet der klassischen wie der Quantenstatistik geeignet ist und ausser den Grundlagen noch einen so weiten Bereich von Anwendungen bringt. Von diesen seien, ohne Vollständigkeit der Aufzählung, als Beispiele angeführt: Virialentwicklung der Zustandsgleichung, Transportphänomene in Metallen, Halbleiter, Kooperativphänomene (Ising-Modell, ONSAGERS exakte Lösung im zweidimensionalen Fall), statistische Methoden der Kernphysik, Gleichgewichtstheorie des Ursprungs der chemischen Elemente.

Die mehr prinzipiellen Fragen über das *H*-Theorem und die irreversiblen Prozesse sind in Anhängen etwas kürzer behandelt. Ein kleiner Schönheitsfehler des ausgezeichneten und vom Referenten aufs wärmste empfohlenen Buches sei noch bemerkt: das «principle of detailed balancing» gilt in Wahrheit in der Quantenstatistik ebensowenig allgemein wie in der klassischen Statistik, sondern nur in der ersten Näherung der Störungstheorie für die Übergangswahrscheinlichkeiten. Das *H*-Theorem gilt auch hier unter allgemeineren Bedingungen, analog zu BOLTZMANN'S Zyklen in der klassischen Statistik.

W. Pauli

**Theorie der chemischen Bindung auf quantentheoretischer Grundlage.** Von H. HARTMANN (Springer-Verlag, Berlin 1954). 357 S., 53 Abb.; DM 46.80 und 49.80.

Das Buch gliedert sich in drei ungefähr gleich grosse Hauptabschnitte. Der erste Abschnitt bringt die quantenmechanischen Grundlagen für die Theorie der chemischen Bindung. In konzentrierter Form und daher nicht überall leicht lesbar wird der Leser mit dem im Rest des Buches verwendeten Formalismus, den gruppentheoretischen Hilfsmitteln, den Näherungsmethoden und den hauptsächlichsten Ansätzen für die Mehrelektronen-Eigenfunktionen bekanntgemacht.

Im zweiten Drittel folgt die Anwendung auf Grundprobleme der chemischen Bindung (Wasserstoffmolekulation und Wasserstoffmolekül), an Hand derer die beiden hauptsächlichsten Näherungsverfahren, die Methode der Valenzstrukturen und die Methode der Molekülzustände ausserordentlich klar erläutert und kritisch gegeneinander und gegen feinere Näherungen abgewogen werden.

Der dritte Teil enthält Anwendungen der Theorie auf kompliziertere Moleküle und den Vergleich mit der Erfahrung. Man freut sich an der allorts gesunden Kritik des Autors, der sich, stets des Grades der theoretischen Näherung bewusst, nirgends zu Spekulationen hinreissen lässt, zu denen das grosse vorliegende



Tatsachenmaterial die Theoretiker so leicht verführt. Hypothetisches und Halbempirisches ist jeweils klar als solches dargestellt und behandelt. An einigen Stellen würde man statt der Literaturangabe etwas grössere Ausführlichkeit wünschen, muss sich aber zufrieden geben, wenn man im Vorwort liest, dass der Verfasser keine Monographie, sondern ein Mittelding zwischen einer solchen und einem Lehrbuch zu schreiben beabsichtigte.

Gesamtanlage und Haltung des Werkes sind somit mehr auf das Prinzipielle als auf die Erfassung möglichst vieler chemischer Tatsachen ausgerichtet. Es wendet sich daher weniger an den präparativen Chemiker als an Physiker und theoretische Chemiker. Für diese bildet es eine ausserordentlich wertvolle Hilfe.

H. Labhart

**Einführung in die technische Mechanik.** Von ISTAVAN SZABO (Springer-Verlag, Berlin 1954). 383 S., 484 Abb.; DM 19.50, Ganzleinen DM 22.50.

Das vorliegende Buch ist aus der Absicht entstanden, dem Studierenden der Ingenieurwissenschaften am Beginn seines Studiums rasch diejenigen mechanischen Kenntnisse zu vermitteln, die er für seine weiteren Studien braucht. Das im Hinblick auf dieses Ziel ausgewählte Stoffgebiet umfasst die Elemente der Vektorrechnung, die analytische und graphische Statik des starren Körpers und der Systeme starrer Körper sowie des Seiles, die Festigkeitslehre des Balkens, die Dynamik des starren Körpers, lineare Schwingungen mit einem Freiheitsgrad, Stossprobleme sowie je ein Kapitel über Hydro- und Ähnlichkeitsmechanik. Der bewusste Verzicht auf strenge Systematik und die gestraffte Darstellung der weitergehenden Abschnitte erlauben dem Verfasser, trotz des umfangreichen Stoffes, die grundlegenden Teile in solcher Ausführlichkeit zu behandeln, dass das Buch für den Anfänger noch bequem lesbar ist. Das Verständnis der Theorie wird dem Lernenden auch durch die klaren Figuren und die zahlreichen interessanten Übungsaufgaben erleichtert.

H. Maag

**Astronautica Acta.** Offizielles Organ der Internationalen Astronautischen Föderation (Springer-Verlag, Wien); erscheint vierteljährlich; Jahresbezugspreis sFr. 37.20. Vol. I (1955), Fasc. 1: 60 S., 10 Abb. und 7 Tab.

Die Internationale Astronautische Föderation (IAF) hat ein erstes Heft ihres Publikationsorgans herausgegeben. Die vierteljährlich zu erscheinende Zeitschrift soll, laut der Zielsetzung der IAF, über die Forschungsergebnisse der nationalen astronautischen Gesellschaften berichten und dadurch – nach Möglichkeit – einer Koordinierung der Arbeiten dienen.

Nachdem die Astronautik aus dem Stadium der Phantasievorstellungen, über die Pionierarbeiten der Raketentechnik, immer mehr in das Feld der Realitäten rückt, zieht sie zunehmend grössere Forschungskreise in ihre Bahnen. Dem noch fernen Ziel – einer Raumfahrt – geht eine grosse Anzahl von Problemen und Aufgaben auf allen Gebieten der modernen Wissenschaften voraus, die bis in die Grundlagenforschung reichen. Vielerorts wird eine sehr seriöse Arbeit geleistet, wobei die erreichten Resultate nicht nur direkt der Astronautik dienen, sondern darüber hinaus ganz allgemein der Wissenschaft und der Technik zugute kommen.

Die vorliegende Publikation darf als Beweis dafür angesehen werden. Als Herausgeber und Fachbeirat zeichnen anerkannte Wissenschaftler und Fachleute aus verschiedenen Ländern. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. WERNHER VON BRAUN (Huntsville, USA.) über die Aussichten der Astronautik versehen, bringt das Heft zunächst eine Abhandlung «Die Erforschung der Initialvorgänge bei Verbrennungsprozessen» von Dr. IRENE SÄNGER-BREDT (Stuttgart, Deutsch-



land), S. 3–31. Darin wird der Mechanismus der exothermen Reaktionen bei einzelnen Molekülstößen betrachtet, die bisherigen experimentellen Verfahren zum Studium dieses Problems werden besprochen, und als Schlussfolgerung wird ein «Vorschlag zur Anwendung der Molekularstrahlmethode auf die Messung der Energietransformationen bei Reaktionsstößen» unterbreitet und begründet. – H. STRUGHOLD (Randolph Air Force Base, Texas, USA.) behandelt im Aufsatz «Space Equivalent Conditions Within the Earth's Atmosphere Physiological Aspects», S. 32–40, die physiologischen Fragen der Raumfahrt, wie zum Beispiel Sauerstoffmangel, Kochen der Körperflüssigkeiten, «Nullschwere», dann Auftreten kosmischer Strahlung, Einfall der Meteoriten usw. Diese Bedingungen wurden bei den heutigen Flügen bemannter Raketen bereits angetroffen und stellen somit ein aktuelles Problem dar. – Eine Optimalbetrachtung über die Richtungssteuerung des Raketenschubes zwecks maximaler Energiezunahme der Nutzlast enthält der Aufsatz von D. F. LAWREN (Birmingham, England) «Optimal Programming of Rocket Thrust Direction», S. 41–56. Die Raketenbewegung wird in der Atmosphäre unter Einwirkung des Schwerfeldes und im Vakuum behandelt. – Der letzte Beitrag, «Über den Nachweis von schweren Primären der kosmischen Strahlung mittels einer Farbstoffmethode», von Prof. Dr. J. EUGSTER (Universität Zürich, Schweiz) gibt eine interessante Neuerung aus der Messtechnik der kosmischen Strahlen bekannt, die es erlaubt, bei biologischen Untersuchungen die Photoplatten zu umgehen. – Neun weitere Berichte über Arbeiten auf den Gebieten der Raummechanik, der Verbrennungs- und Antriebsfragen, der kosmischen Strahlung und über die Meteoriten sind angekündigt.

Diese Publikation der IAF präsentiert sich in einer sorgfältigen und angenehm ansprechenden Form. Man möchte hoffen, dass sie die verdiente Beachtung findet und dass die weiteren Hefte ebensoviel interessantes Material enthalten werden.

*Zb. Plaskowski*

**The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures.** Von ALFRED M. FREUDENTHAL (John Wiley & Sons, New York 1950). 587 S., 191 Fig.; \$9.50.

Das unelastische Verhalten unserer Bau- und Werkstoffe gehört wohl zu denjenigen noch zu lösenden Problemen, in denen die in der Literatur geäußerten Auffassungen und Hypothesen besonders stark divergieren. Es ist deshalb ein Verdienst von Prof. M. FREUDENTHAL, in seinem Buche die verschiedenen «Theorien» im Gebiete der Plastizität und der Brucherscheinungen einschliesslich des Traglastverfahrens vergleichend dargestellt zu haben. Das Buch, das auf das technische Endziel der Tragwerksbemessung orientiert ist, kann beim heutigen Stand der Erkenntnisse selbstverständlich keine abschliessende Lösung des behandelten vielschichtigen Problemkomplexes geben, aber es stellt durch den gegebenen umfassenden Überblick ein wertvolles Hilfsmittel dar, von dem aus eine zukünftige Abklärung wesentlich gefördert werden kann.

*F. Stüssi*

**Magnetic Cooling.** Von C. G. B. GARRETT (Harvard University Press, John Wiley & Sons, Inc., New York 1954). X + 110 S., 13 Fig.; \$4.50.

In meist leicht zu lesender und flüssig geschriebener Form werden die Grundzüge von Theorie und Technik der Erzeugung von Temperaturen unter 1° Kelvin mittels magnetischer Kühlung dargestellt. Der beschränkte Umfang des Buches erlaubt natürlich nicht ein Eingehen auf Einzelheiten, speziell praktischer Natur; laufend angegebene Arbeiten der Fachliteratur erleichtern aber ein weiteres Eindringen in Detailfragen. Kapitel I illustriert die Gründe, die eine Forschung bei

tiefster Temperatur genau so berechtigt erscheinen lassen wie eine solche bei (biologisch) normalen oder sehr hohen Celsiusgraden. In Kapitel II wird die Technik, in Kapitel III die Thermodynamik magnetischer Kühlung besprochen. Kapitel IV diskutiert Messung von Temperaturen und spezifischer Wärme. Die Kapitel V und VI bringen als Hauptobjekt Theorie von und Messergebnisse an paramagnetischen Stoffen. Die beiden letzten schliesslich behandeln Kooperativ-effekte in paramagnetischen Salzen, verursacht durch Dipol-Dipol- und Austauschwechselwirkung, dann abschliessend und nur summarisch Eigenschaften des Heliums unterhalb  $1^{\circ}$  Kelvin, Supraleitfähigkeit in Metallen und Anwendung in der Kernphysik (Bestimmung von magnetischen Kernmomenten).

*W. Baumgartner*

**Handbook of Experimental Stress Analysis.** Herausgegeben von M. HÉTÉNYI (John Wiley & Sons, New York 1950). 1077 S.; \$15.—.

Die vorliegende Monographie über «Experimentelle Spannungsuntersuchung» ist ein «Vielmännerbuch», das dank einem durch den Herausgeber, Prof. M. HÉTÉNYI, geschickt aufgestellten Programm und durch vorzügliche Auswahl der zuständigen Mitarbeiter zu einem vorbildlichen Beispiel einer solchen technischen Anthologie über ein bestimmtes Fachgebiet geworden ist. In achtzehn Kapiteln und drei Anhängen werden die Grundlagen, Hilfsmittel und wichtigsten Ergebnisse der Versuchstechnik im Gebiete der Festigkeitslehre auf 1060 Seiten eingehend und umfassend dargestellt. Durch die Aufteilung des Stoffes auf die für die einzelnen Teilgebiete besonders ausgewiesenen und damit zuständigen Bearbeiter wird erreicht, dass alle wichtigen Einzelfragen des behandelten Stoffgebietes, das heute in seiner Vielfalt von einem Einzelnen kaum mehr beherrscht werden kann, entsprechend dem neuesten Stand der Erkenntnisse und der Technik behandelt sind. Der Reichtum des Inhalts sei durch einige Stichworte wenigstens angedeutet: nach einer Darstellung der mechanischen Eigenschaften von Bau- und Werkstoffen werden die wichtigsten Verfahren und Methoden der Materialprüfung, die mechanischen, optischen und elektrischen Verfahren der Spannungsmessung und die Grundzüge einer Beurteilung der Spannungszustände als Grundlage zur Bemessung der Tragwerke dargestellt. Im Anhang werden in drei Abschnitten die theoretischen Grundlagen der Modellmechanik sowie der Fehler- und Ausgleichsrechnung behandelt; ein eigentliches Kabinettstück ist die meisterhafte Darstellung der Grundzüge der Elastizitätstheorie durch den Altmeister der technischen Mechanik, S. TIMOSHENKO. Das hervorragende Buch wird ein unentbehrliches Nachschlagewerk werden für alle Ingenieure, die sich mit der Versuchsforschung im Gebiete der Festigkeitslehre beschäftigen.

*F. Stüssi*

**Ernst Abbe.** Von N. GÜNTHER (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH., Stuttgart 1951). 203 S., 21 Abb.; DM 9.80.

Das in der Sammlung «Grosse Naturforscher» in zweiter Auflage erschienene Buch vermittelt ein ausführliches und aufschlussreiches Lebensbild des grossen Physikers, Industrieunternehmers und zukunftsweisenden Soziologen.

Durch C. ZEISS, den Gründer der nachmaligen Weltfirma, wurde ABBE (1840–1905), damals Privatdozent für Mathematik in Jena, auf die optischen Probleme aufmerksam gemacht. Während die damalige Herstellung von Mikroskopen ausschliesslich auf langwierigen Versuchen beruhte, machte ABBE aus ihr eine Wissenschaft. Mit seiner Sinusbedingung und seiner beugungstheoretischen Erklärung der Bildentstehung schuf er die Grundlagen hierzu. Im Hinblick auf die möglichst weitgehende Beseitigung des sekundären Spektrums erschienen

Gläser mit bestimmten optischen Eigenschaften als besonders günstig. Da die Glashütten *ABBES* diesbezügliche Anregungen nicht beachteten, gründete er mit *O. SCHOTT* die Jenaer Glashütte *Schott & Gen.*, die bald führend wurde.

Aus der kleinen Mechanikerwerkstatt war inzwischen eine Weltfirma geworden. Nach dem Ableben von *C. ZEISS* und dem Ausscheiden seines Sohnes war *ABBE* praktisch alleiniger Inhaber der Zeiss-Werke. Durch Errichtung der Zeiss-Stiftung vermachte er jedoch schon zu Lebzeiten praktisch sein ganzes Vermögen dem Werk und der Universität Jena.

*R. Stettlev*

**Materie als Feld.** Von *F. HUND* (Springer-Verlag, Berlin 1954). 418 S., 40 Abb.; DM 48.–/52.–.

Das vorliegende Werk behandelt die Feldtheorie der Materie. Das partikelhafte Verhalten wird erst abgeleitet mit Hilfe der Quantentheorie. Der sonst übliche Weg vom Elementarteilchen zum Feld wird also umgekehrt durchlaufen. So ergibt sich manches Resultat auf eine ungewohnte und darum originelle Weise. Daraus sowie durch abgewogene Verteilung von Formalismus und physikalischer Durchleuchtung bringt das Buch ein wesentlich vertieftes Verständnis der mathematischen Formulierungsmöglichkeiten von Dingen wie Ladung, Spin, Atomismus usw. Besonderen Nutzen dürfte es als Parallel- oder kurz nachfolgende Lektüre beim Studium der bekannten Werke über die Quantentheorie der Wellenfelder haben.

Ausgehend vom elektromagnetischen Feld als Vorlage wird das anschauliche Wellenbild der Materie besprochen. Das unanschauliche des Wellenbildes, die Partikel, ergibt sich bei der nachfolgenden Besprechung der Quantelung. Anschliessend folgt Diskussion von Spin und Kopplung verschiedener Materiefelder. Zuletzt werden die verschiedenen Teilchensorten und ihre Umwandlung ineinander studiert. Als Einführung tritt das Buch nicht auf Fragen und neue Ergebnisse der Theorie (Divergenzschwierigkeiten, Renormierung) ein. *W. Baumgartner*

**Probleme der Plastizitätstheorie.** Von *W. PRAGER* (Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1955). 100 S., 52 Abb.; Fr. 12.50.

Das Buch stellt die Niederschrift von Gastvorlesungen dar, die der Verfasser im Wintersemester 1954/55 an der ETH über ausgewählte Probleme der Plastizitätstheorie gehalten hat. Die Auswahl des Stoffes war dabei zum einen Teil durch das Forschungsinteresse des Vortragenden, zum anderen durch seinen Wunsch bestimmt, Überschneidungen mit an der ETH vertretenen Forschungsrichtungen zu vermeiden.

Im ersten Abschnitt werden kinematische Modelle entwickelt, welche das Verhalten der verschiedenen Formen des ideal-plastischen Stoffes anschaulich zu verfolgen und die Theorie des plastischen Potentials geometrisch zu interpretieren gestatten.

Im zweiten Abschnitt werden als einfache Beispiele elastisch-plastische Fachwerke diskutiert und an ihnen die Extremalprinzipien der Plastizitätstheorie sowie die Begriffe der Tragfähigkeit und des Anpassungsvermögens entwickelt.

Der dritte Abschnitt ist dem Traglastverfahren gewidmet. Zunächst werden die beiden Fundamentaltheoreme, auf denen es beruht, in aller Allgemeinheit abgeleitet. Sodann wird an verschiedenen Beispielen (Rahmen, Platten, Zylinderschalen) gezeigt, wie mit ihrer Hilfe die Traglast eingeschränkt werden kann.

Im letzten Abschnitt behandelt der Verfasser endliche plastische Formänderungen. Dabei werden vor allem ebene Fliessvorgänge und ihre Behandlung durch gleichzeitige Konstruktion in der physikalischen, der Spannungs- und der



Geschwindigkeitsebene erläutert, wobei besondere Sorgfalt auf die Bedingung positiver Dissipationsleistung gelegt wird. Als Beispiele werden stationäre (Ziehprozesse) und pseudostationäre Vorgänge (Eindringen eines Keils in den plastischen Halbraum) besprochen.

Das Buch ist elementar geschrieben und bei aller grundsätzlichen Schärfe stets auf die praktischen Anwendungen hin ausgerichtet. Es gibt einen ausgezeichneten Überblick über die technischen Möglichkeiten, die uns heute schon zur Verfügung stehen. Besondere Erwähnung verdient die sorgfältige Dokumentation, die indessen nicht darüber hinwegzutäuschen vermag, dass zahlreiche entscheidende Beiträge (in einigen Fällen hier erstmals publiziert) dem Verfasser zu verdanken sind.

H. Ziegler

**An Introduction to Electronic Analogue Computers.** Von C. A. A. WASS (Pergamon Press Ltd., London 1955). 237 S., 149 Fig.; 40 s.

Das Buch befasst sich hauptsächlich mit elektronischen Integrieranlagen und ihrer Anwendung bei der Lösung («simulation») von Schwingungsproblemen. Hauptteil einer solchen Anlage ist ein in vielen Exemplaren vorhandener Gleichstromverstärker, der als Integrator oder als Addierglied geschaltet werden kann. Für diesen Verstärker sind zahlreiche Ausführungsformen gegeben, und das schwierige Problem der Stabilisierung ist einlässlich behandelt. Für die Multiplikation und die Erzeugung von Funktionen sind verschiedene elektronische und elektromechanische Methoden erläutert. Eine Anzahl von Anwendungsbeispielen und eine Beschreibung einiger bestehender Rechenanlagen ergänzen das Buch, dessen Studium für Erbauer wie für Benutzer von Analogierechengeräten lohnend ist.

A. P. Speiser

**Ricci-Calculus.** An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications. 2. Auflage. Von J. A. SCHOUTEN (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1954 [Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 10]). XX + 516 S., 16 Fig.; 58.60 DM.

Die erste Auflage von SCHOUTENS *Ricci-Kalkül* erschien vor gut dreissig Jahren. Seither hat diese Methode – weitgehend auch durch die zahlreichen Untersuchungen des Verfassers selbst – einen viel grösseren Anwendungsbereich gefunden und manche Verfeinerungen erfahren, so dass die zweite Auflage zu einem vollständig neuen Buch geworden ist, das den mannigfachen Fortschritten Rechnung trägt. Es ist hier nicht möglich, auf alle Änderungen und Neuerungen einzugehen. Um einen Überblick über den Inhalt des Bandes zu geben, seien wenigstens die Kapitelüberschriften angegeben. I. Algebraic preliminaries. II. Analytic preliminaries. III. Linear connexions. IV. Lie groups and linear connexions. V. Imbedding and curvature. VI. Projective and conformal transformations of connexions. VII. Variations and deformations. VIII. Miscellaneous examples.

Diese Einführung ist ein glänzendes Lehrbuch des Ricci-Kalküls in seiner modernen Form. Die Formulierung ist knapp und klar, die Bezeichnungen sind äusserst übersichtlich, und konsequent wird die Kern-Index-Symbolik verwendet. Dem Buch ist als eine sehr wertvolle Ergänzung ein eingehendes, wenn auch nicht vollständiges (was fast nicht mehr möglich ist) Literaturverzeichnis von fast 100 Seiten mit gegen 1400 Titeln beigelegt. Schliesslich verdient auch der sorgfältige und übersichtliche Druck besonders hervorgehoben zu werden, denn bei der grossen Zahl von Indizes stellt dies ganz erhebliche Anforderungen. – Damit wurde vom Verfasser wieder ein modernes Standardwerk über den Ricci-Kalkül geschaffen, das eine erhebliche Lücke in der Literatur ausfüllt und die besten Dienste leisten wird.

E. Roth-Desmeules

# Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen

Von HANS-RUDOLF SCHWARZ, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung und Problemstellung

Zahlreiche technische Fragen führen auf das mathematische Problem, für das Matrizen-Eigenwertproblem  $(A - \lambda E)x = 0$  die Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil zu bestimmen, wobei die Eigenwerte selbst meistens gar nicht interessieren. Diese Problemstellung nennt man kurz die Stabilitätsfrage. Um diese zu beantworten, sind verschiedene klassische Kriterien bekannt, welche aber alle vom charakteristischen Polynom  $P(\lambda)$  ausgehen, also bedingen, dass dasselbe explizit ermittelt wird. So erwähne ich die Kriterien von ROUTH [1]<sup>2)</sup> und HURWITZ [2], welche in ihrer ursprünglichen Formulierung auf Polynome mit reellen Koeffizienten Anwendung finden, im übrigen aber gleichbedeutend sind. Das Ortskurvenkriterium von NYQUIST [3] bestimmt auf graphischem Weg die Anzahl der Nullstellen der charakteristischen Gleichung  $P(\lambda) = 0$  mit negativem Realteil. Eine unmittelbare Folge davon ist das Lagen- oder Lücken-kriterium [4], welches aussagt, dass dann und nur dann sämtliche Nullstellen von  $P(\lambda) = 0$  negative Realteile aufweisen, wenn die Wurzeln von Real- und Imaginärteil von  $P(iy) = \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y)$  reell sind und sich gleichzeitig gegenseitig trennen. Das bekannteste numerische Verfahren zur Beantwortung der Stabilitätsfrage dürfte wohl die Methode der Sturmschen Kette [5] sein, wonach aus dem Real- und Imaginärteil von  $P(iy) = \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y)$  durch fortgesetzte Division mit Rest eine Folge von Polynomen absteigenden Grades gebildet wird. Die Anzahl der Eigenwerte in der linken komplexen Halbebene  $\operatorname{Re} z < 0$  lässt sich dann aus dem Unterschied der Zeichenwechsel in der Polynomfolge für  $y = -\infty$  und  $y = +\infty$  angeben. Damit äquivalent ist das Stabilitätskriterium von WALL [6], welches die Aussage in die Form eines Kettenbruches kleidet. Daneben finden sich in der Literatur einerseits noch verschiedene numerische Verfahren, welche vermittels eines Reduktionsprozesses aus dem charakteristischen Polynom eine Folge von Polynomen bestimmen, aus denen die Frage beantwortet werden kann, und anderseits auch einige graphische Methoden.

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 500.

Auf der andern Seite führt jedes gangbare numerische Verfahren zur expliziten Entwicklung des charakteristischen Polynoms von  $(A - \lambda E) x = 0$  auf eine Folge von Polynomen, deren Grad sich bei jedem Schritt um 1 erhöht und die mit dem charakteristischen Polynom endigt. Ich verweise auf das Verfahren von WEBER-VOETTER [7], auf die Methode von HESSENBERG [8] und den Biorthogonalisierungsprozess von LANCZOS [9], welche alle über eine Reihe von Polynomen aufsteigenden Grades zum charakteristischen Polynom führen.

Um dann die allein interessierende Stabilitätsfrage beantworten zu können, muss eine Polynomfolge absteigenden Grades ermittelt werden. Um den Weg über eine aufsteigende und dann über eine absteigende Kette von Polynomen zu vermeiden, in welcher das charakteristische Polynom als solches von höchstem Grad meist gar nicht interessiert, gab mir Herr Professor Dr. E. STIEFEL (ETH) die Anregung, folgende Frage zu untersuchen:

*Problem: Man berechne das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  aus der Matrix  $A$  über eine solche aufsteigende Kette von Polynomen, aus welcher schon selbst die Stabilitätsfrage beantwortet werden kann.*

Dieser Wunsch führte zu einem Verfahren, unter Umgehung des charakteristischen Polynoms die gegebene Matrix  $A$  mit Hilfe von elementaren Transformationen auf eine Normalform zu bringen, deren Elemente allein schon das Stabilitätsproblem lösen. Die beschriebene Methode weist den Vorteil auf, dass die anzuwendenden Rechenoperationen von grosser Einheitlichkeit sind, was das Programmieren auf Rechenautomaten erleichtert. Bei der klassischen Methode der Sturmschen Kette stützt sich die ganze Entscheidung der Stabilität auf eine längere Rechnung, welche vom charakteristischen Polynom ausgeht. Die Koeffizienten dieses Polynoms enthalten sicher weniger Information als die ursprünglich gegebenen Matrixelemente. Es ist zu hoffen, dass unsere Methode, die die Matrixelemente in mehr direkter Weise verwendet, in manchen Fällen numerisch stabiler verläuft. Ob diese Hoffnung berechtigt ist, können allerdings erst umfangreichere Versuche entscheiden.

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren Dr. E. STIEFEL und Dr. H. RUTISHAUSER, die mit ihren wertvollen Hinweisen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, meinen besten Dank aussprechen.

## I. Das Stabilitätskriterium

### 2. Das Kettenbruchkriterium von WALL [6]

Es sei  $P(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit komplexen Koeffizienten  $c_k = p_k + i q_k$ . Aus diesem bilde man  $Q(z) = [P(z) - (-1)^n P(-z)]/2$ , worin  $P(z)$  das Polynom mit den konjugiert



komplexen Koeffizienten  $\bar{c}_k = p_k - i q_k$  bedeutet. Dann ist

$$Q(z) = p_{n-1} z^{n-1} + i q_{n-2} z^{n-2} + p_{n-3} z^{n-3} + i q_{n-4} z^{n-4} + \dots,$$

und der Quotient  $Q(z)/P(z)$  hat im allgemeinen eine Kettenbruchentwicklung von folgender Form mit in  $z$  linearen Teilennern:

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1}{r_1 z + s_1 + 1} + \frac{1}{r_2 z + s_2} + \frac{1}{r_3 z + s_3} + \dots + \frac{1}{r_n z + s_n}. \quad (2.1)$$

**Satz 1** (Kriterium von WALL): Existiert die Kettenbruchentwicklung (2.1) von  $Q(z)/P(z)$ , so sind darin die Grössen  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) reell und von Null verschieden, die  $s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rein imaginär oder null. Sind dann unter den  $r_k$   $m$  positiv und  $(n - m)$  negativ, so haben  $m$  der Wurzeln von  $P(z) = 0$  negative und  $(n - m)$  positive Realteile.

Die Teilnenner in (2.1) ergeben sich durch fortgesetzte Division mit Rest nach dem euklidischen Algorithmus für  $P(z)$  und  $Q(z)$ . So ist speziell für den ersten Teilnenner

$$P(z) = (r_1 z + s_1 + 1) Q(z) + R_1(z) \quad (2.2)$$

und nach Subtraktion von  $Q(z)$  auf beiden Seiten

$$P(z) - Q(z) = (r_1 z + s_1) Q(z) + R_1(z). \quad (2.3)$$

Da der Rest  $R_1(z)$  in (2.2) und (2.3) gleich ist, lautet die Kettenbruchentwicklung von  $Q(z)/[P(z) - Q(z)]$

$$\frac{Q(z)}{P(z) - Q(z)} = \frac{1}{r_1 z + s_1} + \frac{1}{r_2 z + s_2} + \frac{1}{r_3 z + s_3} + \dots + \frac{1}{r_n z + s_n} \quad (2.4)$$

mit denselben  $r_k, s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) wie in (2.1). Demnach gilt der zu Satz 1 äquivalente

**Satz 2:** Existiert die Kettenbruchentwicklung (2.4) für den Quotienten  $Q(z)/[P(z) - Q(z)]$ , so sind darin die Grössen  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) reell und von Null verschieden, die  $s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rein imaginär oder null. Die Anzahl der positiven  $r_k$  ist dann gleich der Anzahl der Wurzeln von  $P(z) = 0$  mit negativem Realteil.

Die Teilnenner  $(r_k z + s_k)$  in (2.4) berechnen sich nach dem euklidischen Algorithmus für  $f_0(z) = P(z) - Q(z)$  und  $f_1(z) = Q(z)$ . Es ist

$$\left. \begin{aligned} f_0(z) &= P(z) - Q(z) \\ &= z^n + i q_{n-1} z^{n-1} + p_{n-2} z^{n-2} + i q_{n-3} z^{n-3} + p_{n-4} z^{n-4} + \dots, \\ f_1(z) &= Q(z) = p_{n-1} z^{n-1} + i q_{n-2} z^{n-2} + p_{n-3} z^{n-3} + i q_{n-4} z^{n-4} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$



mit reellen Koeffizienten  $A_{k, k+j}$  mit  $A_{k, k} \neq 0$  wie folgt bilden:

$$\left. \begin{aligned} F_k(y) &= A_{k, k} y^{n-k} + A_{k, k+1} y^{n-k-1} + \dots + A_{k, n-1} y + A_{k, n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} A_{k, k+j} y^{n-k-j} \quad (k = 0, 1, \dots, n), \\ F_0(y) &= (R_1 y - S_1) F_1(y) - F_2(y), \\ F_1(y) &= (R_2 y + S_2) F_2(y) - F_3(y), \\ &\dots \dots \dots \\ F_{k-1}(y) &= (R_k y - S_k) F_k(y) - F_{k+1}(y) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ &\dots \dots \dots \\ F_{n-1}(y) &= (R_n y - S_n) F_n(y). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Für das folgende treffen wir die

*Voraussetzung: Die Sturmsche Kette für das Polynom  $P(z)$  existiert in der Form (3.1), wobei die Quotienten  $(R_k y + S_k)$  bei der fortgesetzten Division mit Rest linear seien.*

Dann gilt bekanntlich

**Satz 3:** Existiert die Kette (3.1), so ist die Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $P(z) = 0$  mit negativem Realteil  $N = (n - l - m)/2$ , wobei  $(l - m)$  der Unterschied in der Zahl der Zeichenwechsel in der Sturmschen Kette  $F_0(y), F_1(y), \dots, F_{n-1}(y), F_n(y)$  für  $y = -\infty$  und  $y = +\infty$  ist.

Darin ist  $l$  die Gesamtzahl der Verluste und  $m$  die Gesamtzahl der Gewinne an Zeichenwechseln in der Kette (3.1) beim Durchlaufen der imaginären Achse von  $-i\infty$  nach  $+i\infty$ . Diese Werte lassen sich aus den Koeffizienten  $A_{k, k}$  bzw. aus den Quotienten  $R_k = A_{k-1, k-1}/A_{k, k}$  ohne weiteres angeben. Betrachtet man  $F_{k-1}(y)$  und  $F_k(y)$ , so hat man bezüglich dieser beiden Glieder in der Kette hinsichtlich Zeichenwechsel folgende Situation:

$$\operatorname{sgn} R_k = \begin{cases} +1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } y = -\infty \quad 1 \text{ Zeichenwechsel} \\ \text{für } y = +\infty \quad 0 \text{ Zeichenwechsel} \end{array} \right\} \quad 1 \text{ Verlust,} \\ -1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } y = -\infty \quad 0 \text{ Zeichenwechsel} \\ \text{für } y = +\infty \quad 1 \text{ Zeichenwechsel} \end{array} \right\} \quad 1 \text{ Gewinn.} \end{cases}$$

Somit ist die Gesamtzahl der Verluste  $l$  an Zeichenwechseln gleich der Anzahl der positiven  $R_k$  und die Zahl der Gewinne  $m$  gleich der Anzahl der negativen

$R_k$ . Wenn  $F_0(y)$  und  $F_1(y)$  teilerfremd sind, die fortgesetzte Division mit Rest wirklich mit  $F_n(y) = \text{const} \neq 0$  endigt, so ist  $n = l + m$  und demnach

$$N = \frac{(l + m + l - m)}{2} = l,$$

also folgt aus Satz 3:

**Satz 4:** Die Anzahl  $N$  der Nullstellen von  $P(z) \neq 0$  mit negativem Realteil ist gleich der Anzahl der positiven  $R_k$  in der Kette (3.1).

Für die Polynome  $F_0(y)$  und  $F_1(y)$  ergeben sich:

1. Fall:  $n = 4k$  oder  $n = 4k + 1$  ( $k$  ganz)

$$\left. \begin{aligned} F_0(y) &= y^n + q_{n-1}y^{n-1} - p_{n-2}y^{n-2} - q_{n-3}y^{n-3} + p_{n-4}y^{n-4} + \dots, \\ F_1(y) &= p_{n-1}y^{n-1} + q_{n-2}y^{n-2} - p_{n-3}y^{n-3} - q_{n-4}y^{n-4} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

2. Fall:  $n = 4k + 2$  oder  $n = 4k + 3$  ( $k$  ganz)

$$\left. \begin{aligned} F_0^*(y) &= -y^n - q_{n-1}y^{n-1} + p_{n-2}y^{n-2} + q_{n-3}y^{n-3} - p_{n-4}y^{n-4} - \dots = -F_0(y), \\ F_1^*(y) &= -p_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} + p_{n-3}y^{n-3} + q_{n-4}y^{n-4} - \dots = -F_1(y). \end{aligned} \right\}$$

Da  $F_0^*(y) = -F_0(y)$  und  $F_1^*(y) = -F_1(y)$  ist, so unterscheiden sich die Ketten  $F_k^*(y)$  und  $F_k(y)$  nur durch das Vorzeichen; es ist  $F_k^*(y) = -F_k(y)$ , aber  $R_k^* = R_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Deshalb kann die Zerlegung von  $P(z)$  in  $F_0(y)$  und  $F_1(y)$  unabhängig von  $n$  in der ersten Form (3.2) geschehen. Für die Koeffizienten  $R_k, S_k, A_{k,k+j}$  ( $k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n-k$ ) bestehen die folgenden Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned} A_{k-1,k-1} : A_{k,k} &= R_k, \quad (A_{k-1,k} - R_k A_{k,k+1}) : A_{k,k} = S_k \\ (k &= 1, 2, \dots, n), \\ -A_{k-1,k+1+j} + S_k A_{k,k+1+j} + R_k A_{k,k+2+j} &= A_{k+1,k+1+j} \\ (k &= 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, n-k-1; \text{ mit } A_{k,n+1} = 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Die Anfangsbedingungen dazu lauten nach (3.2):

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= 1, \quad A_{01} = q_{n-1}, \quad A_{02} = -p_{n-2}, \quad A_{03} = -q_{n-3}, \quad A_{04} = p_{n-4}, \dots, \\ A_{11} &= p_{n-1}, \quad A_{12} = q_{n-2}, \quad A_{13} = -p_{n-3}, \quad A_{14} = -q_{n-4}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann nun gezeigt werden, dass Satz 2 und damit Satz 1 eine Folge von Satz 4 ist.

*Voraussetzung:* Die Sturmsche Kette in der Form (3.1) für  $P(z)$  existiert.

*Behauptung:* Die Kettenbruchentwicklung (2.4) von  $Q(z)/P(z) = Q(z)^{-1}$  existiert, und es gilt

$$\left. \begin{aligned} a_{k, k+j} &= i^j A_{k, k+j} \quad (k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n-k), \\ r_k &= R_k, \quad s_k = i S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

### Beweis

*Induktionsannahme:* Die Behauptung (3.5) sei richtig für  $k \leq m \leq 1$ .

*Induktionsschluss:* Gemäss Rekursionsformel (2.7) ist für  $k = m$ :

$$a_{m+1, m+1+j} = a_{m-1, m+1+j} - s_m a_{m, m+1+j} - r_m a_{m, m+2+j} \quad (0 \leq j \leq n-m-1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dies einerseits

$$\begin{aligned} &= i^{j+2} A_{m-1, m+1+j} - i S_m i^{j+1} A_{m, m+1+j} - R_m i^{j+2} A_{m, m+2+j}, \\ &= i^j (-A_{m-1, m+1+j} + S_m A_{m, m+1+j} + R_m A_{m, m+2+j}), \end{aligned}$$

und anderseits infolge (3.3)

$$a_{m+1, m+1+j} = i^j A_{m+1, m+1+j} \quad (j = 0, 1, \dots, n-m-1).$$

Weiter schliesst man analog unter Verwendung des letzten Resultates für  $j = 0, 1$ :

$$\begin{aligned} r_{m+1} &= a_{m, m} : a_{m+1, m+1} = A_{m, m} : A_{m+1, m+1} = R_{m+1}, \\ s_{m+1} &= (a_{m, m+1} - r_{m+1} a_{m+1, m+2}) : a_{m+1, m+1}, \\ &= (i A_{m, m+1} - R_{m+1} i A_{m+1, m+2}) : A_{m+1, m+1} = i S_{m+1}. \end{aligned}$$

*Induktionsverankerung:* Für  $k = 0$  und  $k = 1$  liest man die Beziehungen  $a_{0j} = i^j A_{0j}$ ,  $a_{11+j} = i^j A_{11+j}$  direkt aus den Anfangsbedingungen (2.8) und (3.4) ab, und es folgt daraus, dass für  $k = 1$

$$\begin{aligned} r_1 &= a_{00} : a_{11} = A_{00} : A_{11} = R_1, \\ s_1 &= (a_{01} - r_1 a_{12}) : a_{11} = (i A_{01} - R_1 i A_{12}) : A_{11} = i S_1 \end{aligned}$$

ist. Nach Voraussetzung über die Existenz der Sturmschen Kette (3.1) sind die  $R_k \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), und deshalb sind auch die  $r_k \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), das heisst, die Kettenbruchentwicklungen (2.4) und (2.1) existieren und die  $r_k$  sind reell und von Null verschieden. Da die  $S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) reell sind aber eventuell verschwinden können, sind die  $s_k = i S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rein imaginär oder auch null. Infolge der Gleichheit  $r_k = R_k$  decken sich die Aussagen

über die Anzahl der Wurzeln von  $P(z) \neq 0$  mit negativem Realteil in den Sätzen 1 und 4, so dass damit der Beweis von Satz 1 mit Hilfe des Satzes über die Sturmsche Kette erbracht ist.

#### 4. Folgerung aus dem Kettenbruchkriterium

*Voraussetzung:* Die Entwicklung von  $Q(z)/P(z)$  in einen Kettenbruch (2.1) existiert.

*Folgerungen:* Nach Satz 1 sind die Grössen  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) von Null verschieden. Deshalb lässt sich auf den Kettenbruch (2.1) eine Äquivalenztransformation ausführen, indem der  $k$ -te Teilbruch mit  $-1/r_k$  erweitert wird:

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \cfrac{-1/r_1}{-z - \frac{s_1}{r_1} - \frac{1}{r_1}} + \cfrac{1/r_1 r_2}{-z - \frac{s_2}{r_2}} + \cfrac{1/r_2 r_3}{-z - \frac{s_3}{r_3}} + \dots + \cfrac{1/r_{n-1} r_n}{-z - \frac{s_n}{r_n}}. \quad (4.1)$$

Setzt man dann

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r_1} &= a_1, & \frac{1}{r_{k-1} r_k} &= a_k \quad (k = 2, 3, \dots, n), \\ & & -\frac{s_k}{r_k} &= b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

so sind die  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) reell und von Null verschieden, die  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rein imaginär oder eventuell null und man erhält für (4.1)

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \cfrac{a_1}{a_1 + b_1 - z} + \cfrac{a_2}{b_2 - z} + \cfrac{a_3}{b_3 - z} + \dots + \cfrac{a_n}{b_n - z}. \quad (4.3)$$

Gemäss dem Determinantensatz über die Näherungszähler und Näherungsnenner eines Kettenbruches ist  $P(z)$  als  $n$ -ter Näherungsnenner von (4.3) gleich folgender Determinante:

$$P(z) = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 - z & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 - z & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_3 - z & a_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_4 - z & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} - z & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n - z \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Aus (4.4) ist ersichtlich, dass  $P(z)$  das charakteristische Polynom des Eigenwertproblems  $(N - zE)x = 0$  ist, wobei die Matrix  $N$  folgende spezielle Jaco-



bische Form aufweist:

$$N = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} . \tag{4.5}$$

In der Matrix  $N$  sind die Grössen  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) reell und von Null verschieden, die  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rein imaginär oder null.

Übertragung des Kriteriums von Wall auf die Matrix  $N$ : Die Stabilitätsfrage kann nach (4.2) allein aus dem Realteil  $a_1$  des ersten Elementes in der Hauptdiagonalen und den reellen Elementen  $a_k$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ) in der oberen begleitenden Diagonalen beantwortet werden. Nach (4.2) gelten:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{a_1}, \quad r_2 = \frac{1}{r_1 a_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad r_3 = \frac{1}{r_2 a_3} = -\frac{a_2}{a_1 a_3}, \\ &\dots \\ r_k &= \begin{cases} -\frac{a_1 a_3 a_5 \dots a_{k-1}}{a_2 a_4 a_6 \dots a_k} & (k \text{ gerade}) \\ -\frac{a_2 a_4 a_6 \dots a_{k-1}}{a_1 a_3 a_5 \dots a_k} & (k \text{ ungerade}) \end{cases} \quad (k = 2, 3, \dots, n), \end{aligned}$$

und es ist somit

$\operatorname{sgn} r_k = -\operatorname{sgn} (a_1 a_2 a_3 \dots a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) .$

(4.6)

Demnach folgt aus Satz 1:

**Satz 5:** Die Zahl der positiven Glieder in der Folge von Produkten  $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$  ergibt die Anzahl der Eigenwerte von  $(N - z E) x = 0$  mit positiven Realteilen.

Schlussfolgerung: Das gestellte Problem, das charakteristische Polynom einer gegebenen Matrix  $A$  mit komplexen Elementen vermittelt einer Kette von solchen Polynomen zu ermitteln, welche die Stabilitätsfrage beantworten kann, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, die Matrix  $A$  mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation in die Normalform  $N$  überzuführen.

Im zweiten Teil wird gezeigt werden, dass diese Transformation im allgemeinen durchführbar ist. Dabei erweist es sich als zweckmässig, die Normalform  $N$  an der Nebendiagonalen zu spiegeln und die Bezeichnung leicht zu

ändern. Es seien

$$B = \left\| \begin{array}{ccccccc} i b'_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & i b'_{22} & b_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i b'_{33} & b_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i b'_{n-1 n-1} & b_{n-1 n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n n} + i b'_{n n} \end{array} \right\| \quad (4.7)$$

bzw. im reellen Fall

$$B = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1 n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n n} \end{array} \right\| \quad (4.8)$$

die Normalformen der transformierten, zu  $A$  äquivalenten Matrix, worin die  $b_{k, k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) und  $b_{n n}$  reell und von Null verschieden sind, während die  $b'_{k k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) in (4.7) reell aber nicht von Null verschieden sein müssen. An Stelle von Satz 5 lässt sich dann folgender Satz formulieren:

**Satz 6** (Stabilitätskriterium für Matrizen): Wenn es gelingt, eine gegebene Matrix  $A = (a_{jk})$  mit komplexen Elementen  $a_{jk}$  mittels einer Ähnlichkeitstransformation in die Form (4.7), bzw. (4.8) bei reeller Matrix  $A$ , überzuführen, dann ist die Zahl der positiven Glieder in der Folge von Produkten  $b_{n n}, b_{n n} b_{n-1 n}, b_{n n} b_{n-1 n} b_{n-2 n-1}, \dots, b_{n n} b_{n-1 n} \dots b_{23} b_{12}$  gleich der Anzahl der Eigenwerte von  $A$  mit positiven Realteilen. Sind speziell alle Elemente  $b_{12}, b_{23}, \dots, b_{n-1 n}, -b_{n n}$  positiv, so haben alle Eigenwerte negative Realteile.

## II. Methode der Transformation

### 5. Elemente der Transformation

Die Grundidee der Transformation besteht darin, durch geeignete Wahl und Reihenfolge von möglichst einfachen Ähnlichkeitstransformationen in endlich vielen Schritten sukzessive die gewünschte Normalform zu gewinnen, indem in jedem einzelnen Schritt ein Element der Matrix behandelt wird.

Einerseits bewirkt ja Multiplikation mit einer Diagonalmatrix  $T$  von links  $TA$  in  $A$  eine Multiplikation der Zeilen mit den entsprechenden Diagonalele-

menten von  $T$ , und Multiplikation von rechts  $AT$  eine entsprechende Multiplikation der einzelnen Kolonnen von  $A$ . Andererseits bewirkt ja Multiplikation mit einer nicht Diagonalgestalt aufweisenden Matrix  $T$  von links  $TA$  in  $A$  eine lineare Zeilenkombination und Multiplikation von rechts  $AT$  eine lineare Kombination der Kolonnen. Als einfachste Gestalt wird  $T$  für einen Schritt einer Ähnlichkeitstransformation  $TAT^{-1}$  entweder als Diagonalmatrix so gewählt werden, dass nur je eine Zeile und eine Kolonne in  $A$  verändert wird, oder als Nichtdiagonalmatrix so, dass nur zwei bestimmte Zeilen und Kolonnen miteinander kombiniert werden.

*Typus A: T ist Diagonalmatrix*

Es sei

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.1)$$

wo  $1/\alpha$  in  $T$ , bzw.  $\alpha$  in der Inversen  $T^{-1}$ , in der  $j$ -ten Zeile und  $j$ -ten Kolonne an Stelle von 1 steht. Eine Ähnlichkeitstransformation  $TAT^{-1}$  mit einer solchen Matrix werde im folgenden mit

$(T_j; \alpha)$

bezeichnet und hat auf  $A$  folgende Wirkung:

*Division der  $j$ -ten Zeile durch  $\alpha$  und Multiplikation der  $j$ -ten Kolonne mit  $\alpha$ .*

*Typus B: T ist Nichtdiagonalmatrix*

Es sei

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.2)$$

wo  $\alpha$  in  $T$ , bzw.  $-\alpha$  in  $T^{-1}$ , in der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Kolonne steht. Die Matrix  $T$ , von links multipliziert  $TA$ , addiert in  $A$  zur  $j$ -ten Zeile das  $\alpha$ -fache der  $k$ -ten Zeile und die Matrix  $T^{-1}$ , von rechts multipliziert  $AT^{-1}$ , subtrahiert in  $A$  von der  $k$ -ten Kolonne das  $\alpha$ -fache der  $j$ -ten Kolonne. Demnach bedeutet eine Ähnlichkeitstransformation  $TAT^{-1}$  mit einer Matrix  $T$  von diesem Typus:

Man addiere zunächst zur  $j$ -ten Zeile von  $A$  das  $\alpha$ -fache der  $k$ -ten Zeile und subtrahiere dann von der  $k$ -ten Spalte das  $\alpha$ -fache der  $j$ -ten Spalte, oder auch in umgekehrter Reihenfolge.

Eine solche Umformung kann als «zweidimensionale» Transformation bezeichnet werden und sei im folgenden durch

$$(T_{jk}; \alpha)$$

dargestellt, indem die Indizes die Position von  $\alpha$  in der dazugehörigen Matrix  $T$  und damit die zu ändernde Zeile ( $j$ ) und Kolonne ( $k$ ) sowie ihre Kombination kennzeichnen.

Versucht man nun, die Transformation auf die Normalform mit Hilfe dieser beiden Typen von Umformungen durchzuführen, so erkennt man bald, dass sie im wesentlichen in zwei Hauptabschnitte zerfällt: Im ersten Teil werden die Elemente unterhalb der Diagonalen behandelt, während im zweiten Teil die Elemente oberhalb und in der Diagonalen auf die gewünschte Form transformiert werden.

## 6. Umformung der Matrix unterhalb der Hauptdiagonalen

In diesem Abschnitt sei die Aufgabe gestellt, die gegebene Matrix  $A = (a_{jk})$  mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf die nachstehende Form zu bringen:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \cdots & p_{1n} \\ -1 & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \cdots & p_{2n} \\ 0 & -1 & p_{33} & p_{34} & \cdots & p_{3n} \\ 0 & 0 & 1 & p_{44} & \cdots & p_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Dieses Problem ist allerdings bereits gelöst durch das Verfahren von HESSENBERG [8]. Doch beschreibe ich hier zur Vereinheitlichung der ganzen Transformation einen andern Weg.

*Bezeichnungsweise:* Zur Vereinfachung werden die Elemente der umgeformten Matrix immer wieder mit  $a_{jk}$  bezeichnet, das heisst, es sei  $a_{jk}$  der Wert des Elementes in der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Kolonne, wie er sich nach der beendeten letzten Umformung ergeben hat.

Die Transformation der Matrix unterhalb der Diagonalen kann gemäss nachstehender Vorschrift geschehen:

**Regel 1:** *Beginnend mit der ersten Kolonne und von Kolonne zu Kolonne bis zur zweitletzten fortgehend, führe man für die  $k$ -te Spalte ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) folgende Umformungen aus:*

a) *Um in der  $(k+1)$ -ten Zeile eine  $-1$  zu erhalten, wende man die Transformation  $(T_{k+1}; -a_{k+1, k})$  an;*

b) *die Elemente  $a_{jk}$  ( $j = k+2, k+3, \dots, n$ ) werden dann mit Hilfe der zweidimensionalen Transformationen  $(T_{j, k-1}; a_{jk})$  zum Verschwinden gebracht.*

Dass die Regel 1 den gewünschten Erfolg hat, zeige ich folgendermassen:

*Voraussetzung:* Die Elemente, durch welche dividiert werden muss, seien von Null verschieden.

*Behauptung:* Die Matrix  $A = (a_{jk})$  mit komplexen Elementen  $a_{jk}$  lässt sich unter Anwendung der Regel 1 auf die Form (6.1) transformieren.

### Beweis

*Induktionsannahme:* Die ersten  $m-1$  Kolonnen weisen bereits die gewünschte Form auf, und es seien also

$$a_{k+1, k} = -1, \quad a_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = k+2, k+3, \dots, n.$$

*Induktionsschluss:* Anwendung der Regel 1 für  $k = m$ .

a) Nach Voraussetzung sei  $a_{m+1, m} \neq 0$ ; die Transformation  $(T_{m+1}; -a_{m+1, m})$  kann ausgeführt werden. Danach wird zuerst die  $(m+1)$ -te Zeile durch  $-a_{m+1, m}$  dividiert, wodurch in den ersten  $(m-1)$  Kolonnen nichts geändert wird, da ja  $a_{m+1, k} = 0$  ist für  $k = 1, 2, \dots, m-1$ ; in der  $m$ -ten Kolonne wird  $a_{m+1, m}$  zu  $-1$  und in den folgenden Kolonnen werden die Elemente  $a_{m+1, k}$  mit  $k = m+1, m+2, \dots, n$  verändert. Dann wird noch die  $(m+1)$ -te Spalte mit  $-a_{m+1, m}$  multipliziert, das heisst die Elemente der nächstfolgenden Spalte. Die der  $m$ -ten vorangehenden Kolonnen werden durch diese Transformation nicht geändert.

b) Die Elemente  $a_{jm}$  ( $j = m+2, m+3, \dots, n$ ) werden vermittle der Transformation  $(T_{j, m+1}; a_{jm})$  zu Null gemacht. Danach wird zuerst das  $a_{jm}$ -fache der  $(m+1)$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile addiert. In den  $(m-1)$  ersten Kolonnen wird dadurch wiederum nichts geändert, da nach Induktionsannahme  $a_{jk} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m-1$ ) ist sowohl für  $j = m+1$  als auch für  $j = m+2, m+3, \dots, n$ , weil in jedem Fall  $j \geq (m-1) + 2$  ist. In der  $m$ -ten Kolonne ist jetzt  $a_{m+1, m} = 1$ , weshalb  $a_{jm}$  in Null übergeht und in den folgenden Kolonnen werden die Elemente  $a_{jk}$  ( $k = m+1, m+2, \dots, n$ ) geändert. Dann wird noch von der  $(m+1)$ -ten Spalte das  $a_{jm}$ -fache der  $j$ -ten Spalte ( $j \geq m+2$ ) subtrahiert, das heisst, es wird nur die nächstfolgende Kolonne verändert.

Damit ist gezeigt, dass sich das Verfahren gemäss Regel 1 auf die  $m$ -te Kolonne fortsetzen lässt, ohne dabei die  $m-1$  ersten Kolonnen zu ändern.

*Induktionsverankerung:* Sämtliche Überlegungen des Induktionsschlusses gelten sinngemäss auch für  $m = 1$ .

## 7. Diskussion

Die Transformation stösst dann auf Schwierigkeiten, falls nach beendigter Umformung der  $(k-1)$  ersten Kolonnen das Element  $a_{k+1,k}$  Null oder auch nur sehr klein geworden ist, durch welches im nächsten Schritt die  $(k+1)$ -te Zeile der Matrix dividiert werden soll.

*1. Fall: Die Transformation kann auf die  $k$ -te Kolonne ausgedehnt werden*

Es sei  $a_{k+1,k} = 0$ , bzw. sehr klein, aber mindestens ein Element in der  $k$ -ten Spalte  $a_{jk}$  mit  $k+2 \leq j \leq n$  von Null verschieden, bzw. nicht sehr klein. Durch gleichzeitige Vertauschung der  $j$ -ten mit der  $(k+1)$ -ten Zeile und der entsprechenden Kolonnen kann erreicht werden, dass nun in der  $k$ -ten Spalte und  $(k+1)$ -ten Zeile ein von Null verschiedenes Element steht, ohne dass dadurch das in den vorangehenden Kolonnen schon Erreichte zerstört worden wäre. An Stelle dieser Vertauschung kann auch die im Endeffekt gleichwertige zweidimensionale Transformation  $(T_{k+1,j}; 1)$  eingeschalten werden, indem die  $j$ -te Zeile zur  $(k+1)$ -ten Zeile addiert und dann die  $(k+1)$ -te Spalte von der  $j$ -ten Spalte subtrahiert wird. Jedenfalls wird in diesem Fall die Regel 1 auf die  $k$ -te Kolonne anwendbar.

*2. Fall: Die Matrix zerfällt*

Neben dem Element  $a_{k+1,k}$  verschwinden sämtliche Elemente  $a_{jk}$  in der  $k$ -ten Kolonne mit  $k+2 \leq j \leq n$ , bzw. werden sehr klein. Dann zeichnet sich eine Unterteilung der Matrix in Untermatrizen ab:

$$A \sim \left\| \begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,k-1} & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ -1 & a_{22} & \dots & a_{2\,k-1} & a_{2k} & a_{2\,k+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & -1 & \dots & a_{3\,k-1} & a_{3k} & a_{3\,k+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+2\,k+1} & \dots & a_{k+2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|. \quad (7.1)$$

Dann lässt sich das Verfahren auf die quadratische Untermatrix rechts unten weiter anwenden, und man erhält so schliesslich eine zu  $A$  äquivalente Matrix, welche nicht die Normalform (6.1) aufweist, sondern aus Kästchen der Form (6.1) aufgebaut ist, welche sich längs der Hauptdiagonalen aufreihen. Ein



solches Kästchen kann gegebenenfalls auch nur aus einem einzigen Element bestehen, welches dann gleich einem Eigenwert von  $A$  ist. Oberhalb der Kästchen wird die Matrix im allgemeinen mit von Null verschiedenen, jedoch bedeutungslosen Elementen ausgefüllt sein. Die Untermatrizen von der Gestalt (6.1), die sich so längs der Diagonalen ergeben, brauchen aber nichts gemeinsam zu haben. Es kann sein, dass sie je voneinander verschiedene Eigenwerte besitzen, teilweise untereinander gleiche Eigenwerte aufweisen, oder dass alle Eigenwerte einer Untermatrix auch Eigenwerte einer andern sind. Zu jedem Fall lassen sich ohne weiteres Beispiele konstruieren. In gewissen Fällen ist diese Aufspaltung rein zufälliger Natur und kann durch geeignete Zeilen- und Kolonnenvertauschungen in der Ausgangsmatrix vermieden werden. In andern Fällen ist sie durch das Koordinatensystem bedingt und kann durch Übergang zu einem anderen System umgangen werden. Ganz allgemein ist diese Erscheinung immer dann vorhanden und nicht zum Verschwinden zu bringen, wenn die Matrix  $A$  mehrfache Eigenwerte besitzt, und für einen solchen der Rangabfall grösser als 1 ist, mit anderen Worten, wenn das Minimalpolynom von  $A$  nicht mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt. So ist es unmöglich, eine Hermitesche Matrix mit mehrfachen Eigenwerten mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf die Form (6.1) zu bringen. Das Versagen des Verfahrens ist demnach in diesem Fall durch die Struktur der gegebenen Matrix bedingt, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

## 8. Beendigung der Transformation für reelle Matrizen

*Voraussetzung:* Die Matrix  $A$  sei auf die Gestalt (6.1) transformiert, und die Kettenbruchentwicklung (2.1) für das charakteristische Polynom existiert.

Dann lässt sich die Matrix noch mit endlich vielen Umformungen vom Typus  $B$  auf die Normalform (4.8) bringen.

Geht man an die Lösung dieses Problems, so ist man versucht, die gewünschte Form einfach dadurch zu erreichen, dass man die notwendigen Elemente durch geeignete Transformationen Schritt für Schritt zu Null macht, indem man von Kolonne zu Kolonne fortschreitet. Für drei- und vierreihige Matrizen gelangt man auf diese Art auch wirklich ohne grosse Schwierigkeiten zum Ziel. Bei höherreihigen Matrizen scheint dies vorerst auch zu funktionieren, und man gelangt einmal zu einer äquivalenten Matrix, welche zwar in den  $(n - 1)$  ersten Kolonnen die gewünschte Gestalt aufweist, jedoch in der letzten Spalte im allgemeinen nur von Null verschiedene Elemente enthält. Will man diese noch zum Verschwinden bringen, so wird das schon Erreichte teilweise wieder zerstört. Aus diesem Grund ist die Reihenfolge der Umformungen geschickter zu wählen, und so hat sich für reelle Matrizen eine Transformation herausgebildet, welche sich in drei Teile gliedert und die sich in die folgenden Regeln zusammenfassen lässt:

**Regel 2:** Beginnend in der ersten Kolonne und fortschreitend von Kolonne zu Kolonne bis zur zweitletzten, werden alle Elemente  $a_{jk}$  mit gerader Indexsumme  $j+k$  und  $1 \leq j \leq k \leq n-1$  zu Null gemacht, indem im allgemeinen Schritt die zweidimensionale Transformation  $(T_{j, k+1}; a_{jk})$  ausgeführt wird.

**Regel 3:** Die Elemente  $a_{jn}$  in der letzten Spalte mit gerader Indexsumme  $j+n$  und  $j \leq n-2$  werden zum Verschwinden gebracht, indem die Transformationen  $(T_{j, n}; -a_{jn}/a_{nn})$  angewendet werden.

Hat man sämtliche Umformungen gemäss den Regeln 2 und 3 durchgeführt, so liegt nun eine Matrix vor, in welcher in und oberhalb der Hauptdiagonalen mit Ausnahme von  $a_{nn}$  alle Elemente mit gerader Indexsumme Null sind:

$$A \sim \begin{pmatrix} \sim 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} & \dots\dots\dots \\ -1 & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & -1 & 0 & a_{34} & 0 & a_{36} & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_{45} & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & a_{56} & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \quad a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Die restlichen Elemente werden noch wie folgt behandelt:

**Regel 4:** Beginnend in der letzten Kolonne und dann nach vorn fortfahrend bis zur vierten Kolonne, werden sämtliche Elemente  $a_{jk}$  mit ungerader Indexsumme  $j+k$  und  $4 \leq j+3 \leq k \leq n$  in Null übergeführt, indem im allgemeinen Schritt die Transformation  $(T_{j, k-1}; -a_{jk}/a_{k-1, k})$  ausgeübt wird.

*Anmerkung:* Die in den Regeln 2 bis 4 angegebene Reihenfolge ist nicht die einzig mögliche, sondern sie kann in bestimmten Grenzen noch variiert werden. So ist im Prinzip jede Folge zulässig, die so beschaffen ist, dass in ihr jeder Schritt das bereits Erreichte unverändert lässt. Im Hinblick auf die Verifizierung des Verfahrens wie auch auf die Programmierung für Rechenautomaten erschien mir die gewählte Reihenfolge als zweckmässig.

## 9. Beweis des Verfahrens

### Voraussetzungen

I. Die gegebene Matrix  $A$  lässt sich vermittels einer Ähnlichkeitstransformation auf die Gestalt (6.1) bringen.

II. Die Kettenbruchentwicklung des Quotienten  $Q(z)/P(z)$  (2.1) für das charakteristische Polynom  $P(z) = |zE - A|$  existiert.

*Behauptung:* Dann lässt sich  $A$  durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Normalform (4.8) überführen.

*Beweis:* Nach Voraussetzung I kann angenommen werden, dass  $A$  schon die Form (6.1) aufweise, und es bleibt zu zeigen, dass die Anwendung der Regeln 2, 3 und 4 zum Ziel führt.

### 1. Regel 2

*Induktionsannahme:* Die ersten  $(m-1)$  Kolonnen seien bereits nach Regel 2 behandelt worden und man habe oberhalb der Diagonalen:

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für } j+k \text{ gerade} \quad (1 \leq j \leq k \leq m-1 \leq n-2). \quad (9.1)$$

*Induktionsschluss:* Um das Element  $a_{jm}$  mit  $j+m$  gerade und  $j=m$  zum Verschwinden zu bringen, werde nach Regel 2 zuerst das  $a_{jm}$ -fache der  $(m+1)$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile addiert. Da in der  $(m+1)$ -ten Zeile die Elemente  $a_{m+1,k} = 0$  sind für  $1 \leq k \leq m-1$ , so wird dadurch in den  $(m-1)$  ersten Kolonnen nichts geändert; da  $a_{m-1,m} = -1$  ist, wird  $a_{jm}$  in Null übergeführt, und es werden in der  $j$ -ten Zeile nur die Elemente  $a_{jk}$  mit  $m+1 \leq k \leq n$  verändert. Dann muss noch von der  $(m-1)$ -ten Spalte das  $a_{jm}$ -fache der  $j$ -ten Spalte subtrahiert werden. Da infolge der Form (6.1) in der  $j$ -ten Kolonne nur die Elemente  $a_{ij} \neq 0$  sind mit  $i \leq j+1 \leq m+1$ , werden dadurch nur die Elemente  $a_{i,m-1}$  in der nächstfolgenden  $(m-1)$ -ten Spalte in und oberhalb der Hauptdiagonalen betroffen. Insgesamt werden also nur Elemente in und oberhalb der Diagonalen verändert, die in einem späteren Schritt behandelt werden, somit ist die Transformationsmethode auf die  $m$ -te Kolonne fortsetzbar.

Zugleich ist auch ersichtlich, dass mit Ausnahme von  $a_{jm}$  alle andern Elemente in der  $m$ -ten Kolonne ungeändert bleiben, weshalb die Transformationen für die  $m$ -te Spalte unabhängig voneinander in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden können. Ferner sind die Umformungen nach Regel 2 immer ausführbar, da dazu nur Multiplikationen und Additionen notwendig sind.

*Induktionsverankerung:* Sämtliche Überlegungen des Induktionsschlusses gelten sinngemäss auch für  $j=m=1$ .

### 2. Regel 3

*Voraussetzung:* Nach Anwendung von Regel 2 hat man

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für } j+k \text{ gerade} \quad (1 \leq j \leq k \leq n-1). \quad (9.2)$$

Hier ist Division durch  $a_{nn}$  erforderlich. Dies ist jetzt gleich der Spur der gegebenen Matrix  $A$  und stimmt somit mit  $b_{nn}$  in (4.8) überein. Dieses ist aber

als Folge von Voraussetzung II und Satz 1 von Null verschieden, die Division also durchführbar.

Um  $a_{jn}$  mit  $j + n$  gerade und  $j \leq n - 2$  zum Verschwinden zu bringen, bestimme man zunächst den Wert  $\alpha_{jn} = -a_{jn}/a_{nn}$  und addiere zuerst das  $\alpha_{jn}$ -fache der  $n$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile. Die  $n$ -te Zeile enthält nur die beiden von Null verschiedenen Elemente  $a_{nn}$  in der letzten und  $-1$  in der zweitletzten Kolonne. Demnach wird  $a_{jn}$  zu Null, während das Element  $a_{j, n-1}$  ( $j < n - 1$ ) verändert wird, welches aber von ungerader Indexsumme und deshalb im allgemeinen auch noch von Null verschieden ist. Sodann muss noch das  $\alpha_{jn}$ -fache der  $j$ -ten Spalte von der  $n$ -ten Spalte subtrahiert werden. In der  $j$ -ten Spalte sind jedoch nach (9.2) nur Elemente  $a_{ij}$  von ungerader Indexsumme und mit  $i \leq j + 1 \leq n - 1$  von Null verschieden. Da einerseits  $j$  und  $n$  gleiche, andererseits  $i$  und  $j$  aber ungleiche Parität haben, so verändern sich in der letzten Kolonne nur Elemente  $a_{in}$  mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen.

Damit ist gezeigt, dass unter Anwendung der Regel 3 die Elemente  $a_{jn}$  mit gerader Indexsumme und  $j \leq n - 2$  in Null übergeführt werden, wobei sich insgesamt in der letzten und zweitletzten Kolonne nur die Elemente mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen ändern.

### 3. Regel 4

*Voraussetzung:* Es ist

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad j + k \text{ gerade} \quad (1 \leq j \leq k \leq n; j \leq n - 1). \quad (9.3)$$

*Induktionsannahme:* Man habe gemäss Regel 4 schon die Elemente  $a_{jk}$  in den letzten  $(n - m)$  Kolonnen zum Verschwinden gebracht:

$$a_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad j + k \text{ ungerade} \quad (1 \leq j \leq k - 3; m + 1 \leq k \leq n). \quad (9.4)$$

*Induktionsschluss:* Das Element  $a_{jm}$  in der  $m$ -ten Kolonne mit ungerader Indexsumme und  $j \leq m - 3$  soll gemäss Regel 4 behandelt werden. Dazu bilde man zunächst den Wert  $\alpha_{jm} = -a_{jm}/a_{m-1, m}$  unter der später zu rechtfertigenden Annahme, dass  $a_{m-1, m} \neq 0$  sei. Dann addiere man zuerst das  $\alpha_{jm}$ -fache der  $(m - 1)$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile. Die  $(m - 1)$ -te Zeile enthält nach (9.4) nur zwei von Null verschiedene Elemente, nämlich  $a_{m-1, m}$  in der  $m$ -ten und  $-1$  in der  $(m - 2)$ -ten Kolonne. Somit wird  $a_{jm}$  zu Null, und  $a_{j, m-2}$  mit ungerader Indexsumme und  $j < m - 2$  verändert, welches in einer vorangehenden Kolonne oberhalb der Diagonalen steht. Dann muss noch das  $\alpha_{jm}$ -fache der  $j$ -ten Spalte von der  $(m - 1)$ -ten Spalte subtrahiert werden. In der  $j$ -ten Spalte sind nach (9.3) nur noch Elemente  $a_{ij}$  mit ungerader Indexsumme und mit

$$i \leq j + 1 \leq m - 2$$

von Null verschieden. Da jetzt einerseits  $j$  und  $(m - 1)$  gleiche, anderseits  $i$  und  $j$  ungleiche Parität haben, so ändern sich in der  $(m - 1)$ -ten Kolonne nur Elemente  $a_{i, m-1}$  mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen.

Damit ist erwiesen, dass sich bei der Behandlung der  $m$ -ten Kolonne nur Elemente in der  $(m - 1)$ -ten und  $(m - 2)$ -ten Kolonne mit ungerader Indexsumme oberhalb der Diagonalen ändern. Daraus ergibt sich, dass sich im speziellen die Elemente  $a_{k-1, k}$  mit  $m < k \leq n$  nicht mehr ändern, sondern bereits gleich den Elementen  $b_{k-1, k}$  in der Normalform (4.8) sind. Diese sind nach Voraussetzung II und Satz 1 von Null verschieden. Im besondern ist  $a_{m-1, m} \neq 0$ , womit die getroffene Annahme zutrifft.

*Induktionsverankerung:* Sämtliche Überlegungen des Induktionsschlusses gelten sinngemäss auch für  $m = n$ .

Zusätze

1. *Die Matrix zerfällt in Untermatrizen.* Die Voraussetzung I ist nicht erfüllt. Wenn jedoch die Kettenbruchentwicklungen (2.1) der charakteristischen Polynome der einzelnen Untermatrizen längs der Diagonalen existieren, dann lassen sich die Regeln 2 bis 4 auf die einzelnen Kästchen anwenden.

2. *Die Kettenbruchentwicklung existiert nicht.* Die Voraussetzung II ist damit äquivalent, dass die Sturmsche Kette für das charakteristische Polynom in der Form (3.1) mit linearen Quotienten  $(R_k y + S_k)$  existiert. Ist dies nicht der Fall, so zeigt sich dies dadurch an, dass entweder  $b_{nn}$  oder ein Element  $b_{k-1, k}$  in (4.8) verschwindet, so dass entweder nicht nach Regel 3 oder 4 weiter transformiert werden kann. Deshalb versagt unser Verfahren in denjenigen Fällen, in denen die Sturmsche Kette (3.1) nicht existiert.

10. Verallgemeinerung des Verfahrens auf komplexe Matrizen

Die Transformation der gegebenen komplexen Matrix  $A$  in die Gestalt (6.1) lässt sich genau gleich wie im reellen Fall nach Regel 1 durchführen. Hingegen muss die Methode, aus der Form (6.1) die Normalform (4.7) zu gewinnen, dahin modifiziert werden, dass an Stelle der Matrix (8.1) zunächst eine solche von der Gestalt (10.1) angestrebt wird.

$$A \sim C = \left\| \begin{array}{cccccc} i c_{11} & c_{12} & i c_{13} & c_{14} & i c_{15} & \dots \\ -1 & i c_{22} & c_{23} & i c_{24} & c_{25} & \dots \\ 0 & -1 & i c_{33} & c_{34} & i c_{35} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & i c_{44} & c_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i c_{n-1, n-1} & c_{n-1, n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & c_{n, n} + i c'_{n, n} \end{array} \right\| \quad (10.1)$$



Darin sind mit Ausnahme des Elementes in der letzten Zeile und letzten Kolonne im oberen Dreieck die Elemente mit gerader Indexsumme rein imaginär oder aber reell, falls ihre Indexsumme ungerade ist. Infolge dieser Modifikation wird in jedem einzelnen Schritt entweder ein Realteil oder ein Imaginärteil eines Elementes zum Verschwinden gebracht, und deshalb wird in der Transformationsmatrix  $T$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (10.2)$$

$\gamma$  entweder reell gleich  $\alpha$  oder rein imaginär gleich  $i\beta$  gewählt werden. Um dies zu unterscheiden, werde ich mit  $(T'_{jk}; \alpha)$  die Ähnlichkeitstransformation  $TAT^{-1}$  mit reellem  $\gamma = \alpha$  und mit  $(T''_{jk}; \beta)$  diejenige mit rein imaginärem  $\gamma = i\beta$  bezeichnen, wobei der entsprechende Wert von  $\gamma$  in  $T$  in der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Kolonne steht. Weiter setze ich

$$a_{jk} = a'_{jk} + i a''_{jk}, \quad (10.3)$$

und dies soll wieder der Wert des Elementes in der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Kolonne bedeuten, wie er sich nach Beendigung der letzten Umformung ergeben hat. Dann lässt sich das Verfahren in die folgenden Regeln zusammenfassen:

**Regel 2a:** Beginnend in der ersten Kolonne und fortschreitend von Kolonne zu Kolonne bis zur zweitletzten, werden sowohl alle Realteile  $a'_{jk}$  mit gerader Indexsumme  $j+k$  und  $1 \leq j \leq k \leq n-1$  mittels der Transformationen  $(T'_{j,k+1}; \alpha = a'_{jk})$  wie auch alle Imaginärteile  $a''_{jk}$  mit ungerader Indexsumme  $j+k$  und  $1 \leq j < k \leq n-1$  mit Hilfe von  $(T''_{j,k+1}; \beta = a''_{jk})$  zum Verschwinden gebracht.

**Regel 3a:** Die Realteile der letzten Kolonne  $a'_{jn}$  mit gerader Indexsumme  $j+n$  und  $j \leq n-2$  werden zum Verschwinden gebracht, indem die Transformationen  $(T'_{jn}; \alpha = a'_{jn}|a'_{nn})$  angewendet werden. Die Imaginärteile der letzten Kolonne  $a''_{jn}$  mit ungerader Indexsumme  $j+n$  und  $j \leq n-1$  werden in Null übergeführt, indem die Transformationen  $(T''_{jn}; \beta = a''_{jn}|a'_{nn})$  zur Anwendung gelangen.

**Regel 4a:** Beginnend in der letzten Kolonne und dann nach vorn fortfahrend bis zur dritten Kolonne, werden sowohl sämtliche Realteile  $a'_{jk}$  mit ungerader Indexsumme  $j+k$  und  $4 \leq j+3 \leq k \leq n$  durch die Transformationen  $(T'_{j,k-1}; \alpha = a'_{jk}|a'_{k-1,k})$  als auch alle Imaginärteile  $a''_{jk}$  mit gerader Indexsumme  $j+k$



und  $3 \leq j + 2 \leq k \leq n$  mit Hilfe der Transformationen  $(T''_{j, k-1}; \beta = -a''_{jk}/a'_{k-1, k})$  in Null übergeführt.

Bei der Durchführung der Umformungen hat man auch hier innerhalb der einzelnen Regeln bestimmte Freiheiten in der Reihenfolge der zweidimensionalen Transformationen.

Dass die beschriebene Methode unter den gleichen Voraussetzungen wie im reellen Fall und unter strikter Anwendung der Regeln 1, 2a, 3a und 4a zur Normalform (4.7) führt, lässt sich mit den genau gleichen Überlegungen wie für reelle Matrizen beweisen. Der Unterschied besteht nur darin, dass man erstens zwischen den beiden Arten von Transformationen ( $\gamma$  reell oder rein imaginär) und zweitens zwischen reellen und rein imaginären Elementen zu unterscheiden hat. Deshalb sehe ich von der Wiedergabe dieses evidenten Beweises ab.

## 11. Ergänzungen

### a) Berechnung des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$

$P(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda E - B|$  lässt sich aus der reduzierten Matrix (4.7) bzw. (4.8) auf bekanntem Weg rekursiv wie folgt berechnen: Man beginne mit

$$p_{-1}(\lambda) = 0, \quad p_0(\lambda) = 1$$

und bestimme dann die Polynome  $p_k(\lambda)$

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda - i b'_{k+1, k+1}) p_k(\lambda) + b_{k, k+1} p_{k-1}(\lambda) \quad (11.1)$$

bzw. im reellen Fall

$$p_{k+1}(\lambda) = \lambda p_k(\lambda) + b_{k, k+1} p_{k-1}(\lambda) \quad (11.2)$$

( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ). Dann ist

$$\boxed{P(\lambda) = p_n(\lambda) + (-1)^{n-1} b_{nn} p_{n-1}(\lambda).} \quad (11.3)$$

### b) Zur Wahl der Reihenfolge der Umformungen

Die Freiheit in der Wahl der Reihenfolge der Umformungen nach Regel 2, bzw. Regel 2a, kann numerisch dahin ausgenützt werden, die Reihenfolge derart zu wählen, dass die entstehenden Elemente möglichst kleinen Rundungsfehlern unterworfen werden. So lässt es sich hie und da vermeiden, dass unvermittelt sehr grosse Werte entstehen. Numerische Versuche in dieser Hinsicht lassen vermuten, dass durch Anwendung der angegebenen Regel 2, bzw. 2a, die Zahlwerte der beeinflussbaren Elemente günstig ausfallen, falls

man die Elemente pro Kolonne oben beginnend zu Null macht. Diese Reihenfolge weist jedenfalls den beachtlichen Vorteil auf, gegenüber jeder andern Anordnung der zweidimensionalen Transformationen am wenigsten Multiplikationen zu benötigen.

c) *Zerlegung der Transformationsmatrix in Links- und Rechtsdreiecksmatrix*

Die Ähnlichkeitstransformation der gegebenen Matrix  $A$  in die Matrix  $P$  von der Gestalt (6.1) geschieht nach Regel 1 in einzelnen Schritten, in denen die Transformationsmatrix entweder Diagonalform ( $k+1 \cong 2$  in Regel 1a) aufweist oder eine besondere Linksdreiecksmatrix ( $j > k+1 \cong 2$  in Regel 1b) ist. Da das Produkt von Linksdreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen selbst wieder eine Linksdreiecksmatrix ist, so hat die Matrix  $L$  in der Transformation

$$LAL^{-1} = P \quad (11.4)$$

folgende Form:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix}. \quad (11.5)$$

Andererseits erfordert die Ähnlichkeitstransformation von  $P$  in die Normalform  $B$  gemäss den Regeln 2 bis 4 (2a bis 4a) lauter Umformungen mit Rechtsdreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente gleich 1 sind. Somit ist die Matrix  $R$  in der Transformation

$$RPR^{-1} = B \quad (11.6)$$

eine Rechtsdreiecksmatrix mit 1 in der Diagonalen:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (11.7)$$

Damit zerfällt die Transformationsmatrix  $T$  in

$$TAT^{-1} = B \quad (11.8)$$

auf natürliche Weise nach (11.4) und (11.6) in ein Produkt einer Rechts- und einer speziellen Linksdreiecksmatrix:

$$T = R L. \quad (11.9)$$

#### d) Der Rechenaufwand des Verfahrens

Der Rechenaufwand eines Verfahrens soll gemessen werden mit der Anzahl der notwendigen Multiplikationen und Divisionen. Um die Stabilitätsfrage einer reellen Matrix von der Ordnung  $n$  zu beantworten, braucht es bekanntlich mit dem Verfahren von WEBER-VOETTER [7] und mit der Methode der Sturmschen Kette [5] insgesamt eine Zahl von Multiplikationen und Divisionen, welche sich asymptotisch wie  $n^3$  verhält. Die Abzählung der Operationen des hier beschriebenen Verfahrens zur Reduktion der gegebenen Matrix auf die Normalform (4.8) ergibt einen Rechenaufwand, der sich asymptotisch ebenfalls wie  $n^3$  verhält. In dieser Hinsicht sind also die beiden Wege gleichwertig.

#### e) Zusammenhang des Verfahrens mit der Methode der Sturmschen Kette

Ein enger Zusammenhang zwischen den beiden Methoden ist ersichtlich, wenn man auf die nachstehende begleitende Matrix (11.10) die Rechenvorschriften anwendet:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & c_{n-1} \end{vmatrix}. \quad (11.10)$$

In der letzten Kolonne der Matrix  $C$  stehen im wesentlichen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1} \lambda^{n-1} + c_{n-2} \lambda^{n-2} - + \dots + (-1)^{n-1} c_1 \lambda + (-1)^n c_0,$$

und die Ausgangspolynome  $F_0(y)$  und  $F_1(y)$  für die Sturmsche Kette sind gemäss (3.2)

$$\begin{aligned} F_0(y) &= y^n - c_{n-2} y^{n-2} + c_{n-4} y^{n-4} - c_{n-6} y^{n-6} + - \dots, \\ F_1(y) &= - c_{n-1} y^{n-1} + c_{n-3} y^{n-3} - c_{n-5} y^{n-5} + - \dots. \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Regel 3, welche die Elemente der letzten Kolonne mit geraden Indexsummen in Null überführt, erscheinen in der letzten Spalte an den Plätzen mit ungeraden Indexsummen im wesentlichen die Koeffizienten des ersten Restpolynoms  $I_2(y)$ . In der zweitletzten Kolonne hingegen stehen nun an den Plätzen mit ungeraden Indexsummen im wesentlichen die Koeffizienten des Polynoms  $I_1(y)$ , welche aber durch  $c_{n-1}$  dividiert sind. Im übrigen hat sich in der Matrix nichts geändert.

Nun werde die Regel 4 auf die letzte Kolonne angewendet: Die bewirkt, dass in der zweitletzten Spalte bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Koeffizienten des Restpolynoms  $F_3(y)$  in Erscheinung treten, in der drittletzten Kolonne diejenigen von  $I_2(y)$ , welche aber durch den Koeffizienten der höchsten Potenz dividiert sind. Führt man nach Regel 4 fort, so lässt sich allgemein zeigen, dass im wesentlichen und bis auf Proportionalitätsfaktoren für  $k = n, n-1, \dots, 5, 4$  in der  $k$ -ten Kolonne die Koeffizienten von  $F_{n-k+2}(y)$  und in der vorangehenden  $(k-1)$ -ten Spalte diejenigen von  $F_{n-k+1}(y)$  stehen. Für  $k=3$  dagegen steht in der dritten Spalte im wesentlichen der Koeffizient von  $F_{n-1}(y)$  und in der zweiten Kolonne derjenige von  $F_n(y)$ .

Somit stellen die Regeln 3 und 4 in diesem speziellen Fall eine besondere Form des euklidischen Algorithmus dar.

## 12. Beispiele

### 1. Reelle Matrix

Unterhalb den Matrizen ist die angewendete zweidimensionale Umformung angegeben, welche zur nächsten äquivalenten Matrix führt.

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right\|$$

Regel 1:

$(T_2; -3)$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -9 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -0,333\,333 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right\|$$

$(T_{32}; -1)$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -10,000\,000 & -1,000\,000 & 2,000\,000 \\ -1 & -0,333\,333 & -0,333\,333 & 0 \\ 0 & 1,333\,333 & +,333\,333 & -1,000\,000 \\ 2 & -1,000\,000 & -1,000\,000 & 3,000\,000 \end{array} \right\|$$

$(T_{42}; 2)$

$\sim$	1	- 14,000 000	- 1,000 000	2,000 000
	1	- 0,333 333	- 0,333 333	0
	0	3,333 333	4,333 333	- 1,000 000
	0	- 7,666 667	- 1,666 667	3,000 000

 $(T_3; -3,333\ 333)$ 

$\sim$	1	- 14,000 000	3,333 333	2,000 000
	1	- 0,333 333	1,111 110	0
	0	- 1	4,333 333	0,300 000
	0	- 7,666 667	5,555 556	3,000 000

 $(T_{43}; -7,666\ 667)$ 

$\sim$	1	14,000 000	18,666 667	2,000 000
	- 1	- 0,333 333	1,111 110	0
	0	- 1	6,633 333	0,300 000
	0	0	- 22,299 998	0,700 000

 $(T_4; 22,299\ 998)$ 

$\sim$	1	- 14,000 000	18,666 667	44,599 996
	- 1	- 0,333 333	1,111 110	0
	0	- 1	6,633 333	6,689 999
	0	0	- 1	0,700 000

*Regel 2:* $(T_{12}; 1)$ 

$\sim$	0	- 14,333 333	19,777 777	44,599 996
	- 1	0,666 667	1,111 110	0
	0	- 1	6,633 333	6,689 999
	0	0	- 1	0,700 000

 $(T_{23}; 0,666\ 667)$ 

$\sim$	0	- 14,333 333	29,333 337	44,599 996
	- 1	0	5,533 334	4,460 002
	0	- 1	7,300 000	6,689 999
	0	0	- 1	0,700 000

 $(T_{14}; 29,333\ 337)$ 

$\sim$	0	- 14,333 333	0	65,133 332
	- 1	0	5,533 334	33,793 339
	0	- 1	7,300 000	6,689 999
	0	0	- 1	0,700 000

 $(T_{34}; 7,300\ 000)$ 

$\sim$	0	- 14,333 333	0	65,133 332
	- 1	0	5,533 334	- 6,599 999
	0	- 1	0	11,799 999
	0	0	- 1	8,000 000

*Regel 3:* $(T_{24}; 0,825\ 000)$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & -14,333\,333 & 0 & 76,958\,332 \\ -1 & 0 & 4,708\,334 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 12,624\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 8,000\,000 \end{vmatrix}$$

Regel 4:

$$(T_{13}; -6,095\,710)$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -8,237\,623 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1,387\,376 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 12,624\,999 \\ 0 & 0 & -1 & 8,000\,000 \end{vmatrix}$$

Da nun  $b_{44} > 0$ ,  $b_{34} > 0$ ,  $b_{23} < 0$ ,  $b_{12} < 0$  ist, und nach Satz 6 in der Folge von Produkten  $b_{44} > 0$ ,  $b_{44} b_{34} > 0$ ,  $b_{44} b_{34} b_{23} < 0$ ,  $b_{44} b_{34} b_{23} b_{12} > 0$ , drei positiv und eines negativ sind, so haben drei Eigenwerte von  $A$  positive und einer negativen Realteil (vgl. dazu R. ZURMÜHL [8], Seiten 295–296).

Entwicklung des charakteristischen Polynoms nach (11.2) und (11.3) ergibt:

$$\begin{aligned} p_{-1}(\lambda) &= 0, \\ p_0(\lambda) &= 1, \\ p_1(\lambda) &= \lambda, \\ p_2(\lambda) &= \lambda^2 - 8,237\,623, \\ p_3(\lambda) &= \lambda^3 - 9,624\,999\lambda, \\ p_4(\lambda) &= \lambda^4 + 3,000\,000\lambda^2 - 103,999\,982, \\ P(\lambda) &= p_4(\lambda) + (-1)^3 8,000\,000 p_3(\lambda), \\ P(\lambda) &= \lambda^4 - 8\lambda^3 + 3\lambda^2 + 76,999\,992\lambda - 103,999\,982. \end{aligned}$$

Das exakte charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 3\lambda^2 + 77\lambda - 104.$$

Die Rundungsfehler in den Koeffizienten des linearen und konstanten Gliedes sind bei der verwendeten Rechengenauigkeit von 6 Stellen nach dem Komma zu erwarten.

## 2. Komplexe Matrix

$$A = \begin{vmatrix} -0,0560 - 15,1900i & 0,2856 + 4,7820i & -0,0207 + 3,4710i & 0,0138 - 1,7190i \\ -0,0318 - 6,4510i & 0,0095 + 0,4850i & -0,0105 + 2,1100i & -0,0153 - 0,3460i \\ -0,0428 + 2,4600i & -0,1762 - 2,9980i & -0,0859 - 17,6620i & -0,4729 - 0,9820i \\ -0,0244 + 1,1550i & -0,0617 - 1,3540i & -0,0391 - 7,1490i & -0,3845 - 1,0590i \end{vmatrix}$$

Die Umformung nach Regel 1 bietet hier nichts Neues, weshalb diese Transformationen nicht wiedergegeben werden. Man erhält:

$$P = \begin{vmatrix} -0,0560 - 15,1900i & -24,2869 + 2,1361i & -4,0878 + 68,6431i & 14,5697 + 4,9694i \\ -1 & 0,0326 - 0,2574i & 7,5268 + 0,4708i & 0,1335 - 0,4619i \\ 0 & 1 & -0,3091 - 17,2946i & 0,4362 - 0,0571i \\ 0 & 0 & -1 & -0,1844 - 0,6840i \end{vmatrix}$$



## 1. Regel 2a:

$$(T'_{12}; \alpha = -0,0560)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 + 1,2999i & -4,5093 + 68,6167i & 14,5622 + 4,9953i \\ -1 & -0,0234 - 0,2574i & 7,5268 + 0,4708i & 0,1355 - 0,4619i \\ 0 & -1 & -0,3091 - 17,2946i & 0,4362 - 0,0571i \\ 0 & 0 & -1 & -0,1844 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

$$(T'_{13}; \beta = 1,2999) \text{ und } (T'_{23}; \alpha = -0,0234)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 & -2,3419 + 68,2150i & 14,6364 + 5,5623i \\ -1 & -0,2574i & 7,5340 + 2,1693i & 0,1233 - 0,4606i \\ 0 & -1 & -0,3325 - 17,2946i & 0,4362 - 0,0571i \\ 0 & 0 & -1 & -0,1844 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

$$(T'_{14}; \alpha = -2,3419); (T'_{24}; \beta = 2,1639) \text{ und } (T'_{34}; \alpha = -0,3325)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 & 68,2150i & 15,0683 + 46,9597i \\ -1 & -0,2574i & 7,5340 & 1,2115 - 0,8607i \\ 0 & -1 & -17,2946i & 0,4975 - 3,4101i \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 0,6840i \end{vmatrix}$$

## 2. Regel 3a:

$$(T''_{14}; \beta = 90,8487); (T''_{24}; \alpha = 2,3419) \text{ und } (T''_{34}; \beta = -6,5971)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -24,2888 & -22,6337i & -1096,5394 \\ -1 & -0,2574i & 5,1903 & 123,2293i \\ 0 & -1 & -10,6974i & 68,9012 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 7,2811i \end{vmatrix}$$

## 3. Regel 4a:

$$(T'_{13}; \alpha = 15,9147) \text{ und } (T'_{23}; \beta = -1,7885)$$

$$\sim \begin{vmatrix} -15,1900i & -40,2034 & -23,0395i & 0 \\ -1 & 1,5311i & -0,7656 & 0 \\ 0 & -1 & -12,4859i & 68,9012 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 7,2811i \end{vmatrix}$$

$$(T''_{12}; \beta = -30,0941)$$

$$B = \begin{vmatrix} 14,9041i & -442,6538 & 0 & 0 \\ -1 & -28,5631i & -0,7656 & 0 \\ 0 & -1 & -12,4859i & 68,9012 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5169 - 7,2811i \end{vmatrix}$$

Hier ist  $b_{44} < 0$ ,  $b_{34} > 0$ ,  $b_{23} < 0$  und  $b_{12} < 0$ , und damit  $b_{44} < 0$ ,  $b_{44} b_{34} < 0$ ,  $b_{44} b_{34} b_{23} > 0$ ,  $b_{44} b_{34} b_{23} b_{12} < 0$ , weshalb nach Satz 6 ein Eigenwert von  $A$  mit positivem Realteil vorhanden ist, während die drei übrigen negativen Realteil aufweisen.

Das charakteristische Polynom lässt sich nach (11.1) und (11.3) berechnen:

$$\begin{aligned} p_{-1}(\lambda) &= 0, \\ p_0(\lambda) &= 1, \\ p_1(\lambda) &= \lambda - 14,9041i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2(\lambda) &= (\lambda + 28,5631i) p_1(\lambda) - 442,6538 p_0(\lambda) \\
&= \lambda^2 + 13,6590i \lambda - 16,9468, \\
p_3(\lambda) &= (\lambda + 12,4859i) p_2(\lambda) - 0,7656 p_1(\lambda) \\
&= \lambda^3 + 26,1449i \lambda^2 - 188,2569 \lambda - 200,1856i, \\
p_4(\lambda) &= (\lambda + 7,2811i) p_3(\lambda) + 68,9012 p_2(\lambda) \\
&= \lambda^4 + 33,4260i \lambda^3 - 309,7201 \lambda^2 - 629,7919i \lambda + 289,9266, \\
P(\lambda) &= p_4(\lambda) + 0,5169 p_3(\lambda), \\
P(\lambda) &= \lambda^4 + (0,5169 + 33,4260i) \lambda^3 + (-309,7201 + 13,5143i) \lambda^2 \\
&\quad + (-97,3100 - 629,7919i) \lambda + (289,9266 - 103,4759i).
\end{aligned}$$

Anmerkung: Das Beispiel wurde ursprünglich mit grösserer Stellenzahl durchgerechnet, aber hier mit den auf 4 Stellen nach dem Komma gerundeten Werten angeführt.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. J. ROUTH, *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies* (Macmillan 1905), S. 223–231.
- [2] A. HURWITZ, *Math. Ann.* 46, 273–284 (1895).
- [3] NYQUIST, *Regeneration Theory*, Bell Syst. techn. J. 1932, 126.
- [4] L. CREMER, *Z. angew. Math. Mech.* 1947, 161–163.
- [5] A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis* (Berlin 1950), S. 290–296.
- [6] H. S. WALL, *Analytic Theory of Continued Fractions* (New York 1948), S. 182–185.
- [7] H. VOETTER, *Z. angew. Math. Phys.* 3, 314–315 (1952).
- [8] R. ZURMÜHL, *Matrizen* (Berlin 1950), S. 316–324.
- [9] C. LANCZOS, *An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, J. Res. Nat. Bur. Stand. 45, 255–282 (1950).
- [10] H. RUTISHAUSER, *Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungsalgorithmus von C. Lanczos*, *Z. angew. Math. Phys.* 4, 35–56 (1953).

### Summary

Given the eigenvalue problem  $(A - \lambda E) x = 0$  for real or complex matrices  $A$  the number of eigenvalues  $\lambda$  with positive real parts is determined without evaluating the characteristic polynomial. A proceeding is developed here to transform the given matrix  $A$  into a reduced form by applying a finite series of elementary transformations upon the matrix. The elements of the reduced matrix allow immediately to solve the problem.

(Eingegangen: 19. Juni 1956.)

# Free Lateral Vibration of Beams of Variable Cross Section

By EDWARD W. SUPPGER, Princeton, N. J., USA<sup>1)</sup>,  
and NAZIH J. TALEB, Beirut, Lebanon<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

The problem of free lateral vibration of non-prismatical beams, i. e., the determination of the natural frequencies and the shapes of the deflection curve during vibration, is of current interest since gaps exist in the considerable work accomplished in the past in this field. KIRCHHOFF [1<sup>3)</sup>] was the first to solve the governing differential equation for the case of the conical cantilever beam and for the wedge-shaped cantilever with small vertex angle. CAPELLEN [2] presented a series solution for the cantilever of triangular width; MORROW [3] utilized an integral method and gave several applications; NICHOLSON [4] studied the double cone and some solids of revolution; MONONOBE [5] considered the hollow truncated cone; and WRINCH [6] the solid circular cone (for the higher frequencies and modal shapes). Other contributions were made by ONO [7] and HORT [8]. The integral equation method was presented by SCHWEIN [9], TEMPLE and BICKLEY [10], [11], and WHITE [12].

This paper deals only with the approach by the differential equation of motion for beams with cross sectional areas and moments of inertia that vary in an exponential manner. Solutions are obtained for beams with different end conditions, and for two specific examples. For simplicity only, the calculations are limited to the first and second modes.

### Notation

$x, y, z$	Rectangular coordinates,
$L$	span of beam,
$A(x)$	cross sectional area,
$I(x)$	moment of inertia of cross section,
$X$	normal function for beam,
$X_i$	the $i$ -th normal function,
$T$	function of time,
$p_i$	circular frequency for the $i$ -th mode,

<sup>1)</sup> Princeton University.

<sup>2)</sup> American University of Beirut.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 519.

$g$	gravitational acceleration,
$t$	time,
$\gamma$	weight per unit volume,
$E$	modulus of elasticity,
$A_i B_i C_i$	
$K k c$	constants,
$r_i$	the $i$ -th root of an algebraic equation,
$R, r$	radii.

## 2. Formulation of the Problem

The well-known [13] differential equation<sup>4)</sup> for free lateral vibration of a beam is

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = - \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (1)$$

We seek solutions  $y(x, t)$  that satisfy equation (1) as well as the boundary conditions and the initial condition. For a beam, the boundary conditions are: ends simply supported, fixed, or free. For the initial conditions we assume that  $y$  and  $\dot{y}$  are known at  $t = 0$ .

To find  $y(x, t)$  that satisfies equation (1) let

$$y = X(x) T(t); \quad (2)$$

substitution of equation (2) into equation (1) gives

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) T + \frac{\gamma A}{g} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X = 0$$

or

$$\frac{g}{\gamma A} \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( E I \frac{d^2 X}{dx^2} \right) + \frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = 0; \quad (3)$$

the first term is independent of  $t$  and the second of  $x$ . For a solution of equation (1), evidently each term in equation (3) is constant. Let

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = \text{const} = -p^2 \quad (4)$$

which gives

$$T = A \cos p t + B \sin p t \quad (5)$$

and from equations (3) and (4) we obtain

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E I \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = p^2 \frac{\gamma A}{g} X \quad (6)$$

<sup>4)</sup> The effects of rotatory inertia and shearing force are neglected.

or

$$I \frac{d^4 X}{dx^4} + 2 \frac{dI}{dx} \cdot \frac{d^3 X}{dx^3} + \frac{d^2 I}{dx^2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{p^2 \gamma A}{E g} X \quad (7)$$

from which  $X(x)$  is to be determined, subject to the boundary conditions for any given beam. Since equation (7) does not allow an elementary solution in terms of  $A(x)$ ,  $I(x)$  and its derivatives, we shall assign certain expressions to  $A(x)$  and  $I(x)$  in order to simplify the solution. Equation (7) is the 'eigenvalue equation' and the problem is to determine the values of  $p_i^2$  (the 'eigenvalues' or 'characteristic' values) for which it has non-trivial solutions under the prescribed boundary conditions. The corresponding solutions  $X_i(x)$  are called 'eigenfunctions'. These solutions are not unique since if  $X_i$  is a solution of equation (7), so is  $C X_i$  where  $C$  is a constant. Since equation (1) is linear, we may write its general solution as

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \quad (8)$$

wherein the constants  $A_i$  and  $B_i$  are determined from the known initial conditions in the following manner.

If  $X_m$  and  $X_n$  are any two solutions of equation (6) we may write

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) - \frac{p_m^2 \gamma A}{E g} X_m = 0$$

and

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) - \frac{p_n^2 \gamma A}{E g} X_n = 0.$$

Multiply the first of these two equations by  $-X_n$ , the second by  $X_m$ , add and integrate over  $x$  from 0 to  $L$ . Thus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{E g} (p_m^2 - p_n^2) \int_0^L A X_m X_n dx &= \int_0^L \left[ X_n \frac{d^2}{dx^2} \left( I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) - X_m \frac{d^2}{dx^2} \left( I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \right] dx \\ &= X_n \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \frac{dX_n}{dx} dx \\ &\quad - X_m \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \frac{dX_m}{dx} dx \\ &= X_n \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \frac{dX_n}{dx} \left( I \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \Big|_0^L \\ &\quad - X_m \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \Big|_0^L + \frac{dX_m}{dx} \left( I \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \Big|_0^L. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

For a beam, each end (i. e., for  $x = 0$  or  $x = L$ ) is either simply supported, fixed, or free. At a simply supported end, the deflection and bending moment are zero, thus

$$X = I \frac{d^2 X}{dx^2} = 0.$$

At a fixed end, the deflection and the slope are zero

$$X = \frac{dX}{dx} = 0.$$

At a free end, the bending moment and the shear are zero

$$I \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = 0.$$

It follows that the terms on the right side of equation (9) all vanish. Hence

$$(\dot{p}_m^2 - \dot{p}_n^2) \int_0^L A X_m X_n dx = 0.$$

If  $(\dot{p}_m^2 - \dot{p}_n^2) \neq 0$  then

$$\int_0^L A X_m X_n dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (10)$$

To determine the  $A_i$  and  $B_i$  of equation (8) in terms of the given initial conditions, we assume that

$$(y)_{t=0} = f(x), \quad (\dot{y})_{t=0} = g(x).$$

Equations (8) gives

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (-\dot{p}_i A_i \sin \dot{p}_i t + \dot{p}_i B_i \cos \dot{p}_i t). \quad (11)$$

Thus

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i = f(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \dot{p}_i B_i X_i = g(x).$$

Multiply both these equations by  $X_j$  and integrate

$$\int_0^L A_j X_j^2 dx = \int_0^L f(x) X_j dx, \quad \int_0^L \dot{p}_j B_j X_j^2 dx = \int_0^L g(x) X_j dx$$

or

$$A_j = \frac{\int_0^L f(x) X_j dx}{\int_0^L X_j^2 dx} \quad \text{and} \quad B_j = \frac{\int_0^L g(x) X_j dx}{\dot{p}_j \int_0^L X_j^2 dx}, \quad (12)$$



i. e., the constants  $A_i$  and  $B_i$  can be calculated after an expression for  $X_i$  has been found that satisfies equation (7) and the boundary conditions. Substituting the  $A_i$  and  $B_i$  back into equation (8) we obtain the unique solution of equation (1).

### 3. Solution for $X$

To simplify the solution of equation (7) for  $X$ , we assume

$$A(x) = A_0 e^{cx/L} = A_0 e^{bx}, \quad I(x) = I_0 e^{cx/L} = I_0 e^{bx} \quad (13)$$

wherein  $b$  and  $c$  are arbitrary constants (note that the radius of gyration of the cross section of the beam is constant).

Substitution of equation (13) into equation (7) gives us an equation with constant coefficients

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + 2b \frac{d^3 X}{dx^3} + b^2 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{p^2 \gamma A_0}{E g I_0} X = 0. \quad (14)$$

The general solution of equation (14) is

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{r_i x}$$

where  $r_i$  are the roots of the characteristic equation

$$r^4 + 2b r^3 + b^2 r^2 - \frac{p^2 \gamma A_0}{E g I_0} = 0. \quad (15)$$

Let

$$K^2 = p^2 \frac{\gamma A_0}{E g I_0} \quad (16)$$

then equation (15) may be written as

$$(r^2 + b r - K)(r^2 + b r + K) = 0,$$

i. e.,

$$r^2 + b r - K = 0 \quad \text{or} \quad r^2 + b r + K = 0$$

and the roots are

$$r_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \pm 4K}}{2}.$$

Let

$$S_1 = \sqrt{4K + b^2} \quad \text{and} \quad S_2 = \sqrt{4K - b^2} \quad (17)$$

wherein  $4K > b^2$ . The four roots are

$$r_1 = \frac{-b + S_1}{2}, \quad r_2 = \frac{-b - S_1}{2}, \quad r_3 = \frac{-b + i S_2}{2}, \quad r_4 = \frac{-b - i S_2}{2}$$

and the general solution of equation (14) may be written as

$$X = e^{-b x/2} (a_1 e^{S_1 x/2} + a_2 e^{-S_1 x/2} + a_3 e^{i S_2 x/2} + a_4 e^{-i S_2 x/2})$$

let

$$a_1 = \alpha + \beta \quad \text{and} \quad a_2 = \alpha - \beta$$

then

$$\begin{aligned} a_1 e^{S_1 x/2} + a_2 e^{-S_1 x/2} &= (\alpha + \beta) e^{S_1 x/2} + (\alpha - \beta) e^{-S_1 x/2} \\ &= 2\alpha \cosh \frac{S_1 x}{2} + 2\beta \sinh \frac{S_1 x}{2} \end{aligned}$$

and

$$e^{i S_2 x/2} = \cos \frac{S_2 x}{2} + i \sin \frac{S_2 x}{2}, \quad e^{-i S_2 x/2} = \cos \frac{S_2 x}{2} - i \sin \frac{S_2 x}{2},$$

we may now write  $X$  as follows

$$X = e^{-b x/2}$$

$$\times \left( 2\alpha \cosh \frac{S_1 x}{2} + 2\beta \sinh \frac{S_1 x}{2} + [a_3 + a_4] \cos \frac{S_2 x}{2} + [a_3 - a_4] i \sin \frac{S_2 x}{2} \right)$$

or

$$X = e^{-b x/2} \left( C_1 \cosh \frac{S_1 x}{2} + C_2 \sinh \frac{S_1 x}{2} + C_3 \cos \frac{S_2 x}{2} + C_4 \sin \frac{S_2 x}{2} \right) \quad (18)$$

wherein  $C_1, C_2, C_3, C_4$  are constants.

In order to formulate the boundary conditions we shall need the following derivatives of  $X$

$$\left. \begin{aligned} X' = \frac{dX}{dx} &= e^{-b x/2} \left\{ C_1 \left[ S_1 \sinh \frac{S_1 x}{2} - b \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \right. \\ &\quad + C_2 \left[ S_1 \cosh \frac{S_1 x}{2} - b \sinh \frac{S_1 x}{2} \right] \\ &\quad + C_3 \left[ -S_2 \sin \frac{S_2 x}{2} - b \cos \frac{S_2 x}{2} \right] \\ &\quad \left. + C_4 \left[ S_2 \cos \frac{S_2 x}{2} - b \sin \frac{S_2 x}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} X'' = \frac{d^2 X}{dx^2} &= e^{-b x/2} \left\{ C_1 \left[ -\frac{b S_1}{2} \sinh \frac{S_1 x}{2} + \frac{(S_1^2 + b^2)}{4} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \right. \\ &\quad + C_2 \left[ \frac{(S_1^2 + b^2)}{4} \sinh \frac{S_1 x}{2} - \frac{b S_1}{2} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \\ &\quad + C_3 \left[ \frac{b S_2}{2} \sin \frac{S_2 x}{2} + \frac{(b^2 - S_2^2)}{4} \cos \frac{S_2 x}{2} \right] \\ &\quad \left. + C_4 \left[ \frac{(b^2 - S_2^2)}{4} \sin \frac{S_2 x}{2} - \frac{b S_2}{2} \cos \frac{S_2 x}{2} \right] \right\} \\ &= e^{-b x/2} \{ C_1 f(x) + C_2 g(x) + C_3 h(x) + C_4 j(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 X''' = \frac{d^3 X}{dx^3} = e^{-bx/2} \left\{ C_1 \left[ -\frac{b S_1^2}{4} \cosh \frac{S_1 x}{2} + \frac{b^2 S_1}{4} \sinh \frac{S_1 x}{2} \right. \right. \\
 \left. \left. + (S_1^2 + b^2) \left( \frac{S_1}{8} \sinh \frac{S_1 x}{2} - \frac{b}{8} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right) \right] \right. \\
 \left. + C_2 \left[ (S_1^2 + b^2) \left( \frac{S_1}{8} \cosh \frac{S_1 x}{2} - \frac{b}{8} \sinh \frac{S_1 x}{2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{b S_1^2}{2} \sinh \frac{S_1 x}{2} + \frac{b^2 S_1}{4} \cosh \frac{S_1 x}{2} \right] \right. \\
 \left. + C_3 \left[ \frac{b S_2^2}{4} \cos \frac{S_2 x}{2} - \frac{b^2 S_2}{4} \sin \frac{S_2 x}{2} \right. \right. \\
 \left. \left. + (b^2 - S_2^2) \left( \frac{S_2}{8} \sin \frac{S_2 x}{2} - \frac{b}{8} \cos \frac{S_2 x}{2} \right) \right] \right. \\
 \left. + C_4 \left[ \frac{b S_2^2}{4} \sin \frac{S_2 x}{2} + \frac{b^2 S_2}{4} \cos \frac{S_2 x}{2} \right. \right. \\
 \left. \left. + (b^2 - S_2^2) \left( \frac{S_2}{8} \cos \frac{S_2 x}{2} - \frac{b}{8} \sin \frac{S_2 x}{2} \right) \right] \right\}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

#### 4. Applications

We seek the frequency equation (the equation whose roots give us the frequencies of vibration of the normal modes) for beams with different end conditions. From these roots it is then possible to obtain the corresponding modal configurations.

##### *Case 1. Simply Supported Beam*

The boundary (or end) conditions are:

$$\begin{aligned}
 (X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \\
 (IX'')_{x=0} = 0, \quad (IX'')_{x=L} = 0.
 \end{aligned}$$



Figure 1  
Simply supported beam.

From equations (18) and (20) we thus get

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 + 0 + C_3 + 0 &= 0, \\
 \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 &= 0, \\
 \frac{(S_1^2 + b^2)}{2} C_1 - b S_1 C_2 + \frac{(b^2 - S_2^2)}{2} C_3 - b S_2 C_4 &= 0, \\
 f(L) C_1 + g(L) C_2 + h(L) C_3 + j(L) C_4 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

If all the  $C'_s \neq 0$  (i. e., the deflections  $\neq 0$ ) then the determinant of the coefficients of the  $C'_s$  in the above homogeneous set of equations must vanish. Expanding this determinant, we obtain

$$(8 K^2 - b^4) \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} + b^2 S_1 S_2 \left( \cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} - 1 \right) = 0 \quad (23)$$

wherein, as before:  $S_1^2 = 4 K + b^2$  and  $S_2^2 = 4 K - b^2$ . The unknown in the frequency equation (23) is  $K$ . The value of the circular frequency  $p$  follows then from equation (16).

Equations (22) also give us the ratios

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3}{C_1} &= -1, \\ \frac{C_2}{C_1} &= \frac{b S_2 \left( \cosh \frac{S_1 L}{2} - \cos \frac{S_2 L}{2} \right) + 4 K \sin \frac{S_2 L}{2}}{b \left( S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} - S_2 \sinh \frac{S_1 L}{2} \right)}, \\ \frac{C_4}{C_1} &= \frac{b S_1 \left( \cos \frac{S_2 L}{2} - \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) - 4 K \sinh \frac{S_1 L}{2}}{b \left( S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} - S_2 \sinh \frac{S_1 L}{2} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Equation (23) is satisfied by an infinite number of values of  $K$ , i. e., an infinite number of  $p$ . Call these values  $p_j$  and the associated quantities  $K_j$ ,  $S_{j1}$ ,  $S_{j2}$ ,  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_{j1}$ ,  $C_{j2}$ ,  $C_{j3}$  and  $C_{j4}$ . The general solution of equation (1) becomes

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{j1} e^{-b x/2} (A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t) \\ &\times \left( \cosh \frac{S_{j1} x}{2} + \frac{C_{j2}}{C_{j1}} \sinh \frac{S_{j1} x}{2} + \frac{C_{j3}}{C_{j1}} \cos \frac{S_{j2} x}{2} + \frac{C_{j4}}{C_{j1}} \sin \frac{S_{j2} x}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

The constants  $A_j$  and  $B_j$  are obtained from the initial conditions as given by equations (12), and may absorb the remaining  $C$  constant.

*Limiting Case:* If  $b = c = 0$  then from equations (13) we have  $A = A_0$  and  $I = I_0$ , i. e., the simply supported beam with constant cross section. Equation (23) reduces to:

$$\sin \frac{S_2 L}{2} = 0 \quad \text{or} \quad \sin \sqrt{K} L = 0,$$

the consecutive roots of this equation are

$$\frac{S_{j2} L}{2} = j \pi \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Equations (22) give us:

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \frac{C_2}{C_4} = -\frac{\sin(S_2 L/2)}{\sinh(S_1 L/2)} = 0, \quad \therefore C_2 = 0 \quad \text{and} \quad C_4 \neq 0,$$

and equation (25) becomes:

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t) \sin \frac{j\pi x}{L};$$

these results agree with the well-known solution [13].

We proceed next to solve the frequency equation (23) for

$$c = 1 \quad \therefore A = A_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad I = I_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{L}.$$

Let

$$k = K L^2 \tag{26}$$

and from equations (17)

$$S_1 = \sqrt{4K + b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4k + 1}, \quad S_2 = \sqrt{4K - b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4k - 1}.$$

Equation (23) becomes

$$\left. \begin{aligned} (8k^2 - 1) \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \\ + \sqrt{16k^2 - 1} \left( \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} - 1 \right) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Denote the left side of this equation by  $f(k)$ . Both parts of  $f(k)$  are positive, thus  $k$  is chosen so that  $\sin \sqrt{k - (1/4)}$  and  $\cos \sqrt{k - (1/4)}$  have opposite signs. Trials show that  $k \cong 10$ , so that

$$8k^2 - 1 \cong 8k^2 \quad \text{and} \quad \sqrt{16k^2 - 1} \cong 4k, \quad \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \gg 1, \quad \text{etc.}$$

Equation (27) may be approximated by

$$k \tan \sqrt{k - \frac{1}{4}} \tanh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \cong -\frac{1}{2} \tag{27a}$$

and the graphical solution is indicated in Figure 2.

The intersection points (1, 2, 3, ...) give us the approximate values of  $\sqrt{k - (1/4)}$ , i. e., the  $k$  values.

For  $k = 9.77$ , equation (27) gives  $f(k) = +8.5$ .

For  $k = 9.79$ , equation (27) gives  $f(k) = -13$ . We accept as the first root:

$$k_1 = 9.78 = (3.12)^2.$$

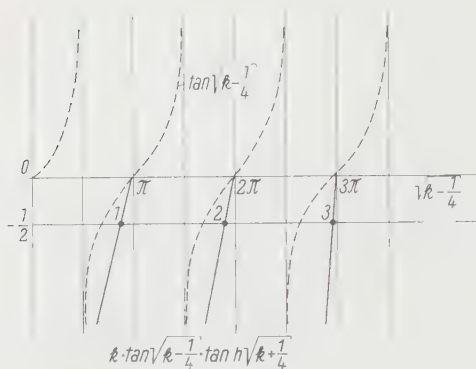


Figure 2

Graphical solution of frequency equation.

The second root is in the neighborhood of  $2\pi$  in Figure 2, i. e.,

$$6.28 \cong \sqrt{k - \frac{1}{4}}.$$

For  $k = 39.4$ , equation (27) gives  $f(k) = -1.68$ .

For  $k = 39.6$ , equation (27) gives  $f(k) = -0.1$ . We accept as the second root:

$$k_2 = 39.6 = (6.29)^2.$$

From equations (16) and (26):

$$K_i^2 = \frac{p_i^2 \gamma A_0}{E g I_0} = \frac{k_i^2}{L^4} \quad \text{or} \quad p_i = \frac{k_i}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}.$$

Thus the first two circular frequencies are:

$$p_1 = \frac{(3.12)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(6.29)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}; \quad (28)$$

it may be seen that  $6.29 = 3.12 = 3.17 \cong \pi$  and Figure 2 shows that the roots are spaced at intervals of approximately  $\pi^2$  for the higher modes.

For the first mode ( $c = 1$ ,  $b = 1/L$ ,  $k_1 = 9.78$ , etc.) equations (24) reduce to:

$$\frac{C_2}{C_1} = -1.115, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = 7.43$$

and equation (25) gives us the first modal configuration

$$X_1 = e^{-x/2L} \times \left( \cosh 3.17 \frac{x}{L} - 1.115 \sinh 3.17 \frac{x}{L} - \cos 3.09 \frac{x}{L} + 7.43 \sin 3.09 \frac{x}{L} \right); \quad (29)$$

this is plotted in Figure 3.



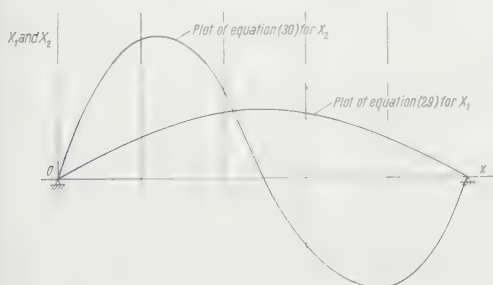
For the second mode ( $c = 1$ ,  $b = 1/L$ ,  $k_2 = 39.6$ , etc.) equations (24) reduce to:

$$\frac{C_2}{C_1} = 1, \quad \frac{C_3}{C_1} = 1, \quad \frac{C_4}{C_1} = 13.6$$

and equation (25) gives us the second modal configuration

$$X_2 = e^{-x/2L} \left( \cosh \frac{6.3x}{L} - \sinh \frac{6.3x}{L} - \cos \frac{6.3x}{L} + 13.6 \sin \frac{6.3x}{L} \right); \quad (30)$$

this is also plotted in Figure 3.



$\frac{x}{L}$	$X_1$	$X_2$
0	0	0
0.2	3.57	11.66
0.4	5.56	7.22
0.6	5.34	-5.39
0.8	3.19	-8.79
1.0	0.05	0

Figure 3  
Modal configurations for Case 1.

### Case 2. Beam With Both Ends Fixed

The boundary conditions are:

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \\ (X')_{x=0} = 0, \quad (X')_{x=L} = 0.$$

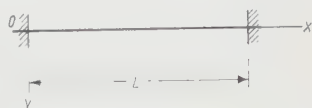


Figure 4  
Fixed end beam.

From equations (18) and (19) we obtain

$$\left. \begin{aligned} C_1 + 0 + C_3 + 0 &= 0, \\ \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 &= 0, \\ -b C_1 + S_1 C_2 - b C_3 + S_2 C_4 &= 0, \\ \left( S_1 \sinh \frac{S_1 L}{2} - b \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) C_1 + \left( S_1 \cosh \frac{S_1 L}{2} - b \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) C_2 \\ + \left( -S_2 \sin \frac{S_2 L}{2} - b \cos \frac{S_2 L}{2} \right) C_3 + \left( S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} - b \sin \frac{S_2 L}{2} \right) C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Expanding the determinant of the coefficients of the  $C$ 's (compare Case 1), we obtain the frequency equation

$$b^2 \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} + S_1 S_2 \left( 1 - \cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) = 0. \quad (32)$$

Equations (31) also give us the ratios

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= \frac{\cos \frac{S_2 L}{2} - \cosh \frac{S_1 L}{2}}{\sinh \frac{S_1 L}{2} - \frac{S_1}{S_2} \sin \frac{S_2 L}{2}}, \\ \frac{C_3}{C_1} &= -1, \\ \frac{C_4}{C_1} &= \frac{S_1 \left( \cosh \frac{S_1 L}{2} - \cos \frac{S_2 L}{2} \right)}{S_2 \sinh \frac{S_1 L}{2} - S_1 \sin \frac{S_2 L}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

The complete solution of Case 2 is equation (25) with the  $p_j$  from equation (32) and the  $C$ -ratios from equations (33).

*Limiting Case:* If  $b = c = 0$ , equations (13) reduce to  $A = A_0$  and  $I = I_0$ , i. e., the fixed-ended beam of constant cross section. Equation (32) becomes

$$\cos \sqrt{K} L \cosh \sqrt{K} L = 1$$

as it should be [13].

As in Case 1, we proceed to solve the frequency equation for

$$c = 1 \quad \therefore A = A_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad I = I_0 e^{x/L} \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{L}$$

and, as before

$$k = K L^2 \quad \therefore S_1 = \sqrt{4K + b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4k + 1}, \quad S_2 = \sqrt{4K - b^2} = \frac{1}{L} \sqrt{4k - 1}.$$

Equation (32) becomes

$$\sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} + \sqrt{16k^2 - 1} \left( 1 - \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) = 0. \quad (34)$$

The first two roots are

$$k_1 = 22.4 = (4.73)^2, \quad k_2 = 61.8 = (7.85)^2.$$

And the first two circular frequencies are

$$p_1 = \frac{(4.73)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(7.85)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}. \quad (35)$$

Note that  $7.85 - 4.73 = 3.12 \cong \pi$ , i. e., the adjoining  $k$ 's differ by about  $\pi^2$  [as is evident in equation (34)].

For the first mode ( $c = 1$ ,  $b = 1/L$ ,  $k_1 = 22.4$ , etc.) equations (33) give

$$\frac{C_2}{C_1} = -0.984, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = +0.992$$

and from equation (25)

$$X_1 = e^{-x/2L} \left( \cosh 4.75 \frac{x}{L} - 0.98 \sinh 4.75 \frac{x}{L} - \cos 4.71 \frac{x}{L} + 0.99 \sin 4.71 \frac{x}{L} \right) \quad (36)$$

this is plotted in Figure 5.

For the second mode ( $c = 1$ ,  $b = 1/L$ ,  $k_2 = 61.8$ , etc.) equations (33) give

$$\frac{C_2}{C_1} = -1.01, \quad \frac{C_3}{C_1} = -1, \quad \frac{C_4}{C_1} = +1.02$$

and from equation (25)

$$X_2 = e^{-x/2L} \left( \cosh 7.88 \frac{x}{L} - 1.01 \sinh 7.88 \frac{x}{L} - \cos 7.84 \frac{x}{L} + 1.02 \sin 7.84 \frac{x}{L} \right) \quad (37)$$

this is also plotted in Figure 5.

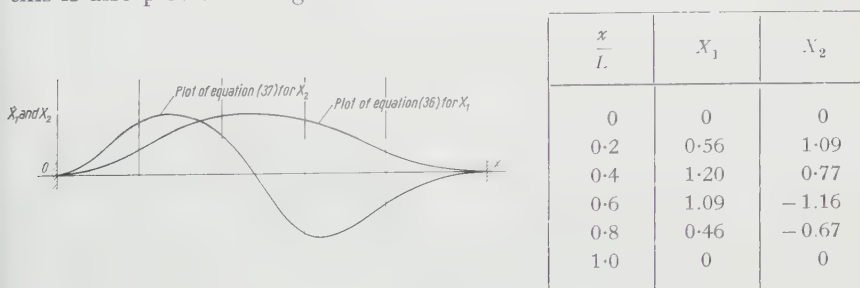


Figure 5  
Modal configurations for Case 2.

### Case 3. Beam Simply Supported at One End and Fixed at the Other End

The boundary conditions are:

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \quad (IX'')_{x=0} = 0, \quad (X')_{x=L} = 0.$$



Figure 6

Beam with one end simply supported, other end fixed.

From equations (18), (19) and (20) we obtain

$$\left. \begin{aligned} C_1 + 0 + C_3 + 0 &= 0, \\ \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 &= 0, \\ \frac{(S_1^2 + b^2)}{2} C_1 - b S_1 C_2 + \frac{(b^2 - S_2^2)}{2} C_3 - b S_2 C_4 &= 0, \\ \left( S_1 \sinh \frac{S_1 L}{2} - b \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) C_1 + \left( S_1 \cosh \frac{S_1 L}{2} - b \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) C_2 \\ - \left( S_2 \sin \frac{S_2 L}{2} + b \cos \frac{S_2 L}{2} \right) C_3 + \left( S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} - b \sin \frac{S_2 L}{2} \right) C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Expanding the determinant of the coefficients of the  $C$ 's (as in Cases 1 and 2), we obtain the frequency equation

$$\left. \begin{aligned} b S_1 S_2 \left( 1 - \cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) + b^3 \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \\ + 2 K \left( S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} - S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

*Limiting Case:* If  $b = c = 0$ , the beam is prismatical and equation (39) becomes

$$\tan \sqrt{K} L = \tanh \sqrt{K} L$$

as it should be [13].

As in Cases 1 and 2, we proceed to solve the frequency equation for  $c = 1$ . Equation (39) becomes

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{16 k^2 - 1} \left( 1 - \cos \sqrt{k} \frac{1}{4} \cosh \sqrt{k} \frac{1}{4} \right) + \sin \sqrt{k} \frac{1}{4} \sinh \sqrt{k} \frac{1}{4} \\ + 2 k \left( \sqrt{4 k + 1} \sin \sqrt{k} \frac{1}{4} \cosh \sqrt{k} \frac{1}{4} \right. \\ \left. - \sqrt{4 k - 1} \cos \sqrt{k} \frac{1}{4} \sinh \sqrt{k} \frac{1}{4} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

The first two roots are

$$k_1 = 16.55 = (4.07)^2, \quad k_2 = 51.0 = (7.15)^2.$$

And the first two circular frequencies are

$$\dot{p}_1 = \frac{(4.07)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad \dot{p}_2 = \frac{(7.15)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}.$$

#### Case 4. Cantilever Beam

The boundary conditions are:

$$(I X'')_{x=0} = 0, \quad \frac{d}{dx} (I X'')_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0, \quad (X')_{x=L} = 0.$$



Figure 7  
Cantilever beam.

From equations (18), (19), (20), and (21) we obtain

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(S_1^2 + b^2)}{2} C_1 - b S_1 C_2 + \frac{(b^2 - S_2^2)}{2} C_3 - b S_2 C_4 = 0, \\ & -b (3 S_1^2 + b^2) C_1 + S_1 (3 b^2 + S_1^2) C_2 \\ & \quad - b (3 S_2^2 + b^2) C_3 - S_2 (3 b^2 + S_2^2) C_4 = 0, \\ & \cosh \frac{S_1 L}{2} C_1 + \sinh \frac{S_1 L}{2} C_2 + \cos \frac{S_2 L}{2} C_3 + \sin \frac{S_2 L}{2} C_4 = 0, \\ & \left( S_1 \sinh \frac{S_1 L}{2} - b \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) C_1 + \left( S_1 \cosh \frac{S_1 L}{2} - b \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) C_2 \\ & \quad - \left( S_2 \sin \frac{S_2 L}{2} + b \cos \frac{S_2 L}{2} \right) C_3 + \left( S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} - b \sin \frac{S_2 L}{2} \right) C_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Expanding the determinant of the coefficients of the  $C$ 's (as in Cases 1, 2, and 3), we obtain the frequency equation

$$\left. \begin{aligned} & S_1 S_2 \left( 1 + \cos \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} \right) + 3 b^2 \sin \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \\ & \quad + 2 b \left( S_1 \sin \frac{S_2 L}{2} \cosh \frac{S_1 L}{2} + S_2 \cos \frac{S_2 L}{2} \sinh \frac{S_1 L}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

*Limiting Case:* If  $b \rightarrow 0$ , the beam is prismatical and equation (42) becomes

$$\cos \sqrt{K} L \cosh \sqrt{K} L = -1$$

as it should be [13].

As in Cases 1, 2, and 3, we proceed to solve the frequency equation for  $c = 1$ . Equation (42) becomes

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{16k^2 - 1} \left( 1 + \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) \\ & + 3 \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \\ & + 2 \left( \sqrt{4k + 1} \sin \sqrt{k - \frac{1}{4}} \cosh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right. \\ & \left. + \sqrt{4k - 1} \cos \sqrt{k - \frac{1}{4}} \sinh \sqrt{k + \frac{1}{4}} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

The first two roots are

$$k_1 = 4.5 = (2.12)^2, \quad k_2 = 24.7 = (4.97)^2.$$

And the first two circular frequencies are

$$p_1 = \frac{(2.12)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}, \quad p_2 = \frac{(4.97)^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}.$$

## 5. Actual Sections of Surfaces of Revolution

We consider now the actual shapes of beams that satisfy the assumed conditions

$$A(x) = A_0 e^{cx/L}, \quad I(x) = I_0 e^{cx/L}.$$

$$\therefore \frac{I}{A} = \frac{I_0}{A_0} = k_0^2 = \text{const}$$

(the square of the radius of gyration of the cross section of the beam).

In general, the beams will be hollow, and appear as shown in Figure 8.

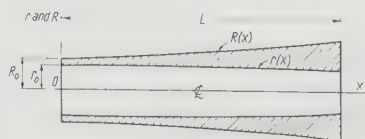


Figure 8  
Beams with constant  $I/A$ .

For hollow circular cross sections, we have

$$A(x) = A_0 e^{cx/L} = \pi (R^2 - r^2), \quad I(x) = I_0 e^{cx/L} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{A}{4} (R^2 + r^2)$$

$$\therefore \frac{I}{A} = \frac{I_0}{A_0} = k_0^2 = \frac{R^2 + r^2}{4} = \frac{R_0^2 + r_0^2}{4}.$$



Since

$$R^2 - r^2 = \frac{A_0 e^{cx/L}}{\pi} \quad \text{and} \quad R^2 + r^2 = \frac{4 I_0}{A_0}.$$

We obtain

$$R^2 = \frac{2 I_0}{A_0} + \frac{A_0 e^{cx/L}}{2 \pi} \quad \text{and} \quad r^2 = \frac{2 I_0}{A_0} - \frac{A_0 e^{cx/L}}{2 \pi}. \quad (44)$$

But for  $r \geq 0$

$$\frac{cx}{L} \leq \log \frac{4 \pi I_0}{A_0^2}$$

and  $x/L \leq 1$

$$\therefore c \leq \log \frac{4 \pi I_0}{A_0^2} \quad \text{or} \quad c \leq \log \frac{(R_0^2 + r_0^2)}{(R_0^2 - r_0^2)}. \quad (45)$$

Equations (44) may be written as

$$2 R^2 = (R_0^2 + r_0^2) + (R_0^2 - r_0^2) e^{cx/L} \quad \text{and} \quad 2 r^2 = (R_0^2 + r_0^2) - (R_0^2 - r_0^2) e^{cx/L}. \quad (46)$$

We may assign any values to  $R_0$  and  $r_0$ , provided we satisfy equation (45). Let:

$$j = \frac{R_0}{r_0} = \text{const.}$$

Equations (46) become

$$2 \left( \frac{R}{r_0} \right)^2 = (j^2 + 1) + (j^2 - 1) e^{cx/L} \quad \text{and} \quad 2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 = (j^2 + 1) - (j^2 - 1) e^{cx/L}. \quad (47)$$

Equation (45) gives

$$c \leq \log \frac{(j^2 + 1)}{(j^2 - 1)}.$$

Or if we assign a value to  $c$  (say  $c = 1$ ) then

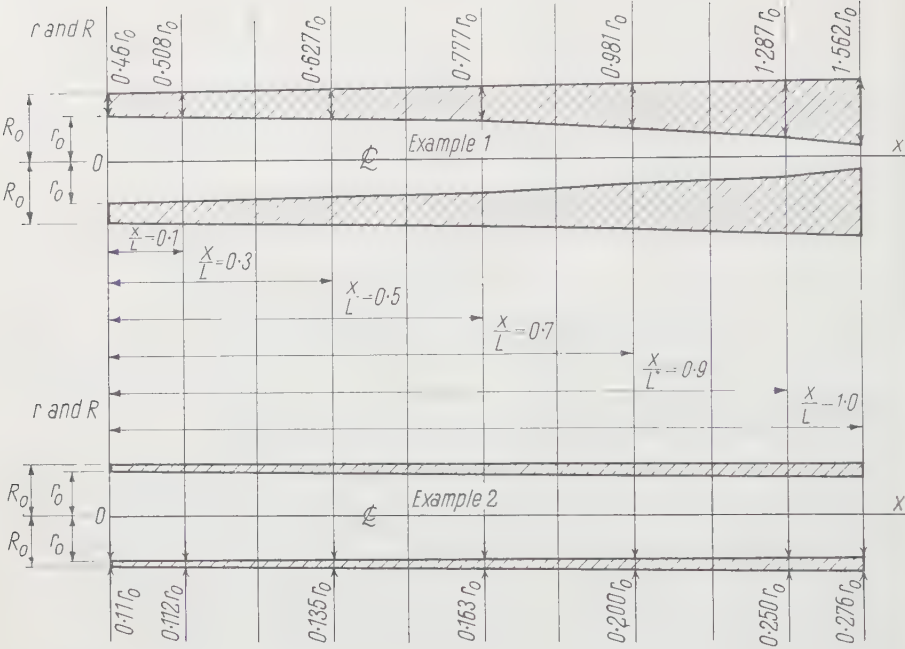
$$c \leq \frac{(j^2 + 1)}{(j^2 - 1)} \quad \text{or} \quad 1 < j^2 \leq \frac{(e^c + 1)}{(e^c - 1)}. \quad (48)$$

### Example 1

For  $c = 1$ , equation (48) gives  $j \leq 2.16$ . Choose  $j = R_0/r_0 = 1.46$ . Equations (47) give

$$\left( \frac{R}{r_0} \right)^2 = 1.56 + 0.56 e^{x/L} \quad \text{and} \quad \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 = 1.56 - 0.56 e^{x/L}.$$

Numerical values are given in Table I and the plot in Figure 9.



$c = 1, \quad A = A_0 e^{x/L}, \quad I = I_0 e^{x/L}, \quad j = 1.46, 1.10, \dots$				
Cases	$k_1$	$k_2$	...	$p_i$ rad/s
1. 	$9.78 = (3.12)^2$	$39.6 = (6.29)^2$	...	$p_i = \frac{k_i}{L^2} \sqrt{\frac{E g I_0}{\gamma A_0}}$
2. 	$22.4 = (4.73)^2$	$61.8 = (7.85)^2$	...	
3. 	$16.55 = (4.07)^2$	$51.0 = (7.15)^2$	...	
4. 	$4.5 = (2.12)^2$	$24.7 = (4.97)^2$	...	
				$f_i = \frac{p_i}{2\pi}$

Figure 9  
Summary and plot of Examples 1 and 2.

Table 1

$\frac{x}{L}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
$\frac{R}{r_0}$	1.479	1.524	1.576	1.641	1.714	1.759
$\frac{r}{r_0}$	0.971	0.897	0.799	0.660	0.427	0.197
$\frac{R-r}{r_0}$	0.508	0.627	0.777	0.981	1.287	1.562

*Example 2*

Again  $c = 1$  and we choose  $j = R_0/r_0 = 1.10$ . Equations (47) give

$$\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 = 1.105 + 0.105 e^{x/L} \quad \text{and} \quad \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = 1.105 - 0.105 e^{x/L}.$$

Numerical values are given in Table 2 and the plot in Figure 9.

Table 2

$\frac{x}{L}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
$\frac{R}{r_0}$	1.106	1.118	1.130	1.146	1.170	1.181
$\frac{r}{r_0}$	0.994	0.983	0.967	0.946	0.920	0.905
$\frac{R-r}{r_0}$	0.112	0.135	0.163	0.200	0.250	0.276

## REFERENCES

- [1] G. KIRCHHOFF, *Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt*. Mber. Akad. Wiss., Berlin 2, Okt. (1879).
- [2] MAYER Z. CAPELLEN, Wied. Ann. 33, 661 (1888).
- [3] J. MORROW, *On the Lateral Vibrations of Bars of Uniform and Varying Sectional Area*, Phil. Mag. 10, 113 (1905).
- [4] J. W. NICHOLSON, *The Lateral Vibration of Bars of Variable Sections*, Proc. Roy. Soc., London [A] 93, 506 (1917).
- [5] N. MONONOBÉ, Z. angew. Math. Mech., 1 444 (1921).
- [6] D. M. WRINCH, *On the Vibrations of Bars of Variable Cross Sections*, Phil. Mag. 1923, Aug., 273; and Proc. Roy. Soc., London [A] 101, 493-508 (1922).
- [7] AKIMASA ONO, J. Soc. mech. Engrs. Japan 27, 467 (1924); and 28, 429 (1925).

- [8] W. HORT, *Berechnung der Eigentöne nicht gleichförmiger, insbesondere vergüteter Stäbe*, Z. tech. Phys. 7, 181 (1925).
- [9] E. SCHWERIN, *Über Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnittes*, Z. tech. Phys. 8, 264 (1927).
- [10] G. TEMPLE, *The Computation of Characteristic Numbers and Characteristic Functions*, Proc. London Math. Soc. 29 (2), 257 (1929).
- [11] G. TEMPLE and W. BICKLEY, *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering* (Oxford University Press, 1933).
- [12] W. T. WHITE, *On Integral Equations Approach to Problems of Vibrating Beams*, Parts I and II, J. Franklin Inst. 245, Jan., 25–36 (1948); and Feb., 117–133 (1948).
- [13] S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd edition (D. Van Nostrand Co., New York 1955).
- [14] N. TALEB, *Free Lateral Vibrations of Beams With Non-Uniform Cross Sections*, Ph. D. Dissertation (Princeton University 1955).

### Zusammenfassung

Es werden die freien Querschwingungen von Balken mit exponentiell veränderlichen Querschnitten und Trägheitsmomenten für verschiedene Randbedingungen untersucht. Die Frequenzgleichungen, Eigenfrequenzen und Schwingungsformen werden angegeben (wobei die Auswertung einfachheitshalber auf die beiden ersten Eigenschwingungen beschränkt bleibt).

(Received: April 15, 1956.)

### Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

## Ein kompaktes Dekadenzählgerät mit bedarfsweiser Umschaltung der Zählkanäle, Untersetzerstufen und Zählwerke

VON WERNER BEUSCH UND DANIEL MAEDER, Zürich<sup>1)</sup>

### I. Anforderungen an Mehrfachzählgeräte

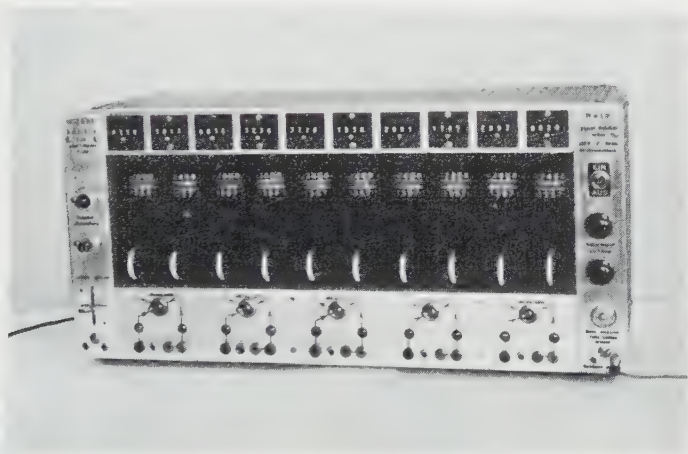
In der Kernphysik stellt sich immer wieder das Problem, elektrische Impulse aus Messapparaten separat, aber gleichzeitig zu zählen: etwa die Gesamtzahl der in einem oder mehreren Strahlungsdetektoren erzeugten Impulse und gleichzeitig dazu verschiedene Zahlen von Impulsen, die nach gewissen Kriterien (Grösse, Gleichzeitigkeit mit anderen Ereignissen usw.) ausgewählt sind. Anlagen, die bis zu 20 verschiedene Zählungen simultan durchführen, werden sehr häufig gebraucht<sup>2)</sup>. Bei Apparaturen dieser Grössenordnung erfordert die Summierung mittels elektromechanischer Zählwerke weniger Aufwand als eine rein elektro-

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> E. BALDINGER und W. HAEERLI, *Impulsverstärker und Impulsspektrographen*. *Ergebn. exakt. Naturw.* 27, 248 (1953); A. B. VAN RENNES, *Pulse-Amplitude Analysis in Nuclear Research*, *Nucleonics* 10, Nr. 7, 20; Nr. 8, 22 (1952).

nische Zählung<sup>3)</sup>. Die mechanischen Zählwerke erlauben eine rasche Ablesung, insbesondere, wenn auf die Interpolation der Untersetzer verzichtet werden kann. Dies erfordert allerdings, dass man das Untersetzungsverhältnis in jedem Kanal der jeweils vorhandenen Stosshäufigkeit anpasst, wobei im allgemeinen nur ein Bruchteil der eingebauten Untersetzerstufen ausgenützt wird.

Weiter ist es oft wünschbar, zum Beispiel bei Messungen an radioaktiven Substanzen kurzer Halbwertszeit, ohne Unterbruch zu zählen, aber mit Able-  
sungen in kurzen Zeitabständen.



Figur 1

Frontansicht des umschaltbaren 5-bis-10-Kanal-Zählgeräts mit eingebautem Netzteil.

Um eine gegebene Zahl von Untersetzern möglichst vollständig auszunützen und um die ganze Anlage klein und handlich zu halten, haben wir dem Bau des in Figur 1 abgebildeten Mehrfachzählgeräts folgende Bedingungen zugrunde gelegt<sup>4)</sup>:

1. Verwendung von 10 dekadischen Untersetzereinheiten<sup>5)</sup>.
  2. Jede Dekadenstufe kann wahlweise entweder
- a) einzeln betrieben, das heisst direkt mit einer Endstufe mit Zählwerk verbunden werden, oder
- b) mit einer benachbarten Stufe zu einem hundertfachen Untersetzer kombiniert werden.

Die für diese Umschaltungen benützten 5 Kippschalter sind in Figur 1 unterhalb der Dekadeneinheiten sichtbar.

3. Jeder der 10 Eingänge führt zunächst auf einen relativ hochauflösenden Zweifachuntersetzer, um die Zählverluste in den nachfolgenden Dekadenstufen

<sup>3)</sup> Etwa nach Art des von HUTCHINSON und SCARROTT beschriebenen Systems, welches bei grosser Anzahl von Kanälen aufwandmässig günstiger wird. Siehe Phil. Mag. 42, II, 792 (1951).

<sup>4)</sup> Vorläufige Mitteilung: W. BEUSCH und D. MAEDER, *Ein einfaches Dekaden-Zählgerät mit umschaltbaren Kanal- und Untersetzungszahlen*. Helv. Phys. Acta 29, Fasz. 3, 263 (1956).

<sup>5)</sup> Der Firma Philips-Electronica danken wir für die anlässlich des ETH-Jubiläums erfolgte Schenkung von betriebsfertigen Steckeinheiten des Typs 88929/02 mit E1T-Dekadenröhren.

klein zu halten. In Figur 1 sind oberhalb der Eingangs- und Erdungsbuchsen die zu den Zweifachuntersetzern gehörigen Interpolationslämpchen erkennbar. Sie dienen nur der Funktionskontrolle. Für die nach 2b) zusammengefassten Dekadenpaare ist jeweils nur der geradzahlige (rechts befindliche) Eingang wirksam.

4. Zur Ermöglichung ununterbrochener Messungen in fünf Kanälen werden die 10 Untersetzer und Zählwerke in zwei Gruppen (I und II) unterteilt. Ein gemeinsamer Schalter (in Figur 1 links aussen) erlaubt

- a) alle Kanäle dauernd (siehe Figur 2: Stellung «I + II»),
- b) abwechselungsweise die eine oder andere Gruppe in Betrieb zu setzen, so dass immer eine Gruppe zwecks Ablesung und Nullstellung stillgelegt ist.

Soweit dabei die Dekadeneinheiten einzeln betrieben werden (20fache Untersetzung), so wird jeweils der ganze Zählkanal stillgelegt, so dass auch die Dekaden abgelesen und auf 0 gestellt werden können. Sind zwei Dekadeneinheiten zu einem 20fachen Untersetzer zusammengefasst, so wird nur von den zugehörigen Zählwerken eines stillgelegt. Wegen der fehlenden Interpolationsmöglichkeit ist diese Betriebsart auf hohe Impulsfrequenzen beschränkt.

Entsprechend der alternierenden Betriebsmöglichkeit sind zwei Rückstell-tasten vorhanden (siehe Figur 1, links aussen).

5. Die Eingänge haben auf kurze negative Impulse (Anstieg  $< 0,5 \mu\text{s}$ , Abfall  $> 1 \mu\text{s}$ ) von  $\geq 10 \text{ V}$  Amplitude anzusprechen, wie sie in Apparaturen mit mehreren Zählausgängen normalerweise verfügbar sind oder sich allenfalls aus Zählimpulsen anderer Form mittels eines RC-Diodengliedes leicht herstellen lassen.

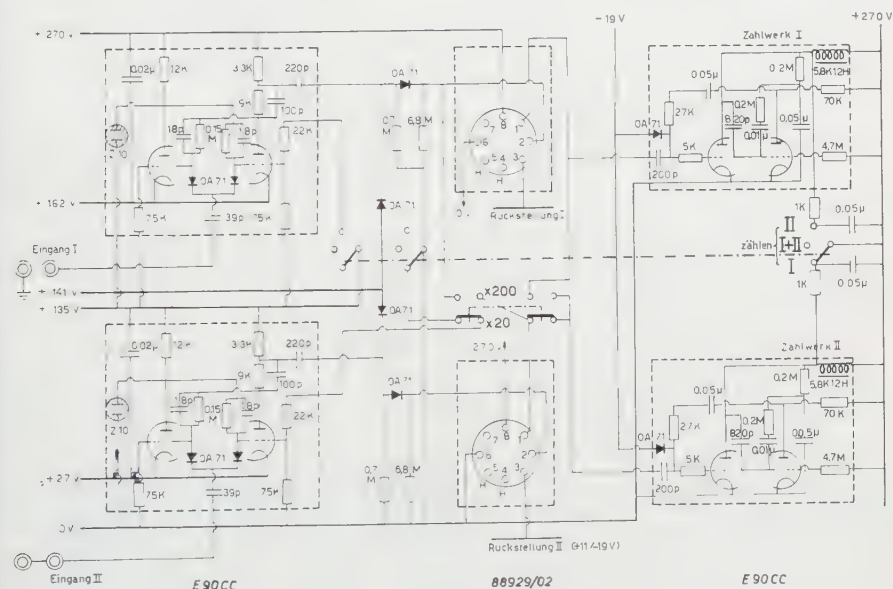
6. Die Endstufen haben Zählwerke von  $5800 \Omega$  und  $12 \text{ Hy}$  (Anzug  $10 \text{ mA}$ , Abfall  $2 \text{ mA}$ ) bis zu 20 mal pro Sekunde zu betätigen. Der hohe Widerstandswert erlaubt, an Stelle eines Thyratrons eine normale Doppeltriode E90CC als Endröhre zu verwenden, mit dem Vorteil der unabhängigen Wahl von Stromleitungs- und Erholungsdauer.

## II. Eingangsstufen und Umschaltungen

Einzelheiten der Schaltung, insbesondere die für die unter 2. und 4. besprochenen Kombinationsmöglichkeiten notwendigen Umschalter sind aus dem Schema (Figur 2) ersichtlich, das eines von den 5 identischen Paaren aus je zwei benachbarten Zählkanälen darstellt. Auf den Einbau besonderer Diskriminatorstufen kann hier gemäss 5. verzichtet werden, da die zu zählenden Impulse praktisch stets aus Apparaturen stammen, welche alle nötigen Diskriminatoren bereits enthalten, und es ist deshalb möglich, für die Zweifachuntersetzung einschliesslich der Erzeugung der für die Dekadeneinheiten erforderlichen positiven Impulse spezieller Form (Amplitude  $13,5 \text{ V}$ , Anstieg  $> 20 \text{ V}/\mu\text{s}$ , Abfall  $< 2 \text{ V}/\mu\text{s}$ ) mit einer Doppeltriode je Kanal auszukommen. Nach Ansprechen des Zweifachuntersetzers wird die Kopplungskapazität von  $220 \text{ pF}$  über den Spannungsteiler im Anodenwiderstand der einen Hälfte der E90CC um  $13,5 \text{ V}$  umgeladen. Ein negativer Ladungsstoss wird sogleich ( $< 1 \mu\text{s}$ ) durch eine Diode 0A71 gegen die Gleichspannung von  $+ 141 \text{ V}$  abgeführt; eine positive Ladung dagegen wird nur langsam (über  $0,7 \text{ M}\Omega$ ) gegen  $0 \text{ V}$  abgeleitet, und der Entladungsvorgang wird durch die Diode erst aufgehalten, wenn das Potential wieder  $+ 141 \text{ V}$  erreicht, was nach  $14 \mu\text{s}$  der Fall ist. Der so gebildete  $14 \mu\text{s}$  lange positive Sägezahnimpuls wird über eine zweite Diode auf den Eingang (Kontakt Nr. 2) der zugehörigen Dekadenstufe gekoppelt. Die zweite Diode hat den Zweck, die bei einem erneuten



Ansprechen des Zweifachuntersetzers während der Dauer des positiven Sägezahnimpulses entstehende steile negative Flanke von der Dekadenstufe fernzuhalten, wobei die totale Verdrahtungskapazität des Kontakts Nr. 2 (rund 25 pF) ein



Figur 2

Schaltschema von 2 benachbarten Zählkanälen.

Widerstandswerte in  $k\Omega$  bzw.  $M\Omega$ , Kapazitätswerte in  $pF$  bzw.  $\mu F$ . Der Gruppenumschalter «I/(I + II)/II» wird für alle Kanalpaare mit einer gemeinsamen Achse betätigt.

rasches Abfallen des betreffenden Potentials verhindert. Ohne diese Massnahme würde das Zurückkippen des Zweifachumsetzers grosse zusätzliche Zählverluste der Dekadenstufe verursachen (vgl. Abschnitt III).

Die fertig erhältlichen Dekadeneinheiten (Typ 88929/02) sind in Figur 2 nur durch das Schema ihrer Steckeranschlüsse dargestellt. Zur Serieschaltung zweier Dekaden wird durch den doppelpoligen Kippschalter «/ 20/ / 200» der Ausgang (Kontakt Nr. 1) der unteren Einheit direkt mit dem Eingang (Kontakt Nr. 2) der oberen Einheit verbunden. In diesem Falle dient die zweite Diode des oberen Kanals zur Isolation zwischen dem oberen Zweifachumsetzer (der zur Gruppe I gehört) und den vereinigten Dekadenstufen, wobei vorausgesetzt werden muss, dass der Eingang I keine Impulse empfängt, solange der Gruppenwähler auf II steht. Bei der Zusammenschaltung eines Dekadenpaares muss daher der dazugehörige «Eingang I» geerdet und ständig der «Eingang II» benützt werden; die Umschaltung I/II bezieht sich in diesem Falle nur auf die Zählwerke.

Andererseits müssen bei ununterbrochen abwechselndem Betrieb der *einzelnen* Dekaden die beiden Eingänge I und II miteinander verbunden werden, worauf die doppelte Ausführung der Eingangsbuchse II hinweist.

### III. Totzeitverluste

Folgt auf einen idealen Zweifachuntersetzer ein mit einer definierten Totzeit  $T$  behafteter «langsamer» Zähler, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der letztere bis zum nächsten Schritt jeweils

$$1 \text{ Impuls verliert: } e^{-\lambda T} \left[ \frac{(\lambda T)^2}{2!} + \frac{(\lambda T)^3}{3!} \right],$$

$$2 \text{ Impulse verliert: } e^{-\lambda T} \left[ \frac{(\lambda T)^4}{4!} + \frac{(\lambda T)^5}{5!} \right]$$

usw., wobei  $\lambda$  = mittlere Frequenz der statistisch verteilten Eingangsimpulse am Zweifachuntersetzer.

Der gesamte relative Zählverlust unserer Dekadenstufen ( $T = 27 \mu\text{s}$ ) beträgt also, falls die in Abschnitt II erwähnte Möglichkeit zusätzlicher Zählverluste behoben ist:

$$\delta_{10} = \frac{(\lambda T)^2}{2} e^{-\lambda T} \left[ 1 + \frac{\lambda T}{3} + 2 \frac{(\lambda T)^2}{3 \cdot 4} \left( 1 + \frac{\lambda T}{5} \right) + \dots \right].$$

Die Totzeitverluste des wirklichen Zweifachuntersetzers ( $\tau = 1,5 \mu\text{s}$ ) liefern einen weiteren merklichen Beitrag

$$\delta_2 \approx \lambda \tau$$

an die Gesamtverluste. Durch die maximale Zählfrequenz der Endstufen und den grösstmöglichen Untersetzungsfaktor werden die zulässigen Eingangsfrequenzen auf  $\lambda \leq 4000/\text{s}$  begrenzt. Mit obigen Parametern berechnet man zum Beispiel

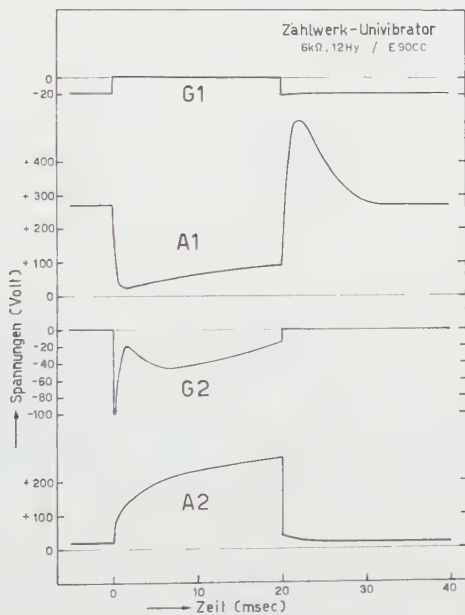
bei $\lambda$	=	1000	2000	3000	4000	5000	Eingangsimpulsen/s
$\delta_2 + \delta_{10}$	=	0,19	0,44	0,76	1,14	1,58	% Gesamtverlust

Experimentelle Bestimmungen der Totzeitverluste mit Impulsen aus einem Szintillationszähler ergaben einerseits beim Vergleich der fünf 200fach-Untersetzerkanäle untereinander eine ausgezeichnete Übereinstimmung; andererseits lieferten Kontrollmessungen mit einem schnellen  $2^{10}$ fach-Untersetzer von bekannter Totzeit eine Bestätigung der theoretischen Verluste innerhalb  $\pm 0,5\%$  bis zu Eingangsfrequenzen von 4000/s. Überbrücken der Seriedioden in den geradzahigen Kanälen (vgl. Abschnitt II) bewirkte zusätzliche Verluste von 2 ... 3%.

### IV. Endstufen

Die ebenfalls in Figur 2 dargestellte Univibratorschaltung antwortet auf die relativ kurzen ( $14 \mu\text{s}$ ) positiven Ausgangsimpulse der Dekadeneinheiten mit je einem Impuls maximaler Stromleitung durch das Zählwerk während 20 ms Dauer. Aus den in Figur 3 nach Oszillogrammen wiedergegebenen Spannungsverläufen erkennt man, dass etwa 10 ms später die von der Selbstinduktion des Zählwerks herrührende Schwingung völlig abgeklungen ist. Der zwischen Zählwerk und  $0,05\text{-}\mu\text{F}$ -Parallelkapazität liegende  $1\text{-k}\Omega$ -Widerstand dient nicht nur zur Dämpfung dieser Schwingung, sondern vor allem zur Erzeugung eines nahezu senkrechten, in der Amplitude aber begrenzten Abfalls an der Anode A1 (linke Hälfte der Doppeltriode in Figur 2) zu Beginn des Ansprechens, damit das Gitter G2 schon nach  $1 \mu\text{s}$  vollständig sperrt. Von den beiden mit G2 verbundenen Kondensatoren dient der kleinere ( $820 \text{ pF}$ ) zum Übertragen des senkrechten

Teils der negativen Flanke, während der grössere ( $0,01 \mu\text{F}$ ) zusammen mit dem Seriewiderstand von  $0,2 \text{ M}\Omega$  und einem weiteren RC-Glied dafür sorgt, dass  $G2$  keine unzulässig grossen Spannungsspitzen erhält und doch möglichst lange stark negativ bleibt. Die Kippdauer von 20 ms wird im wesentlichen durch die  $0,01\text{-}\mu\text{F}$ -Kapazität und den Ableitwiderstand von  $4,7 \text{ M}\Omega$  bestimmt; das erwähnte zusätzliche RC-Glied ( $0,05 \mu\text{F}$  und  $0,2 \text{ M}\Omega$ ) wirkt im Sinne einer Verlängerung der Kippdauer derart, dass der Schnitt der  $G2$ -Kurve mit der Sperrspannungs-Horizontalen schliesslich steiler wird.



Figur 3

Impulsformen an der Zählwerkendstufe.

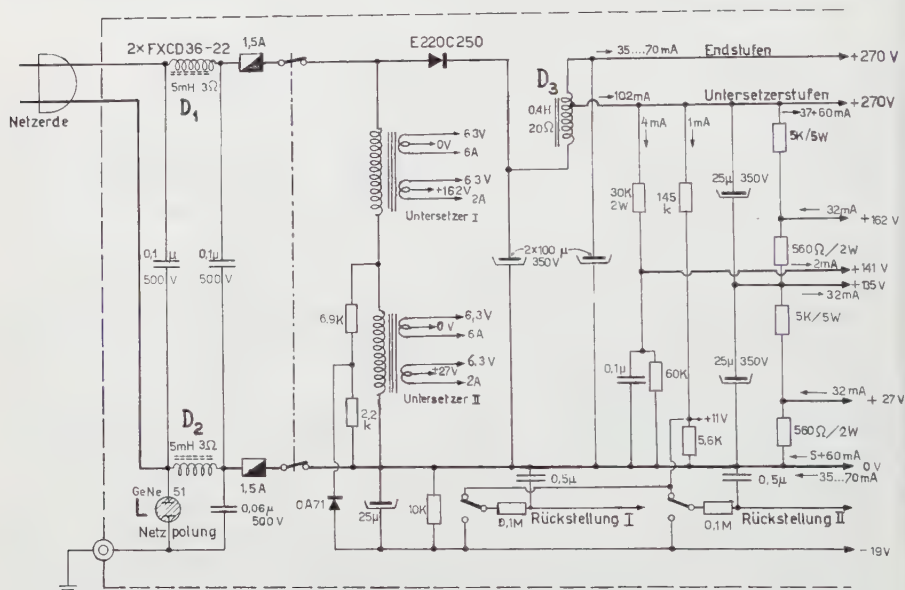
$G$  Gitter,  $A$  Anode. 1 und 2 bedeuten im Schaltschema (Figur 2) das links bzw. rechts gezeichnete Triodensystem.

Mit fabrikenen Zählwerken lassen diese Endstufen eine Zählgeschwindigkeit von 25/s zu; bei längerem Gebrauch empfiehlt es sich jedoch, unterhalb von 20 Zählschritten pro Sekunde zu arbeiten.

## V. Netzteil

Für den Betrieb der Dekadeneinheiten wird eine Anodenspannung von ungefähr 300 V (je 7 mA) benötigt; die Zweifachumsetzer arbeiten aber bereits mit der Hälfte einwandfrei. Wir betreiben die letzteren deshalb gruppenweise zwischen 0 V und der halben Anodenspannung, bzw. zwischen der halben und der vollen Anodenspannung (je 7,5 mA). Die Endstufen nehmen im Ruhezustand je 3,5 mA, bei maximaler Zählgeschwindigkeit etwa 7 mA auf, so dass der Stromverbrauch des gesamten Anodenspannungsteils zwischen 160 ... 190 mA schwanken kann.

Aus Gründen der Gewichtersparnis wurde der Netzteil (Figur 4) ohne Anodenspannungstransformator ausgeführt. Um allzu grosse Wechselspannungskomponenten von den Betriebsspannungen fernzuhalten, muss bei der Inbetriebsetzung auf passende Polung des Netzanschlusses geachtet werden, wozu die Signallampe  $L$  dient. Da bei direkter Verbindung zwischen einem Pol der gleichgerichteten Spannung und Netzerde und bei Vermeidung von Transformatoren nur Einweggleichrichtung möglich ist, müssen die Glättungsmittel um so reichlicher



Figur 4

Schaltschema des Netzteils mit direkter Kopplung (Vermeidung eines Anodenspannungstransformators), Polaritätsanzeiger, HF-Entstörung, Heiztransformatoren und Rückstellasten I und II.

dimensioniert werden; der in Figur 4 angegebene Kunstgriff, die Glättungsdrossel mit Abgriffen zu versehen, erlaubte jedoch eine beträchtliche Reduktion des Aufwandes. Die nach der Drossel vorhandene Brummspannung von etwa 5 V (von Spitze zu Spitze) spielt für den Betrieb der Zählwerkendstufen keine Rolle; für die Untersetzerschaltungen wird die Betriebsspannung jedoch einem Drosselabgriff (rund 15% der Gesamtwindungszahl) entnommen, welcher einen günstigen Kompromiss zwischen zusätzlicher Schwächung der 50-Hz-Komponente (unterkompensiert) und Zunahme der Oberwellen (überkompensiert) liefert. Die hochfrequente Siebung mittels zweier Ferroxcube-Spulen  $D_1$ ,  $D_2$  hat sich als hinreichend wirksam erwiesen, um das Auslösen der Untersetzer durch die Netzstörungen völlig zu unterbinden. Wegen der beträchtlichen Wärmeentwicklung der insgesamt 40 Röhren wurde das Gehäuse aus gelochtem Blech hergestellt, so dass sich eine künstliche Ventilation erübrigt.

Das ganze Gerät beansprucht wenig Raum, wiegt 16 kg und verbraucht bei maximaler Zählfrequenz 160 W. Es wurde bisher zur Messung von Szintillations-

spektren eingesetzt und hat sich beim Verfolgen der Spektren kurzlebiger Aktivitäten als besonders nützlich erwiesen. Bei einiger Übung lassen sich damit fortlaufende Ablesungen in 5 Energiebereichen mit Abständen von 10 zu 10 s durchführen.

### *Summary*

A versatile pulse counter arrangement for nuclear radiation measurements is described. It consists of ten binary scalers (one E90CC tube per channel, dead-time  $1.5 \mu\text{s}$ ), ten commercial decade plug-in units (one E1T + E90CC, dead-time  $27 \mu\text{s}$ ), and ten mechanical registers (driven by one E90CC, 20 counts/s). The binary scalers accept negative pulses ( $\geq 10 \text{ V}$ , rise  $< 0.5 \mu\text{s}$ , decay  $> 1 \mu\text{s}$ ) and serve as fast input scaling stages; they are designed to produce output pulses of the special shape required for triggering the subsequent decade stages.

If all decade units are used singly, this equipment permits to count pulses in ten independent channels at a maximum rate of 400/s with negligible losses. On the other hand, one or several decade pairs can be made to work as scale-of-200's, so that up to 4000 pulses/s/channel can be measured with counting losses  $\leq 1\%$ .

In cases where only 5 independent channels are needed, a switch common to all channels eliminates the dead-time otherwise required for reading out the counting results. This is done by alternative switching between even and odd registers, and in those channels which are connected as scale-of-20's, also the corresponding decade units are stopped and can be read whilst the other group of channels is working. This feature has proved especially helpful in investigations on the scintillation spectra of short-lived radioisotopes.

The power supply has been constructed without using an anode voltage transformer, so that the whole apparatus is small and relatively light weighted.

(Eingegangen: 22. Mai 1956.)

## **Free Convection Past a Vertical Plate**

By MORTON FINSTON, Cambridge, Mass., USA<sup>1) 2)</sup>

1. Recently there has been a noticeable increase in interest in free convection problems. Generally the methods used are one or another of the approximate approaches developed for classical boundary layer work. There are significant differences between the two however [1]<sup>3)</sup>, and it may prove helpful to have exact solutions available. One such case is well known, i. e., the flow past a uniform temperature vertical plate where the equations can be reduced to ordinary differential equations. Often, however, an essential feature is that the plate temperature is not constant. It does not seem to have been noticed before that exact solutions can be obtained for a family of plate temperature variations. This note contains the derivation of the ordinary differential equations involved.

<sup>1)</sup> Massachusetts Institute of Technology.

<sup>2)</sup> This work was supported by the Naval Supersonic Laboratory, Department of Aeronautical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Professor JOHN R. MARKHAM, Director.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 529.



2. The free-convection flow past a vertical plate is governed by the following equations and conditions:

$$u u_x + v u_y = \nu u_{yy} + g \beta (T - T_e), \quad (1)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (2)$$

$$u T_x + v T_y = \alpha T_{yy}, \quad (3)$$

$$\text{at } y = 0: \quad u = v = 0, \quad T = T_s(X), \quad (4)$$

$$\text{as } y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad T = T_e, \quad \text{a constant.} \quad (5)$$

To put these equations into dimensionless form we set

$$u = (\nu g)^{1/3} \bar{u}, \quad x = \left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} \bar{x}, \quad y = \left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} \bar{y}, \quad v = (\nu g)^{1/3} \bar{v}, \quad \theta = \frac{T}{T_e}. \quad (6)$$

Then

$$\bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y = \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} + \beta T_e (\theta - 1), \quad (7)$$

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0, \quad (8)$$

and

$$\bar{u} \theta_x + \bar{v} \theta_y = \frac{1}{Pr} \theta_{\bar{y}\bar{y}}, \quad (9)$$

where  $Pr (= \nu/\alpha)$  is the Prandtl number.

Now it is well known [3] that these equations reduce to ordinary differential equations when the surface temperature is constant. Then we set

$$\psi = c_1 x^{3/4} f(y x^{-1/4}), \quad \theta = 1 + c_2 h(y x^{-1/4}), \quad (10)$$

where  $u = \psi_y$ ,  $v = -\psi_x$ . It is natural to ask if there are any other surface temperature distributions which permit exact solutions. The most obvious generalization of equations (10) is to set

$$\psi = A x^p f(y x^q), \quad \theta = 1 + B x^\omega h(y x^q). \quad (11)$$

(For convenience the bars are omitted over all quantities.) This leads to

$$A^2 x^{2p+2q-1} [(p+q) f'^2 - p f f''] = A x^{p+3q} f''' + B x^\omega h, \quad (12)$$

since  $\beta T_e = 1$ . Thus we must have

$$2p + 2q - 1 = p + 3q, \quad \omega = p + 3q \quad \therefore \quad p = 1 + q, \quad \omega = 1 + 4q. \quad (14)$$

Finally, with  $A = 1$ ,

$$\frac{\omega+1}{2} f'^2 - \frac{\omega+3}{4} f f'' = f''' + B h, \quad (15)$$

$$\omega f' h - \frac{\omega+3}{4} f h' = \frac{1}{Pr} h''. \quad (16)$$

When

$$\eta = y x^q = 0: \quad \begin{cases} f = f' = 0, \\ h = 1, \end{cases} \quad (17)$$

These equations include the constant surface temperature example ( $\omega = 0$ ) as a special case. The equations can be solved for various combinations of  $\omega$ ,  $B$ ,



and  $Pr$ , although only a restricted range for  $\omega$  is of interest. Since  $q$  is usually negative, the leading edge is at the temperature of the medium far from the plate. Equation (11) now reads

$$\psi = x^{(\omega+3)/4} f(y x^{(\omega-1)/4}), \quad \theta = 1 + B x^\omega h(y x^{(\omega-1)/4}), \quad (18)$$

so

$$\theta_y = B x^{(5\omega-1)/4} h'(y x^{(\omega-1)/4}), \quad (19)$$

and the heat transfer at the surface is proportional to. For instance, it is constant when  $\omega = 1/5$  and  $\eta = y x^{-1/5}$ .

Finally, solutions to equations (15), (16), (17) can be used to test approximate methods and in stability calculations.

## REFERENCES

- [1] E. R. G. ECKERT, *Introduction to the Transfer of Heat and Mass* (McGraw-Hill Book Co., New York 1950).
- [2] S. OSTRACH, *An Analysis of Laminar Free-Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force*, NACA TN 2635, Feb. 1952.
- [3] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill Book Co., New York 1955).

## Zusammenfassung

Diese kurze Mitteilung zeigt, dass für den Fall natürlicher Konvektion eine Familie von exakten Lösungen gefunden werden kann, welche die regierenden Gleichungen zur Darstellung bringen.

(Received: April 10, 1956.)

## Ein Elektronenvervielfacher als Pulslichterzeuger

Von REINHOLD GERHARZ, Washington, D.C., USA<sup>1)</sup>

### Aufbau des Vervielfachers

Als Breitbandverstärker haben Elektronenröhren mit Sekundärvervielfachung der Hochfrequenztechnik neue Anwendungsgebiete eröffnet. Auch in vielen Zweigen der Impulstechnik hat diese Röhrenbauart Eingang gefunden, und der einstufige Röhrentyp EFP 60 wird in vielen Versuchsschaltungen benutzt.

Um die Eigenschaften eines nach Angaben von BAY [1]<sup>2)</sup> entworfenen mehrstufigen Vervielfachers mit Gittersteuerung zu untersuchen, wurden in diesem Laboratorium einige Versuchsröhren hergestellt. Ferner stellte die Firma «National Union» (Orange, N. J.) einige technisch verbesserte Röhren des gleichen Entwurfs zur Verfügung, die als Typ HTIFA in den Handel gebracht werden. HOSTETLER publizierte konstruktive Einzelheiten über diese Röhren, welche jedoch einige Ergänzungen erfordern.

<sup>1)</sup> George Washington University, Elektronisches Laboratorium.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 535.

Der Gesamtröhrenleitwert ( $G$ ) beträgt etwa 0,1 A/V und ist definiert durch den Quotienten von Stromänderung  $\Delta I_{ges}$  und Gitterspannungsänderung  $\Delta U_g$

$$G = \frac{\Delta I_{ges}}{\Delta U_g}.$$

Der Entwurf sah ursprünglich einen maximalen Anodendauerstrom (Kollektorstrom) von  $I_c = 200$  mA vor, der aber wegen der Wärmebelastung des Elektrodenmaterials nur auf 100 mA gehalten werden konnte. Dabei war ein Betriebsfaktor («duty-cycle») von 50% in Rechnung gestellt worden.

An den höheren Dynodenstufen des Vervielfachers sind zur Erleichterung der Wärmeabfuhr Abstrahlflächen angebracht, deren Oberflächen aufgeraut wurden. Als Dynodenmaterial wird eine Legierung von 98,3% Silber und 1,7% Magnesium verwendet. Das Formieren einer sekundäremittierenden Schicht erfolgt durch Erhitzen der Dynoden in einer stark verdünnten Sauerstoffatmosphäre. Metallisches Magnesium (Mg) an der Dynodenoberfläche wird dabei zu Magnesiumoxyd (MgO) umgeformt, welches dann als dünne Schicht von einigen Ångströmeinheiten die Dynode bedeckt. Da das restliche, noch in der Dynode befindliche nichtoxydierte Mg bei hohen Betriebstemperaturen der Röhre an die Oberfläche diffundiert und dort abdampfen kann, wurde als obere Grenze der zulässigen Dynodentemperatur 500°C gewählt. Auch bei dieser Temperatur ist die Mg-Verdampfung über grössere Zeitabschnitte immer noch nachweisbar, und es empfiehlt sich, die Betriebstemperatur unter 500°C zu halten.

Der Hauptanteil der anfallenden Wärmeenergie kann nur durch Strahlung aus der Röhre abgeführt werden. Deshalb lässt sich in grober Annäherung die Temperaturbilanz der Elektroden mit einer bei der Bestimmung der Konstanten  $\sigma$  in der Stefan-Boltzmannschen Strahlungsformel angewandten Beziehung erhalten[3]:

$$T = \sqrt[4]{\frac{W}{\sigma f_a \epsilon_0 \epsilon_1} + T_0^4},$$

dabei bedeuten

$T$  Temperatur der sekundär emittierenden Oberfläche,

$W$  Gesamtenergie des elektrischen Stromes durch die Dynodenoberfläche,

$\sigma$  Stefan-Boltzmannsche Konstante,

$f_a$  Verhältnis der wärmeabstrahlenden zur wärmeerzeugenden Oberfläche,

$\epsilon_1$  relatives Emissionsvermögen infolge der Beschaffenheit der Oberflächen,

$\epsilon_0$  relatives Emissionsvermögen des Oberflächenmaterials,

$T_0$  Temperatur der Umgebung (hier des Röhrenglaskolbens).

Es konnte festgestellt werden, dass eine wärmeabstrahlende Oberfläche von etwa 6 cm<sup>2</sup> genügt, um die letzte Dynode unter der kritischen Temperatur zu halten.

Der Ersatz des Silbers als Hauptmetall des Elektrodenmaterials durch eine Ni-Rh-Mg-Legierung<sup>3)</sup> unterdrückte die Verdampfung des Mg nur unwesentlich, während die im folgenden zu beschreibenden Fluoreszenzeigenschaften der Dynode bei dieser Legierung merklich schwächer erscheinen.

Die bei den hohen Stromdichten im Flugraum zwischen den Dynoden entstehenden störenden Raumladungseffekte, welche die Elektronenflugzeit erhöhen

<sup>3)</sup> Ni als Träger wegen der besseren relativen Emission; darauf eine dünne Schicht Rh zur Verhütung der Oxydation des Ni während des Formierens. Beim Erhitzen diffundiert fast nur Mg zur Oberfläche.

und die Sekundärausbeuten erheblich verringern, konnten durch Hilfselektroden fast ganz beseitigt werden. Dazu wurden bei diesem Röhrentyp Stäbchen aus Tantal ( $\varnothing \approx 0,8$  mm) verwendet, die mittels Halteplättchen aus Glimmer ungefähr in der Brennlinie der nahezu halbzylinderförmig gekrümmten Dynoden Aufstellung fanden. Die Betriebsspannung für die Stäbchen wurde von der übernächst höheren Elektrode abgezweigt. Im Falle der letzten Dynode liegt also die zugehörige Hilfselektrode auf Kollektorpotential. Die durchschnittliche Sekundärausbeute dieser Versuchsröhren konnte bei Stufenspannungen von 250 V und mit Hilfselektroden vor der 5., 6. und 7. Dynode auf  $\delta = 4$  gehalten werden. Da die Raumladungseffekte nicht völlig zu unterdrücken sind, verursachen diese immer noch Störungen in den Elektronenbahnen und äussern sich hauptsächlich durch Zeitverzögerungen von etwa  $10^{-9}$  s zwischen dem Eintreffen der ersten und der letzten Elektronen eines Signals auf der nächsthöheren Dynode. Daher kann die Zeitauflösung eines mit dieser 7stufigen Röhre gebauten Hochfrequenzverstärkers nicht besser sein als  $7 \cdot 10^{-9}$  s, was bei sinusförmigen Schwingungen einer Frequenz von 71,5 MHz entspricht. Die Gesamtflugzeit der Elektronen durch die Röhre beträgt etwa  $3,3 \cdot 10^{-8}$  s und bewirkt bei hochfrequenten Schwingungen nur eine Phasenverschiebung. Die Eingangs- und Ausgangskapazitäten betragen bei dem vorliegenden Vervielfacher etwa 18 pF.

### Betrieb als Impulsgenerator

Die dynamische Kennlinie des Vervielfachers für Eingangsimpulse von  $10^{-8}$  s Dauer ist in Figur 1 wiedergegeben. Der Steuerteil ist in Aufbau und Wirkungsweise einer Pentode vergleichbar. Bei der Kennlinie ist jedoch der mittlere Teil wegen der Elektronenvervielfachung um ein Mehrfaches steiler. Die weitgehende Nichtlinearität der Röhrenkennlinie zwischen Anlaufstrom- und Raumladungsgebiet wurde von BAY als günstige Voraussetzung für die Erzeugung von rechteckförmigen elektrischen Impulsen hoher Frequenz erkannt [1]. Um die aus der Röhre gelangenden verstärkten Impulse mit einem Zeitverzug wieder zum Steuersystem zurückzubringen, wurde ein Koaxialkabel als Rückkopplungsglied verwendet (Figur 2). Die Lage des Röhrenarbeitspunktes ist so zu wählen, dass von den ankommenden Signalen nur solche ausreichender Amplitude in den steilen Teil der Kennlinie gelangen.

Auf diese Weise lassen sich niedervoltige Rauschspannungen von dem erwünschten Impuls trennen. Die Ausgangsamplitude der Impulse ist infolge des horizontal auslaufenden Teils der Kennlinie im Raumladungsgebiet begrenzt, und die Impulsdauer wird von der als Differenzierglied arbeitenden Kabelankopplung festgelegt.

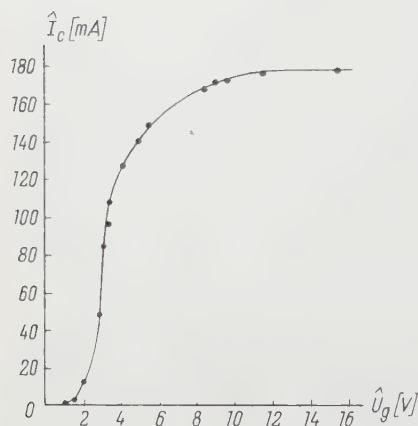
Bei einer Kabelrückführung von der letzten Dynode zum Steuergitter laufen im Kabel *positive* Impulse um, während bei der Rückführung zwischen Kollektor und Kathode *negative* Impulse durch das Kabel laufen. In beiden Fällen betrug die Impulshöhe etwa 7 V und die Impulsdauer etwa  $8 \cdot 10^{-9}$  s, was einer Impulslänge auf dem Kabel von etwa

$$L = c_{\text{Kabel}} \cdot \tau_{\text{Impuls}} = 2,5 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-9} = 200 \text{ cm}$$

entspricht. Die Impulsdauer lässt sich durch am Ende kurzgeschlossene Kabelstücke («Stubs» von  $L \approx 50$  cm) bis zu etwa  $3 \cdot 10^{-9}$  s verkürzen (vgl. Fig. 2).

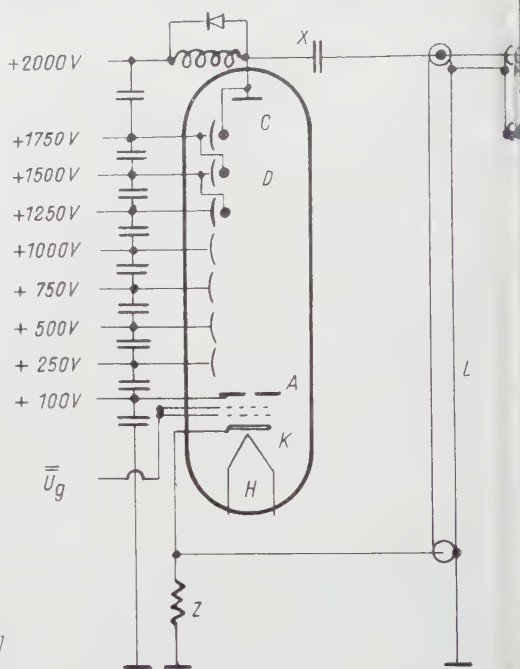
Die Impulsfrequenz hängt von der Länge des Rückführkabels ab und betrug etwa 10 MHz bei 25 m und 100 kHz bei 2500 m Kabellänge. Das Rückführkabel

ist zur Vermeidung schädlicher Reflektionen am Niederspannungsende mit seinem Wellenwiderstand abgeschlossen.



Figur 1

Dynamische Kennlinie eines 7stufigen Elektronenvervielfachers; Dauer des Eingangsimpulses  $10^{-8}$  s.



Figur 2

Rückgekoppelter Impuls-generator mit Reflektionsstück zur Impulsverkürzung. Die Dynodenstufenspannungen betragen 250 V. D 3 Hilfsselektroden vor den letzten Dynoden; A Hilfsanode; C Kathode; H Heizung; L Rückföhrkabel als Laufzeitelement;  $\bar{U}_g$  Gittervorspannung; X Induktiver Spannungsabfall und Kabelankopplung; Z Kabelabschlusswiderstand.

### Dynodenlumineszenz

Beim Betrieb der Röhre ist (besonders an den Dynoden mit höherer Stromdichte) eine bläuliche Lumineszenz der elektronenbeschossenen Oberfläche zu beobachten. Die Intensität dieser ins Sichtbare reichenden Strahlung scheint linear mit dem auf die Dynoden treffenden Elektronenstrom anzuwachsen und ist beim Impulsbetrieb der Leuchtstärke einer kleinen Kontrollglühlampe für elektrische Apparate vergleichbar. Die gesamte Lichtenergie ist zu etwa 0,2 W abgeschätzt worden.

In Hochvakuum-Vervielfacherröhren ist das Leuchten der Dynoden schon seit einiger Zeit bekannt. SCHAETTI [4] erwähnt bei seinen Photomultipliern mit hoher Verstärkung eine blaue Emission der Silber-Magnesiumplatten, welche aber durch die Verwendung von Cu-Bc-Dynoden wesentlich verringert werden konnte. BENE-



KING [5] berichtet von ähnlichen Leuchterscheinungen und versucht eine Erklärung durch die Annahme von Restgas-Ionisierung auf den Elektroden. Andere Autoren [6], [7], [8], [9], [10] untersuchten die Sekundäremission unter veränderlichen physikalischen Bedingungen und bringen Erklärungsversuche; jedoch sind Leuchterscheinungen wahrscheinlich wegen der geringen Stromdichte in ihren Apparaturen nicht beobachtet worden. Eine Anzahl von Arbeiten über gezüchtete Leuchteffekte für technische Zwecke (Elektrophosphoreszenz) mit verhältnismässig langen Nachleuchtzeiten ( $10^{-6}$  s) wurde kürzlich während eines Kolloquiums in England diskutiert [11] (vgl. auch [12]).

Die in der untersuchten Vervielfacherröhre auftretenden Leuchteffekte wurden mit einem Spektrographen photographiert (Platte vom III F-Typ). Selbst bei einer stundenlangen Exposition konnte keine Banden- oder Linienstruktur des Spektrums nachgewiesen werden. Die Auflösung betrug bei diesem Gerät  $15 \text{ \AA/mm}$ . Die Wellenlängenverteilung der Lumineszenz erstreckt sich, aus dem Ultraviolett kommend, von etwa  $3300 \text{ \AA}$  an mit wachsender Intensität über  $4360 \text{ \AA}$  (hier sanftes Maximum) und erreicht bei  $4900 \text{ \AA}$  schnell abfallend die Intensität Null.

Um die Dauer des Leuchtens zu untersuchen, wurde dieses mit einem 1P21-Photomultiplier und mit einem Oszillographen (Typ Tektronix 517) bei einer Zeitauflösung von  $5 \cdot 10^{-9}$  s beobachtet. An das Gitter des Vervielfachers wurden mit einem Relaispulser (Spencer-Kennedy-Typ, etwa 100 Impulse pro Sekunde) positive Impulse von  $7 \cdot 10^{-9}$  s Dauer gelegt. Dies entspricht der Zeitauflösung des Vervielfachers. Mehrere Messreihen zeigten, dass die Lumineszenz ohne beobachtbaren Zeitverzög den elektrischen Impulsen an den Dynoden folgt und dass die Abklingzeit des Pulslichtes nicht länger als  $10^{-8}$  s dauert.

Bei kleiner werdendem Abstand von Lichtquelle zum Photomultiplier konnte die statistische Amplitudenverteilung der vom Photomultiplier abgegebenen Impulse beobachtet werden. Vergrösserung der einfallenden Lichtintensität bzw. Abstandsverringering liessen erkennen, dass die einzelnen Impulse statistisch immer häufiger in einer Enveloppe von der gleichen Amplitudenfunktion erscheinen, welche den elektrischen Impuls am Ausgang der Vervielfacherröhre beschreibt.

Da die Lumineszenz nur in der dünnen MgO-Schicht auf der elektronenaufnehmenden Seite der Dynode beobachtet werden kann, wird die Abklingzeit des MgO-Leuchtens mit der gemessenen Abklingzeit identisch sein. Elektrolumineszenz von messbarer Intensität, die auf reinen Metalloberflächen auftreten könnte, ist wegen der sehr geringen Lichtabsorptionstiefen der Metalle unwahrscheinlich.

Infolge der kurzen Anregungs- und Abklingzeiten und wegen der emittierten Wellenlängen scheint es also berechtigt, das beobachtete Leuchten mit Elektrofloreszenz im Innern des MgO zu erklären. Als Voraussetzung für die Sekundärelektronenemission der MgO-Schicht wird die dort herrschende hohe elektrische Feldstärke angesehen, welche je nach der MgO-Schichtdicke bis zu  $10^8 \text{ V/cm}$  betragen kann. JACOBS [7] erklärt die hohe Sekundärausbeute durch lokale Bildung von Elektronenlawinen in den MgO-Kriställchen. Es scheint deshalb sehr gut möglich, dass ein Teil der so gebildeten Elektronen als Leuchtelektronen in freien Energiebändern Austauschwirkungen hervorrufen und so die Floreszenz verursachen.

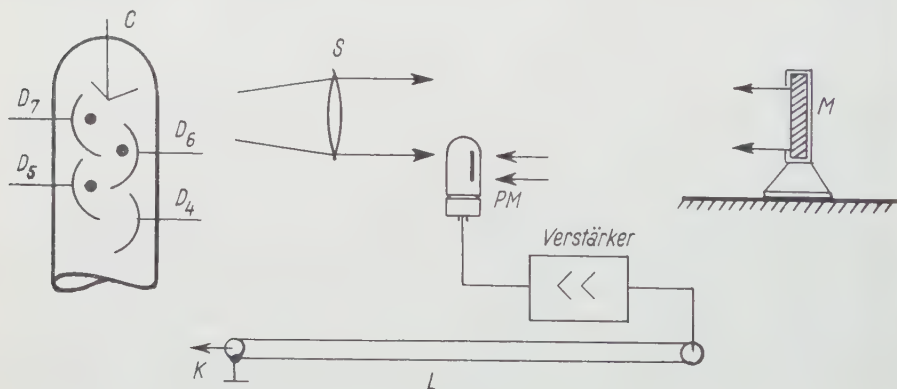
Die verschiedentlich vermutete Ionisierung von Gasresten an der Dynodenfläche als mögliche Ursache der Lumineszenz [5] ist wegen deren kurzen Abklingzeit und der zu erwartenden, aber nicht nachweisbaren Struktur des Spektrums abzulehnen. Auch eine spurenhafte Reduktion des MgO und dabei freiwerdender Sauerstoff infolge der Elektronenbeschussung kann wegen der hohen chemischen Affinität der Komponenten zueinander nicht als Hauptursache des Leuchtens angesehen werden. Kurzzeitige Überbelastung der Dynoden ergaben zwar Erhitzung

bis zur Rotglut und einsetzende Mg-Abdampfung, jedoch die Röhreneigenschaften erschienen nach dem Erkalten unverändert.

In den meisten gegenwärtigen technischen Anwendungen der Elektronenvervielfachung werden Lumineszenzerscheinungen als nichterwünschte Nebeneffekte behandelt. Der beschriebene Vervielfacher erlaubte es aber, gerade die Leuchteigenschaften für mehrere Versuchszwecke auszunützen: Eine Intensitätsmodulation des Dynodenleuchtens konnte zum Beispiel bis zu einer Frequenz von 50 MHz nachgewiesen werden, wenn sinusförmige Hochfrequenzspannungen an das Steuersystem der Röhre gelegt wurden. Die Verwendungsmöglichkeit der Elektrofluoreszenz zu stroboskopischen Untersuchungen ist naheliegend, und auch die Erzeugung von Röntgenstrahlimpulsen hoher Frequenz und genau festlegbarer Modulation und Steuerung ist prinzipiell möglich.

### Pulslichterzeuger mit optischer Rückkopplung

Im Verlauf der Untersuchungen des Dynodenleuchtens erschien es aussichtsvoll, bei dem in Figur 2 gezeigten rückgekoppelten Impulsgenerator das Rückföhrkabel teilweise durch einen Lichtweg zu ersetzen. Dies ist in Figur 3 schematisch dargestellt. Alle Schaltelemente sind die gleichen wie in der Figur 2. Die vom Vervielfacher emittierten Lichtimpulse wurden mit einem 1P21-Photomultiplier aufgenommen und über einen Verstärker von  $10^8$  Hz Bandbreite in das Rückföhrkabel eingeleitet.



Figur 3

Oberer Teil des Vervielfachers mit Hilfsselektroden, optischer Rückföhrung und Laufzeitkabel  $L$ .  $M$  Verschiebbarer Spiegel;  $PM$  Photomultiplier;  $S$  Sammellinse;  $D_7$  Leuchtdynode;  $K$  Kathodenverbindung.

Der Lichtweg wurde mit einem Spiegel verändert. Eine Verschiebung des Spiegels von  $\pm 1$  cm entspricht bei dem gegebenen Kabel von 50 m und einer ursprünglichen Impulsfrequenz von 5 MHz einer Frequenzänderung von  $\pm 840$  Hz. Ein Lichtweg von etwa 1 m bei 30 m Kabellänge markierte bei der beschriebenen Schaltung die obere Frequenzgrenze (etwa 8,5 MHz), an der noch lückenlose Pulslichterzeugung möglich war. Mit einer Sammellinse von 10 cm Öffnung und 20 cm Brennweite konnte der Lichtweg auf über 3 m verlängert werden, bevor die Impulsfolge aussetzte.



Die Form der erzeugten Lichtimpulse muss in erster Näherung mit den elektrischen Impulsen im Kabel übereinstimmen. Dies wurde experimentell bestätigt. Wegen Streulicht, Störuschen und Spannungsschwankungen gelangen in den Rückführkreis eine beträchtliche Anzahl von Störsignalen mit kleiner Amplitude. Die impulsformenden Eigenschaften des Vervielfachers sieben jedoch auch in dieser Anordnung die Störsignale wegen deren begrenzten Amplitude im Anlaufstromgebiet der Kennlinie aus.

### Diskussion

Die Dauer der Lichtimpulse hängt ausser von der Zeitauflösung des Vervielfachers nur von der Abklingdauer des leuchtenmittlernden Materials ab. Im Falle des MgO betrug die gemessene Lichtpulsdauer nur etwa  $10^{-8}$  s, und es konnten «Lichtpakete» erzeugt werden, die einer räumlichen Länge von

$$L = c \tau = 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} = 300 \text{ cm}$$

entsprechen.

Sorgfältiger dimensionierte Röhren und höhere Betriebsspannungen würden die Zeitauflösung um 2 Grössenordnungen verbessern können, wie es bei einer Variation des Vervielfacherprinzips von STERNGLASS und WACHTEL [13] kürzlich angedeutet wurde. Hierbei handelt es sich um einen Vervielfacher mit mehreren planparallel übereinander angeordneten Emissionsschichten (Dicke etwa 1000 Å, mechanisch gehalten von einem Traggitter, Abstände voneinander etwa 1 cm, Stufenspannungen 2 bis 3 kV, in welchen die ausgelösten Sekundärelektronen durch die dünnen Vervielfacherschichten hindurch zur nächsthöheren Dynode gelangen. Die errechnete Zeitauflösung soll  $5 \cdot 10^{-11}$  s betragen.

Abgesehen von stroboskopischen Anwendungen dürfte die Erzeugung von schnellen Lichtimpulsen auch für den Bau von automatischen Rechenanlagen bedeutungsvoll werden. In dieser Richtung arbeitend, hat LOEBNER [14] über Untersuchungen an «opto-elektronischen» Schaltungen berichtet, bei welchen elektrophosphoreszente Substanzen mit lichtempfindlichen Zellen gekoppelt waren und mit denen einfache Verstärker- und bistabile Systeme bei geringstem Raumbedarf demonstriert werden konnten. Die begrenzte Ansprechgeschwindigkeit dieser Anlagen im Millisekundenbereich behaftet praktische Ausführungsformen jedoch mit schwer zu überwindenden Nachteilen. Bei Hochgeschwindigkeits-Rechenanlagen ist eine Loslösung der Informationselemente von materiegebundenen Führungssystemen in wachsendem Maße erforderlich. Streckenmodulierte Lichtpakete eröffnen neue Möglichkeiten, ein Maximum von Informationselementen in eine gegebene minimale Zeitspanne einzufügen und durch Regeneration für beliebig lange Zeit zu speichern. Ein Pulslichtverfahren könnte die Anwendung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen im freien Raum für die Speicherung von Informationselementen in die unmittelbare Zukunft rücken<sup>4)</sup>.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Z. BAY, unveröffentlichter Bericht an das Marineforschungsamt der USA (September 1952).
- [2] W. HOSTETLER, Electron. Equip. 7, 22 (1955).
- [3] F. KOHLRAUSCH, Prakt. Phys. 7, 480 (1955).

<sup>4)</sup> Inzwischen sind Untersuchungen über die Verwendung von Lichtimpulsen in mathematischen Speicheranlagen weitergeführt worden. Die vorliegende Arbeit ist ein Teil dieses Projektes.

- [4] N. SCHAETTI, ZAMP 2, 123 (1951).
- [5] H. BENEKING, Z. angew. Phys. 4, 258 (1952).
- [6] W. JACOBS, Phys. Rev. 84, 877 (1951).
- [7] A. JACOBS *et al.*, Phys. Rev. 88, 492 (1952).
- [8] J. B. JOHNSON und K. G. MCKAY, Phys. Rev. 91, 582 (1953).
- [9] A. JACOBS, D. DOBISCHEK und J. FREELY, Phys. Rev. 97, 804 (1953).
- [10] A. FISCHER, Z. angew. Phys. 5, 258 (1955).
- [11] K. BUTLER und J. WAYMOUTH, Brit. J. appl. Phys. Suppl. 1, 4 (1955).
- [12] Proc. IRE 43, 1882ff. (1955).
- [13] E. J. STERNGLASS, Rev. sci. Instrum. 26, 1202 (1955).
- [14] E. LOEBNER, Proc. IRE 43, 1897 (1955).

### Summary

A 7-stage electron multiplier with grid control system is described with respect to construction and performance. A coaxial feedback cable permits the regeneration of pulses with a repetition frequency of from 10 MC to 0.1 MC and a pulse length of about  $8 \times 10^{-9}$  s. The luminescence of the dynodes was investigated and an identity in the duration of the light pulses and the electrical pulses has been found. The interpretation of the luminescence effects by assuming electro-fluorescence phenomena indicates applications to problems of stroboscopy and of high-speed computation and storage devices.

(Eingegangen: 29. März 1956.)

## Die Nusseltsche Zahl für laminare Strömung im zylindrischen Rohr mit konstanter Wandtemperatur

Von SERGEJ PAHOR und JANEZ STRNAD, Ljubljana<sup>1)</sup>

Für die Wärmeleitung in strömenden Flüssigkeiten gilt die Differentialgleichung<sup>2)</sup>

$$\nabla^2 T = \frac{\varrho}{\lambda} c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T \right).$$

Für stationäre Strömung im zylindrischen Rohr (Durchmesser  $2r_0$ ) mit konstanter Wandtemperatur  $T_W$  suchen wir eine Lösung der Form

$$T = T_W + C R(x) \exp(-\beta z), \quad (1)$$

wobei  $x = r/r_0$  und  $C = \text{const.}$  Damit erhält man für Poiseuillesche Strömung die Gleichung

$$R''(x) + \frac{R'(x)}{x} + \left[ \left( \frac{p}{Pe} \right)^2 + p(1-x^2) \right] R(x) = 0 \quad (2)$$

mit der Randbedingung  $R(1) = 0$ . Als Parameter erscheinen hier die Pecletsche Zahl  $Pe = 2 \bar{v} r_0 \varrho c_p / \lambda$  und  $p = \beta r_0 Pe$ . Alle Stoffwerte wurden als konstant

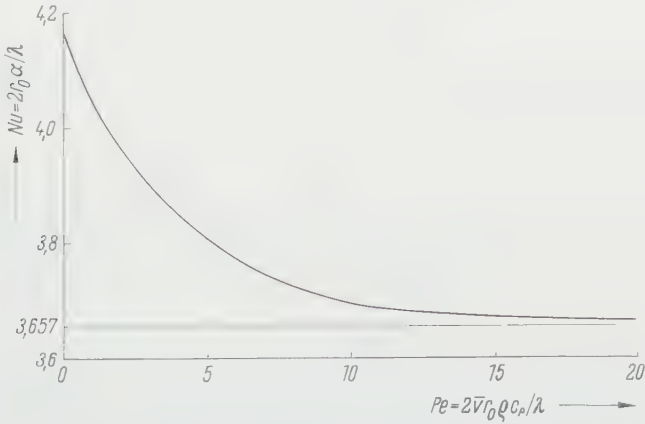
<sup>1)</sup> Universität.

<sup>2)</sup> H. GRÖBER, S. ERK, U. GRIGULL, *Grundgesetze der Wärmeübertragung* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955), S. 179.

vorausgesetzt. Hauptsächlich interessiert uns der kleinste Eigenwert  $p_1$  und die zugehörige Eigenfunktion  $R_1(x)$ , welche in jedem Fall das Temperaturprofil für grosse Entfernungen von der Eintrittsstelle darstellt.

In technisch wichtigen Fällen ist  $Pe$  so gross, dass das Glied  $(p/Pe)^2$ , welches der Wärmeleitung in der Längsrichtung entspricht, vernachlässigt werden darf. Die so vereinfachte Gleichung lösten GRAETZ und NUSSELT<sup>2)</sup> mit Reihenentwicklung. Hier wurden  $p_1$  und  $R_1(x)$  mit iterierter numerischer Integration nochmals bestimmt. Es ist  $p_1 = 7,3140$ .

Es erscheint uns mathematisch interessant, das Problem auch für beliebige Pecletsche Zahlen zu untersuchen. Für  $Pe \rightarrow 0$  geht (2) in die Besselsche Dif-



Die Abhängigkeit der Nusseltschen Zahl von der Pecletschen Zahl.

ferentialgleichung über, so dass  $R_1(x) = J_0(k_1 x)$  und  $p_1/Pe = k_1 = 2,4048$ . Mit  $k_n$  bezeichnen wir die  $n$ -te Nullstelle der Funktion  $J_0$ .

Von beiden extremen Fällen ausgehend, erhält man durch Perturbation

$$p_1 = 7,3140 \left( 1 - \frac{9,125}{Pe^2} + \dots \right) \quad (Pe \gg 1); \tag{3}$$

$$p_1 = 2,4048 \, Pe \, (1 - 0,1626 \, Pe + \dots) \tag{4a}$$

und

$$R_1(x) = J_0(k_1 x) + Pe [0,026 J_0(k_2 x) - 0,002 J_0(k_3 x) + \dots] + \dots \quad (Pe \ll 1). \tag{4b}$$

Die Nusseltsche Zahl wird definiert<sup>3)</sup> mit

$$Nu = \frac{2 \, r_0 \, \alpha}{\lambda} = \frac{2 \, r_0 \, (\partial T / \partial r)_W}{T_W - \bar{T}},$$

wobei

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{\bar{v} \, \pi \, r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z) \, v(r) \, 2 \, \pi \, r \, dr.$$

<sup>3)</sup> H. GRÖBER, S. ERK, U. GRIGULL, *Grundgesetze der Wärmeübertragung* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955), S. 182.

Für ein Temperaturprofil der Form (1) ist

$$Nu = \frac{-R_1'(1)}{\left[ \int_0^1 2 R_1(x) (1-x^2) x dx \right]}.$$

Aus der Gleichung (2) folgt nun

$$Nu = \frac{p_1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1}{Pe} \right)^2 \frac{\int_0^1 R_1(x) x dx}{\int_0^1 R_1(x) (1-x^2) x dx}.$$

Mit den aufgestellten Ausdrücken (3) und (4) für  $p_1$  und  $R_1(x)$  ergibt dies

$$Nu = 3,6570 \left( 1 + \frac{1,232}{Pe^2} + \dots \right) \quad (Pe \gg 1)$$

und

$$Nu = 4,1805 (1 - 0,0439 Pe + \dots) \quad (Pe \ll 1).$$

Einige Werte von  $Nu$  für mittlere Peclet'sche Zahlen wurden durch Polynomapproximationen für  $R_1(x)$  bestimmt. Den Gesamtverlauf der Funktion  $Nu(Pe)$  stellt das Diagramm auf Seite 537 dar.

### Summary

The Nusselt modulus for laminar flow through a pipe with constant temperature of the walls has been determined as a function of the Peclet modulus. This function is represented by a diagram.

(Eingegangen: 11. Mai 1956.)

## Empfindlichkeit eisbildender Impfstoffe auf ihre Wasserlöslichkeit

VON RAYMUND SÄNGER, Zürich<sup>1)</sup>

Auf Grund von Messungen über die Eiskeimfähigkeit, ausgeführt an einer Mehrzahl von Stoffen mit Hilfe der Schaefer'schen Wolkendiffusionskammer [1]<sup>2)</sup>, hatten kürzlich B. J. MASON und J. HALLET [2], [3] die Auffassung vertreten, dass entgegen den bis heute veröffentlichten Befunden innerhalb des Temperaturbereiches von 0 bis  $-20^\circ\text{C}$  in Wirklichkeit nur 2 Stoffe als eisbildungswirksam sich erweisen. Die beiden Stoffe umfassen die Mineralien Silberjodid ( $\text{AgI}$ ) und Bleijodid ( $\text{PbI}_2$ ); alle die übrigen bis heute als keimfähig gefundenen Stoffe verlören ihre Aktivität, wenn sie so weit gereinigt werden, dass auf spektroskopischem Wege keine Verunreinigungen, insbesondere von Silber und Jod, nachgewiesen werden können; dies trifft nach MASON unter anderem für Kupferjodid ( $\text{CuI}$ ) zu, das auch in unserem Laboratorium [4], [5] als keimfähig beobachtet

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 540.

tet wurde. Ferner ziehen die beiden Verfasser nebenbei auch unsere Wahrnehmung in Zweifel, dass das Mineral Kupfersulfid ( $\text{CuS}$ ) die gleiche ausgeprägte Eisbildungsfähigkeit wie  $\text{AgI}$  besitze, wobei sie allerdings darauf hinweisen, dass auch bei ihren Messungen  $\text{CuS}$  bei  $-16^\circ$  Anzeichen von Keimfähigkeit zeigte, doch könnte ihrer Meinung nach dies damit in Zusammenhang stehen, dass das verwendete  $\text{CuS}$  nur von der Reinheit der üblichen käuflichen Stoffe war. Nach ihren Vorstellungen ist damit die bis anhin an andern Stoffen ausser  $\text{AgI}$  und  $\text{PbI}_2$  über  $-20^\circ$  beobachtete Gefrierkeimwirksamkeit, insbesondere diejenige von  $\text{CuI}$  und  $\text{CuS}$ , nur darauf zurückzuführen, dass diese Impfstoffe Verunreinigungen von  $\text{Ag}$  und  $\text{I}$  enthalten, und so über die Bildung des in kleinsten Spuren noch aktiven  $\text{AgI}$  Eiskeimfähigkeit vortäuschen. Zugegebenermassen besteht bei  $\text{CuI}$  die Gefahr, dass auch bei sorgfältiger Darstellung der Stoffe noch Spuren von  $\text{AgI}$  vorhanden sein könnten. Nicht ohne weiteres wäre es aber verständlich, wie nach den üblichen chemischen Verfahren sorgfältig dargestelltes  $\text{CuS}$  durch  $\text{I}$  verunreinigt sein könnte. Tatsächlich haben nachträglich vom analytisch-chemischen Laboratorium der ETH durchgeführte spurenanalytische Untersuchungen ergeben, dass in dem von uns verwendeten  $\text{CuS}$  keine Spuren von  $\text{I}$  (sicher kleiner als  $1,0 \cdot 10^{-6}$  g  $\text{I}$  per Probe) nachzuweisen waren.

Inzwischen hat dasselbe Laboratorium besondere Proben von  $\text{CuS}$  und  $\text{CuI}$  dargestellt; diese besitzen bezüglich ihres Metallgehaltes eine Reinheit, dass auch nach einem von O. GÜBELI entwickelten kolorimetrischen Verfahren<sup>3)</sup> keine  $\text{Ag}$ -Spuren mehr aufzufinden und daher spektroskopisch  $\text{AgI}$ -frei anzusprechen sind. Eine erste behelfsmässige Prüfung dieser Stoffproben auf ihre eisbildende Wirksamkeit in einer gewöhnlichen Wolkenkältekammer haben gegensätzlich zu den Beobachtungen MASON und HALLEIS ergeben, dass beide Impfstoffe gefrierkeimaktiv sind, wobei die Einsatztemperatur mindestens für  $\text{CuS}$  in derselben Höhe wie bei  $\text{AgI}$  liegt. Genauere Angaben über die Einsatztemperatur und über das Ausmass der Eisbildungswirksamkeit können aber erst nach Fertigstellung der neuen Messanlage für die Ermittlung der Eiskeimfähigkeit von Impfstoffen gemacht werden.

Unserer Auffassung nach besteht die Möglichkeit, dass die zur Schau getretene Zwiespältigkeit der Messergebnisse der verschiedenen Beobachtergruppen physikalisch wohl begründet ist. Es ist nicht gesagt, dass die Untersuchungen mit Hilfe der Schaeferischen Diffusionswolkenkammer zu denselben Ergebnissen führen wie jene mit Hilfe der gewöhnlichen Vonnegut-Schaeferischen Wolkenkältekammer [6], nämlich dann, wenn die untersuchten Impfstoffe eine zwar noch kleine, aber immerhin schon merkliche Wasserlöslichkeit besitzen.

In der Diffusionswolkenkammer äussern sich die von aussen eingepfropften Stoffpartikel unvermeidlich zuerst als Kondensationskerne, bevor sie allfällig als Gefrierkerne zur Wirkung gelangen; dies auch dann, wenn die Teilchen keine besonders ausgeprägte Hygroskopizität aufweisen. In den entstandenen und stets wachsenden Wassertröpfchen werden die eingebetteten Impfpartikel, wenn sie Wasserlöslichkeit zeigen, fortwährend im Abbau begriffen sein und keine wohldefinierte Oberfläche mehr besitzen. Nach neueren Vorstellungen [4], [5] spielt aber gerade der strukturelle atomare Aufbau der Oberfläche eines Impfstoffes eine überragende Rolle in der Frage der Eisbildungswirksamkeit; dieser Aufbau wird aber durch die in den Tropfen sich abwickelnden Lösungsvorgänge unweigerlich gestört. Es ist daher nicht zu erwarten, dass Impfpartikel – wenn sie als reine, vom Wasser unbenetzte Schwebeteilchen unterkühlten Wassertropfen begegnen, den Gefriervorgang auslösen und daher im üblichen Sinne gefrierkeimaktiv sind.

<sup>3)</sup> Empfindlichkeit grössenordnungsmässig 10fach gegenüber der Spektralanalyse.



dasselbe auch tun, wenn sie in Wassertropfen eingelagert sind und ihre Oberfläche infolge ihrer Löslichkeit einem Abbauvorgang unterzogen wird. Solche Stoffe müssen daher, in die Diffusionswolkenkammer oder in die gewöhnliche Wolkenkältekammer eingimpft, nicht unbedingt zu den nämlichen Ergebnissen hinsichtlich ihrer Eisbildungswirksamkeit führen. Da AgI (Löslichkeit  $10^{-7}$  g je 100 g  $H_2O$  bei Zimmertemperatur) praktisch vollständig wasserunlöslich ist und CuI demgegenüber (Löslichkeit  $0,8 \cdot 10^{-3}$  g/100 g  $H_2O$  bei Zimmertemperatur) verhältnismässig eine gute Löslichkeit zeigt, wäre es damit verständlich, wenn im ersten Falle beide Messverfahren dieselben Ergebnisse über die Gefrierkeimfähigkeit zeitigen, während im zweiten Fall widersprechende Befunde zutage treten. Auch das Verhalten von CuS, das eine Löslichkeit von  $3 \cdot 10^{-5}$  g/100 g  $H_2O$  besitzt, wäre erklärlich. Denn das Wechselspiel der geschilderten, in der Oberfläche der Impfstoffe sich abwickelnden Vorgänge muss sich notwendigerweise sehr mannigfaltig auswirken, so dass jede Art von Zwischenstufe sich einstellen kann, wobei sicherlich auch das Ausmass der Hygroskopizität mit ins Gewicht fallen wird.

Das letzte Wort über die Eisbildungsfähigkeit ist noch nicht gesprochen; das Beobachtungsmaterial noch viel zu spärlich, um den Mechanismus der Wirksamkeit eisbildender Kerne genau zu verstehen. So verfolgt diese Notiz nur den Zweck, darauf hinzuweisen, dass namhafte Gründe für die Zwiespältigkeit der Beobachtungen über die Eisbildungswirksamkeit der Impfstoffe in der Diffusionswolkenkammer und in der gewöhnlichen Wolkenkältekammer geltend gemacht werden können und dass dabei die Wasserlöslichkeit der untersuchten Impfstoffe allfällig eine massgebende Rolle spielt. Wir stellen fest, dass bei den Untersuchungen in den Wolkenkammern zu unterscheiden ist, ob sich die eisbildenden Kerne den unterkühlten Wassertropfen von aussen annähern oder ob sie sich bereits im Innern der Tropfen befinden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] V. J. SCHAEFER, *Industr. Engng. Chem.* 44, 1381 (1952).
- [2] B. J. MASON und J. HALLET, *Nature* 177, 681 (1956).
- [3] J. B. MASON, Tucson Konferenz, *The Scientific Basis for Weather Modification Studies*, April 10–12, 1956 (Referat).
- [4] H. R. BRUPPACHER und R. SÄNGER, *ZAMP* 6, 407 und 485 (1955).
- [5] R. SÄNGER, Tucson Konferenz, Referat veröffentlicht in: *ZAMP* 7, 213 (1956).
- [6] B. VONNEGUT, *Chem. Rev.* 44, 277 (1949).
- [7] V. J. SCHAEFER, *Chem. Rev.* 44, 291 (1949).

#### Summary

The ice-nucleating power of CuS and CuI, which H. PRUPPACHER and the author discovered earlier, was confirmed with samples entirely free from Ag and I, and Ag respectively. It is stated that the same threshold temperatures are not necessarily found with a diffusion cloud chamber compared with a normal cloud chamber. The former displays the disadvantage against the latter since the nucleating substance first acts as a condensation nucleus. The surface structure of the nuclei which determines the ice-nucleating power is more or less altered according to solubility.

(Eingegangen: 24. August 1956.)



## Frühjahrstagung der S.P.G. 1957

Die nächste Tagung der S.P.G. (Schweizerische Physikalische Gesellschaft) wird am 4./5. Mai 1957 in Brunnen am Vierwaldstättersee stattfinden. Sekretariat: Basel, Klingelbergstrasse 82. K. P. MEYER

## Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**The Kinematics of Vorticity.** Par C. TRUESDELL (Indiana University Press, Bloomington 1954). XI + 232 pages, 5 figures; \$6.00.

Depuis quelques années, les travaux de TRUESDELL s'accumulent à un rythme imposant, et l'on peut bien dire que cet auteur a passé au rang des spécialistes de l'hydrodynamique théorique. Son érudition est considérable, son style limpide et agréable.

Le présent ouvrage rappelle en un certain sens la célèbre *Mécanique Analytique* de WHITTAKER, en ce que l'ensemble des travaux originaux de quelque intérêt sur la cinématique des fluides a été passé en revue et chaque auteur cité a sa place dans le développement de cette discipline. Cependant TRUESDELL ne veut pas faire un traité, mais un exposé original sur la formation, l'évolution et l'entretien des tourbillons. Nous ne saurions qu'approuver une telle entreprise, ayant nous-même souligné son intérêt dans un ouvrage sur les corps déformables paru il y a une dizaine d'années. TRUESDELL reprend les mêmes thèmes principaux, tout en y mettant un soin et en y recherchant un détail dont il faut lui savoir gré; et comme nous l'avions esquissé dans ledit ouvrage, il développe tout l'appareil géométrique et analytique dont il a besoin, définit clairement la notion de «vorticité»<sup>1)</sup> et des mesures qu'il convient de lui attribuer, et développe tout au long la théorie de son évolution (en particulier: théorèmes de BERNOULLI dans toute leur généralité), de sa convection et de sa diffusion.

Ce n'est pas le côté dynamique du mouvement dans les fluides qui retient son attention, mais le côté purement cinématique, aussi est-il clair que le *tourbillon* en est le centre d'attraction.

La méthode de calcul employée est typique pour un ouvrage américain: pas un indice, pas une composante, bien qu'on nage dans les champs vectoriels et tensoriels. En revanche, emploi du calcul dyadique, que nous avons également développé et employé dans plusieurs ouvrages. Serait-ce peut-être l'excellente *Introduction to theoretical physics* de LEIGH PAGE, dans laquelle ont appris bien des physiciens théoriciens il y a 20 ou 30 ans, qui est responsable de cet usage? A notre avis, c'est un usage excellent, qui permet de formuler les équations d'une façon très condensée tout en évitant la fatigue que présentent les indices et les sommations. Il serait désirable que les auteurs européens se mettent à cette notation.

<sup>1)</sup> Il vaudrait la peine de créer ce mot en français pour caractériser cette propriété des fluides de porter le champ du tourbillon.

Ce livre n'est pas fait pour des commençants. Il servira admirablement à deux fins: aux spécialistes qui y trouveront une mine de renseignements bien ordonnés, et aux professeurs ayant entre autres tâches d'enseigner l'hydrodynamique, car ils y trouveront des suggestions excellentes quant au choix des sujets et à la forme de l'exposé.

L'ouvrage nous révèle l'importance des travaux ressortissant à de nombreuses traditions: anglaise, française, italienne, allemande, russe, suisse, roumaine et même norvégienne. La typographie en est bonne et fait honneur aux Presses universitaires d'Indiana qui, comme on le sait, impriment le *Journal Rational Mech. Anal.*, dont TRUEDELL est l'un des rédacteurs distingués. *A. Mercier*

**Materials for Nuclear Power Reactors.** Von H.H. HAUSNER und S.B. ROBOFF (Reinhold Publishing Corp., New York 1955). 224 S., 15 Fig.; \$3.50.

Die für Leistungs-Kernreaktoren massgebenden physikalischen Grundlagen sind heute so weit bekannt, dass sie nicht mehr das Hauptproblem bei der Weiterentwicklung darstellen. Vielmehr sind es zur Zeit grundlegende Ingenieur- und Materialprobleme, welche in den Vordergrund gerückt sind und von deren Lösung der weitere Fortschritt abhängt. Das vorliegende Büchlein führt auf sehr leichtfassliche Art in die Werkstoffprobleme des Reaktorbaues ein. Ausgehend von einer kurzen Einleitung über die kernphysikalischen Grundlagen und die Konstruktion von Kernreaktoren, werden die einzelnen Reaktorelemente und die für sie in Frage kommenden Werkstoffe besprochen. Die Eigenschaften aller verwendungsfähigen Metalle und übrigen Stoffe, wie zum Beispiel Graphit und Wasser, werden aufgeteilt nach ihrem Anwendungszweck (als Brennstoff, Moderator- und Reflektormaterial, Kühlmittel, für Steuerung und Strahlenschutz) aufgeführt und an Hand eingehender Tabellen näher spezifiziert. Im wesentlichen sind die vor dem Genfer Kongress bekanntgewordenen Daten zusammengestellt. Eine Tabelle der chemischen Elemente und ihrer Isotopen, welche die Wirkungsquerschnitte gegenüber langsamen Neutronen angibt, sowie ein Glossary der im Reaktorbau üblichen Fachausdrücke machen das Buch zu einem wertvollen Einführungswerk für alle jene, welche sich in materialtechnischer Hinsicht einen Überblick verschaffen möchten. *W. Epprecht*

**Servomechanisms and Regulating System Design, Bd. II.** Von HAROLD CHESTNUT und ROBERT W. MAYER (John Wiley & Sons, Inc., New York 1955). 384 S., 217 Fig.; \$8.50.

Der vorliegende 2. Band erscheint in beträchtlichem Zeitabstand vom ersten. Der Grund lag darin, dass die Entwicklung, insbesondere der nichtlinearen Servotechnik, sehr rasche Fortschritte erfahren hat, so dass ein Teil der bereits im Manuskript vorliegenden Kapitel vollständig neu bearbeitet werden mussten. Der 2. Band wendet sich an den Konstrukteur von Servosystemen, wobei viele Einzelprobleme eingehender behandelt werden. Ein besonderer Abschnitt, nämlich das 1. Kapitel, widmet sich der Messtechnik von Teilen oder auch ganzen Servomechanismen, wobei sowohl die zeitlichen Einschwingvorgänge wie auch der Frequenzgang untersucht werden. Im 2. Kapitel wird der Einfluss der Form des Eingangssignals auf den Entwurf eines Servosystems diskutiert. Hierzu gehört auch der Einfluss von Geräuschsignalen, die dem Eingang überlagert werden, wobei als Ziel erscheint, dass das Servosystem das Geräusch möglichst zugunsten des Nutzsignales unterdrückt. Das 3. Kapitel behandelt die Auswahl des geeigneten Stellgliedes, damit die Anforderungen in bezug auf Drehmoment,



Geschwindigkeit und Leistung erfüllt werden können. Im 4. Kapitel wird eine Übersicht von Korrektornetzwerken gegeben, welche eine bestimmte Frequenzabhängigkeit der Verstärkung aufweisen. Im 5. Kapitel wird der Entwurf des Verstärkers diskutiert. Besondere Aufmerksamkeit wird der Nullpunkt Konstanz von Gleichstromverstärkern gewidmet. In diesem Zusammenhang sind auch die Trägersysteme wichtig, welche die Gleichstromgrösse in eine Wechselstromgrösse umsetzen, so dass diese verstärkt und wieder in eine Gleichstromgrösse zurückverwandelt werden kann. Eine besondere Rolle spielen die reinen Wechselstromservomechanismen, welchen das 6. Kapitel gewidmet ist. Die Stabilisierung und der Einfluss von Abweichungen der Trägerfrequenz werden eingehend behandelt.

Während bis hierher rein lineare Vorgänge betrachtet wurden, sind die folgenden Kapitel nichtlinearen Vorgängen gewidmet. So wird im 7. Kapitel die Linearisierung von nichtlinearen Elementen für kleine Abweichungen diskutiert. Diese Methode wird für grosse Ausschläge nicht mehr Gültigkeit haben, so dass für solche Vorgänge eine andere Linearisierung notwendig sein wird, was seinen Niederschlag im 8. Kapitel findet. Wichtig sind hier die Sättigungserscheinungen und die Diskussion der Stabilitätsfragen. Die Sättigungseffekte können bei Positions-Servosystemen einen wesentlich andern Einschwingvorgang zur Folge haben, als dies bei linearen Systemen der Fall wäre. Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang auch das Spiel, das sich durch Reibung und Ungenauigkeiten der Getriebe ergibt. Bereits in diese Kategorie gehören die Relais-Servosysteme, die einen besonderen Fall der nichtlinearen Systeme darstellen. Im letzten Kapitel wird die Anwendung von nichtlinearen Elementen in Servosystemen behandelt, und es wird gezeigt, dass mit solchen Elementen unter Umständen eine bedeutende Verbesserung des Verhaltens erzielt werden kann. Eine Bibliographie bis 1954, auf welche im Text Bezug genommen wird, ergänzt das Buch.

Der Vorzug des Buches besteht darin, dass eine ausgezeichnete Auswahl der Probleme getroffen wurde, um die wesentlichsten Gesichtspunkte herauszuarbeiten. Das Buch kann jedem, der sich eingehender mit dem Entwurf von Servosystemen abgeben muss und der die grundlegenden Aspekte des ersten Bandes kennt, als Wegweiser wertvolle Dienste leisten.

*H. Weber*

**Reaktionen in und an festen Stoffen.** Von K. HAUFFE (Springer-Verlag, Berlin 1955). 696 S., 427 Abb.; DM 78.-.

Die Halbleitertheorie hat sich in den letzten Jahren als neues Bindeglied zwischen Physik und anorganische Chemie eingefügt. Die chemischen Reaktionen im festen Zustand können heute auf Grund der Fehlordnungs- und Halbleiterphänomene sehr weitgehend verstanden und in sehr vielen Fällen bereits auch quantitativ erfasst werden. Es ist daher sehr zu begrüßen, dass K. HAUFFE den Versuch gewagt hat, die Fehlordnungs- und Halbleitertheorien als Grundlage für die Erörterung der Reaktionen an und in festen Körpern zu wählen. Sein Werk erfüllt dadurch einen doppelten Zweck: es zeigt dem Chemiker, wie das chemische Geschehen im festen Zustand studiert werden kann und erinnert anderseits den Physiker daran, dass die Halbleitertheorie nicht nur für die heute in den Vordergrund gerückten Transistoren und Gleichrichter nutzbringend ist, sondern eine viel weiter gespannte Bedeutung besitzt. Sie reaktiviert die eine Zeitlang in den Hintergrund gerückte Festkörperchemie sehr stark. Das Buch darf schon heute als Standardwerk bezeichnet werden, das jedem Festkörperchemiker und -physiker wertvolle Dienste zu leisten vermag.

Der erste Teil führt zunächst in die Fehlordnungserscheinungen von Ionen- und Valenzkristallen ein und gibt die Berechnungsgrundlagen wie auch die von

SCHOTTKY und WAGNER eingeführte Symbolik an. Sodann werden an Hand gut untersuchter Beispiele die Beziehungen zwischen elektrischer Leitfähigkeit sowie der Thermokraft und den Fehlstellen dargelegt und die Versuchsmethoden, welche zur Erforschung dieser Beziehungen üblich sind, erläutert. Als erste Anwendung wird das Problem der Randschichterscheinungen besprochen, das besonders für die Deutung der Chemisorption und damit für die Katalysatorforschung von Interesse ist. Ein sehr eingehendes Kapitel setzt sich anschliessend mit der Diffusion auseinander, wobei wie in den vorangehenden Abschnitten sehr viele Beispiele zur Darlegung herangezogen werden. Im zweiten Teil des Werkes werden die gewonnenen Erkenntnisse auf die in der Praxis bedeutungsvollen chemischen Reaktionen von Festkörpern angewandt, so die Oxydationsvorgänge an metallischen Stoffen, die Bildung von Ionenverbindungen höherer Ordnung (zum Beispiel Spinellbildung) und schliesslich für die Reduktions- und Röstprozesse. Dadurch, dass hier wie schon in den grundlegenden Kapiteln ausserordentlich viele Beispiele und Literaturangaben verarbeitet und durch gute Figuren veranschaulicht sind, wird das Buch zu einem wertvollen Nachschlagewerk, was besonders auch durch die gut redigierten Autoren- und Sachregister betont wird. Das Werk bleibt indessen ein sehr gutes Lehrbuch, enthalten doch alle Kapitel einführende und zugleich zusammenfassende Abschnitte, die zusammengekommen einen vorzüglichen Überblick über die in den speziellen Abschnitten durch Beispiele erhärteten Forschungsergebnisse geben. Trotz der Fülle des Stoffes bleibt das Werk übersichtlich und leichtfasslich. So schliesst es denn eine bisherige Lücke aufs beste, und es ist daher jedem zu empfehlen, der sich mit Halbleiterproblemen, Reaktionen im festen Zustand oder Wechselwirkungen zwischen Festkörpern und Gasen zu befassen hat, sich in dieses Werk zu vertiefen.

*W. Epprecht*

**Nuclear Magnetic Resonance.** By E. R. ANDREW (Cambridge University Press 1955). 265 pp., 61 figs.; 35 s.

Professor ANDREW has written an excellent review of the subject of nuclear magnetic resonance. It is particularly suited for those who wish to begin their study of this field, since the book is not only comprehensive, but the physical ideas have been explained with great clarity and with a minimum of mathematics. For details, the reader is referred to the original papers; Professor ANDREW's listing of these papers forms a most comprehensive bibliography which in itself is a valuable contribution to the book.

The book, however, is not only suited for beginners, but for practicing physicists as well, since one often desires a quick review in a part of the field in which he is unfamiliar. Indeed, in the short time that this reviewer has had the book in his possession, he has found Professor ANDREW's book exceptionally well suited to that purpose, since, in addition to the bibliography, a most comprehensive listing of nuclei and sample materials (organic and inorganic solids, metals) which have been investigated by nuclear magnetic resonance is included in the appendices.

The only drawback lay outside the author's hands: it is always difficult to write a book in a rapidly developing field. As a consequence, several of the newest and most exciting developments in the field are not covered. Professor ANDREW, however, is aware of this inevitable shortcoming, bringing, for example, by means of a footnote written as the book went to press, the reader's attention to the results of studies at extremely high resolution, typified by the work of ARNOLD and ANDERSON.

*W. G. Proctor*